Дискретная математика

Характеристические числа графов

Цикломатическое число

Цикломатическим числом графа ***G*** называется число ребер, которые надо убрать, что бы граф стал ацикличным.

Цикломатическое число

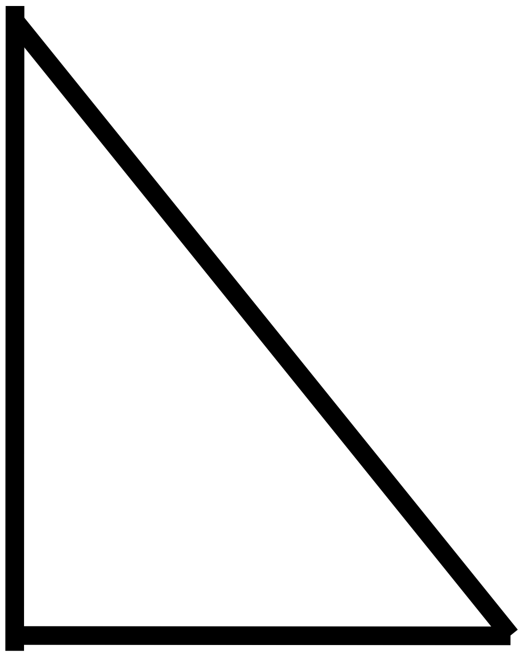


Рис. 1

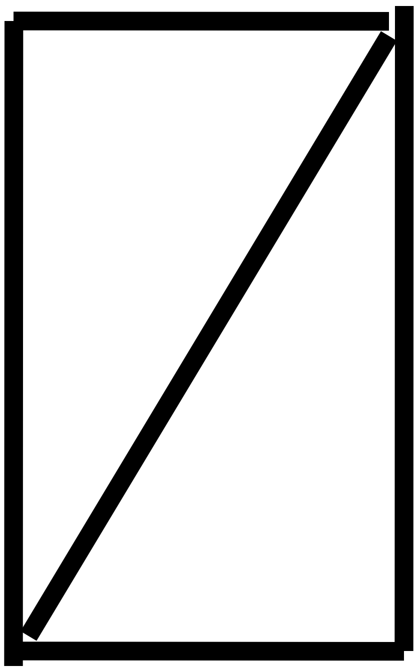


Рис. 2

Цикломатическое число

Цикломатическое число графа **G** находится по формуле:

$$\gamma(G) = \nu_e - \nu_v + \nu_c$$

ν_e – число ребер,

ν_v – число вершин,

ν_c – число компонент связности.

Цикломатическое число

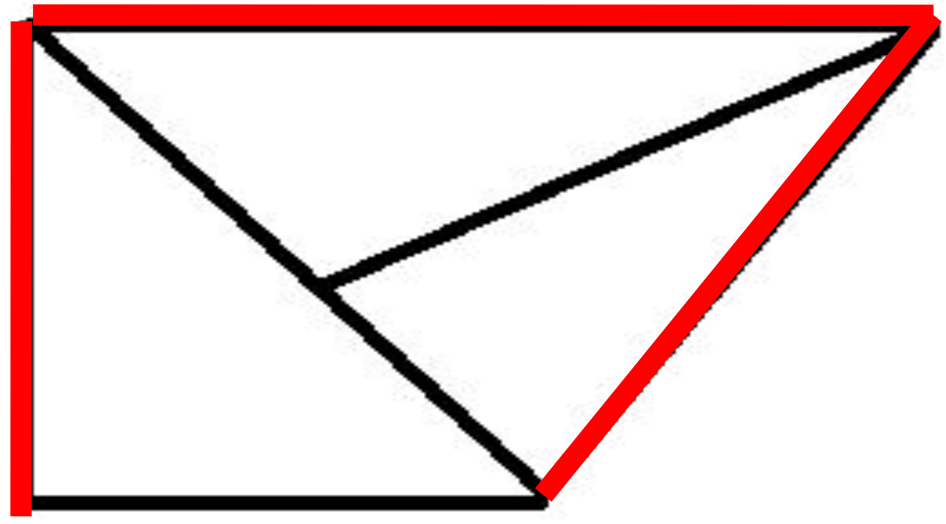
Замечание 1. Цикломатическое число ***дерева равно 0.***

Замечание 2. Цикломатическое число ***леса равно 0.***

Замечание 3. Если цикломатическое число графа равно 1, то в графе ровно 1 цикл.

Цикломатическое число

Пример 1.



$$\gamma(G) = \nu_e - \nu_v + \nu_c =$$
$$= 7 - 5 + 1 = 3.$$

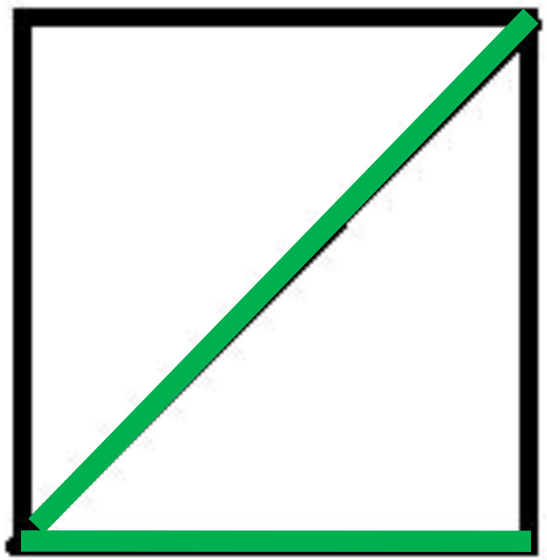
Цикломатическое число

Пример 2.

$$\gamma(G) =$$

$$= \nu_e - \nu_v + \nu_c =$$

$$= 10 - 7 + 2 = 5.$$



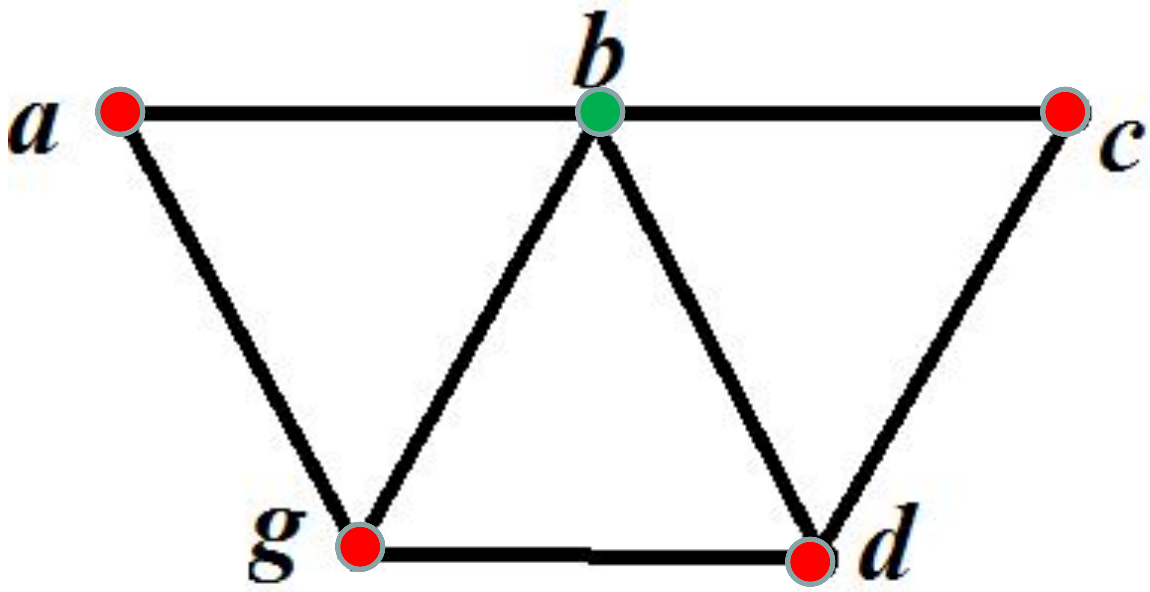
Число внутренней устойчивости

Внутренне устойчивым множеством графа ***G*** называется множество вершин ***S***, все вершины которого попарно несмежны.

Число внутренней устойчивости:

$$\alpha(G) = \max_{S \subseteq V} |S|$$

Число внутренней устойчивости



$$S_1 = \{a\},\ S_2 = \{a, c\},\ S_3 = \{g, c\},\ S_4 = \{a, d\}.$$

$$\alpha(G) = \max|S_i| = 2.$$

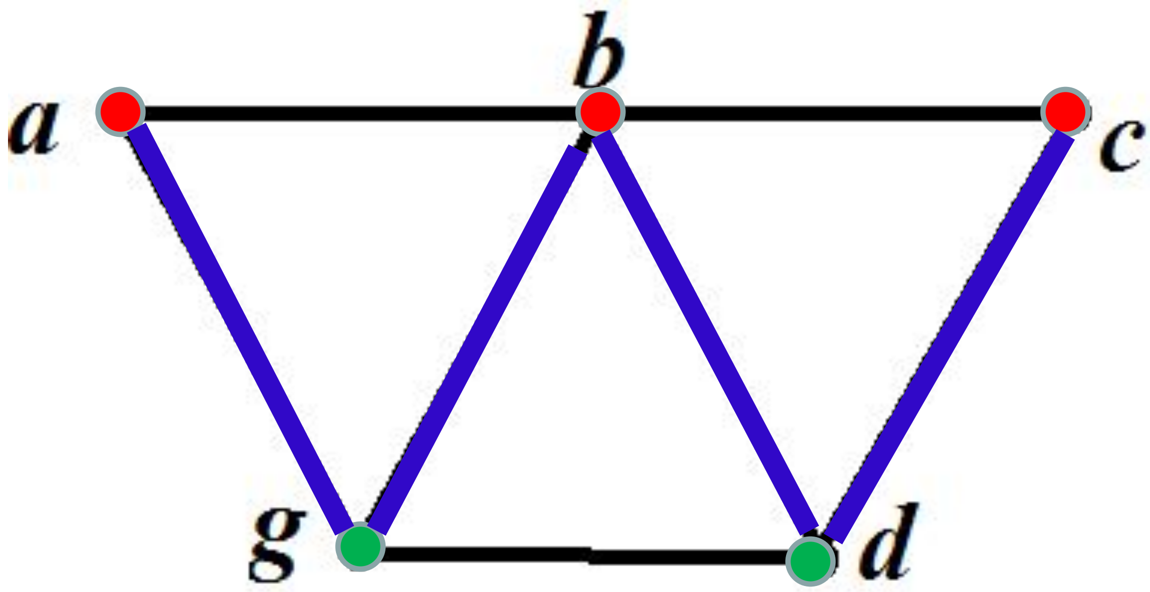
Число внешней устойчивости

Внешне устойчивым множеством графа **G** называется множество вершин **Q**, таких, что из всех вершин множества ┐ **Q** ведут ребра в вершины множества **Q.**

Число внутренней устойчивости:

$$\beta(G) = \min_{Q \subseteq V} |Q|$$

Число внешней устойчивости



$$Q_1 = \{a, b, c\}, \; Q_2 = \{g, d\}.$$

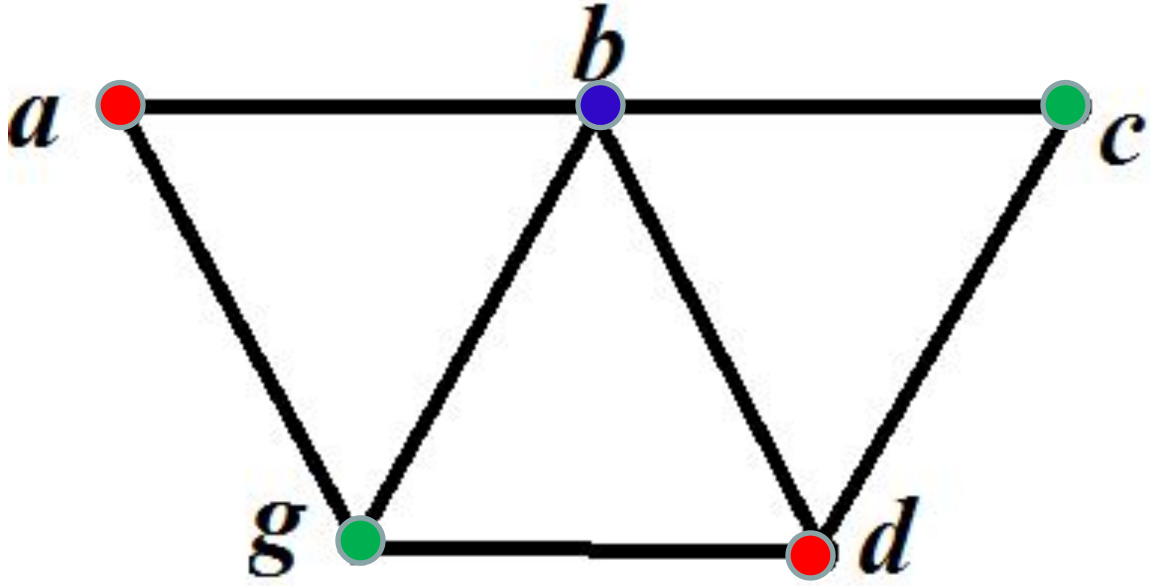
$$\beta(G) = \min |Q_i| = 2.$$

Хроматическое число

Граф ***G*** называется h- хроматическим, если его вершины можно раскрасить h различными красками так, чтобы никакие две смежные (различные) вершины не были окрашены в один цвет. ***Хроматическое число графа*** – это наименьшее число красок.

$$\chi(G) = \min h$$

Хроматическое число



$$H_1 = \{a, d\}, H_2 = \{g, c\}, H_3 = \{b\}.$$

$$\chi(G) = \min h = 3.$$

Хроматическое индекс

Граф ***G*** называется k-раскрашиваемым, если его ребра можно раскрасить k различными красками так, чтобы никакие два смежные ребра не были окрашены в один цвет. ***Хроматический индекс графа*** – это наименьшее число красок.

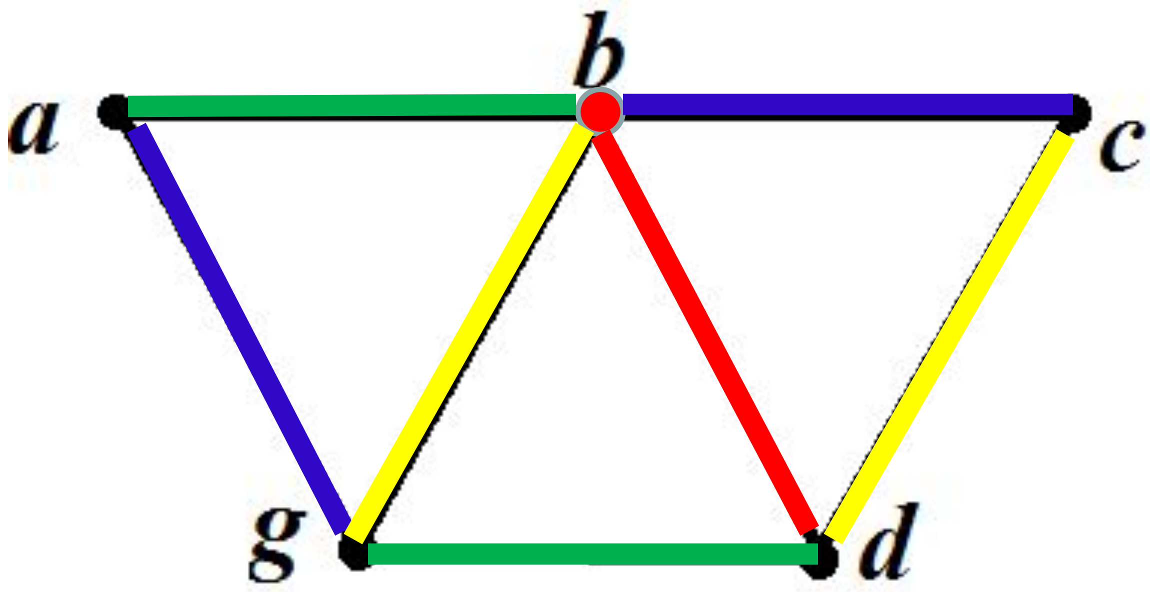
$$\chi'(G) = \min k$$

Хроматическое индекс

Согласно ***теореме Визинга***, если максимальная локальная степень вершины графа равна ***k,*** то хроматический индекс подчиняется условию:

$$k \le \chi'(G) \le k + 1$$

Хроматическое число

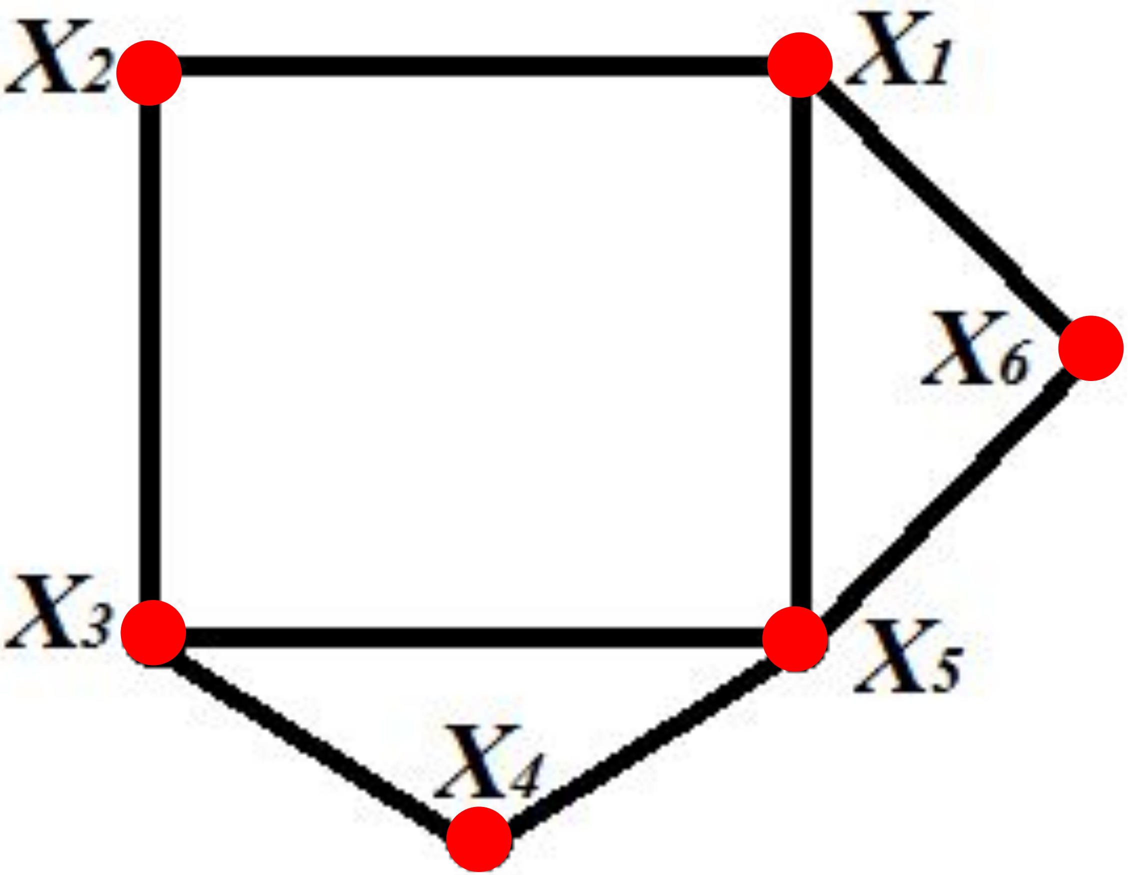


$$k = \max\rho(v) = \rho(b) = 4$$

$$4 \le \chi'(G) \le 5 \qquad \chi'(G) = 4$$

Пример 1

В пунктах X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 могут быть источники излучения. Если источники расположены в пунктах X_i и X_j влияют друг на друга (поражают друг друга), то на графе они соединены ребром (X_i, X_j). Можно ли расположить в каких-либо из данных пунктов 4 или 3 источника, не поражающих друг друга?

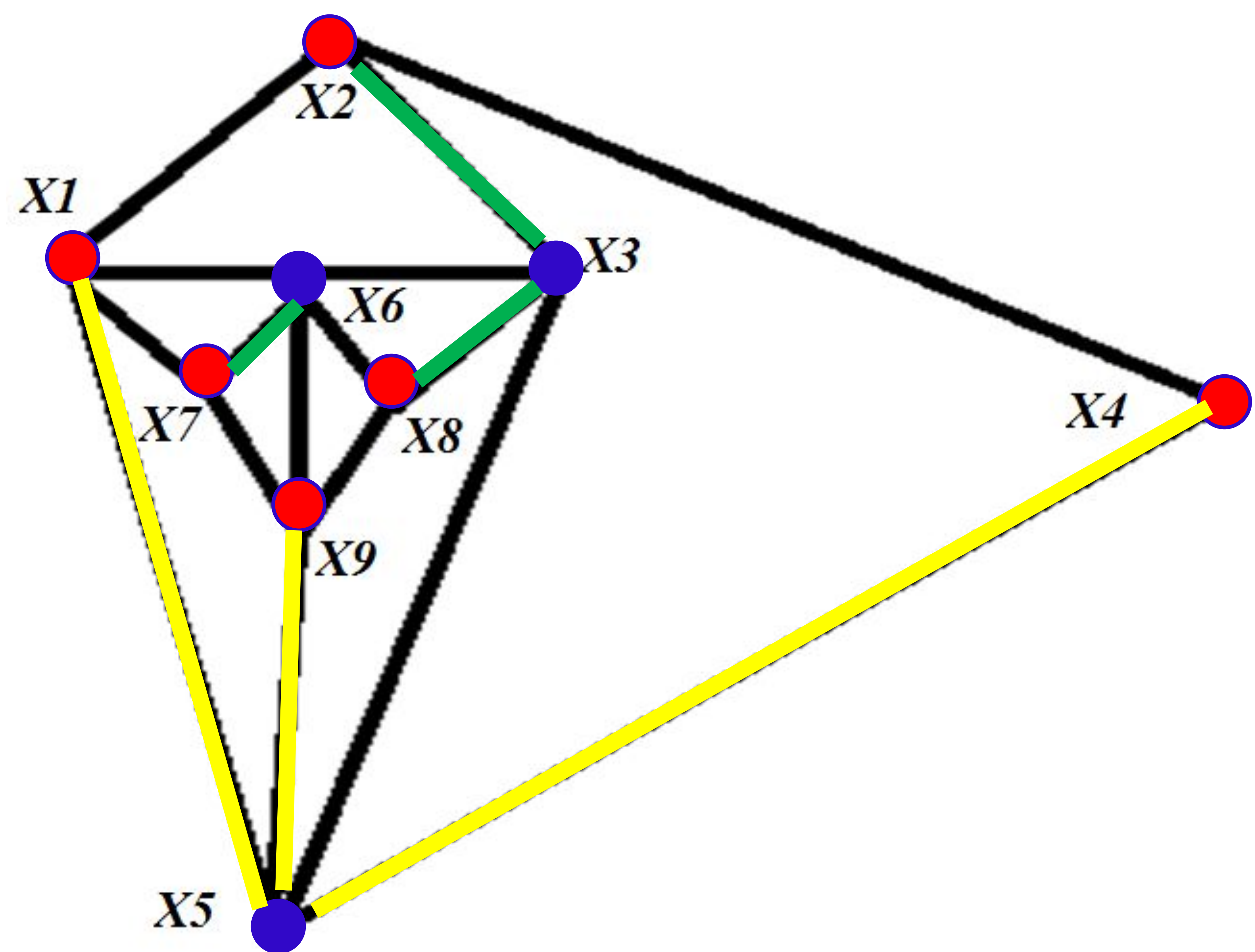


Надо найти максимальное внутренне устойчивое множество.

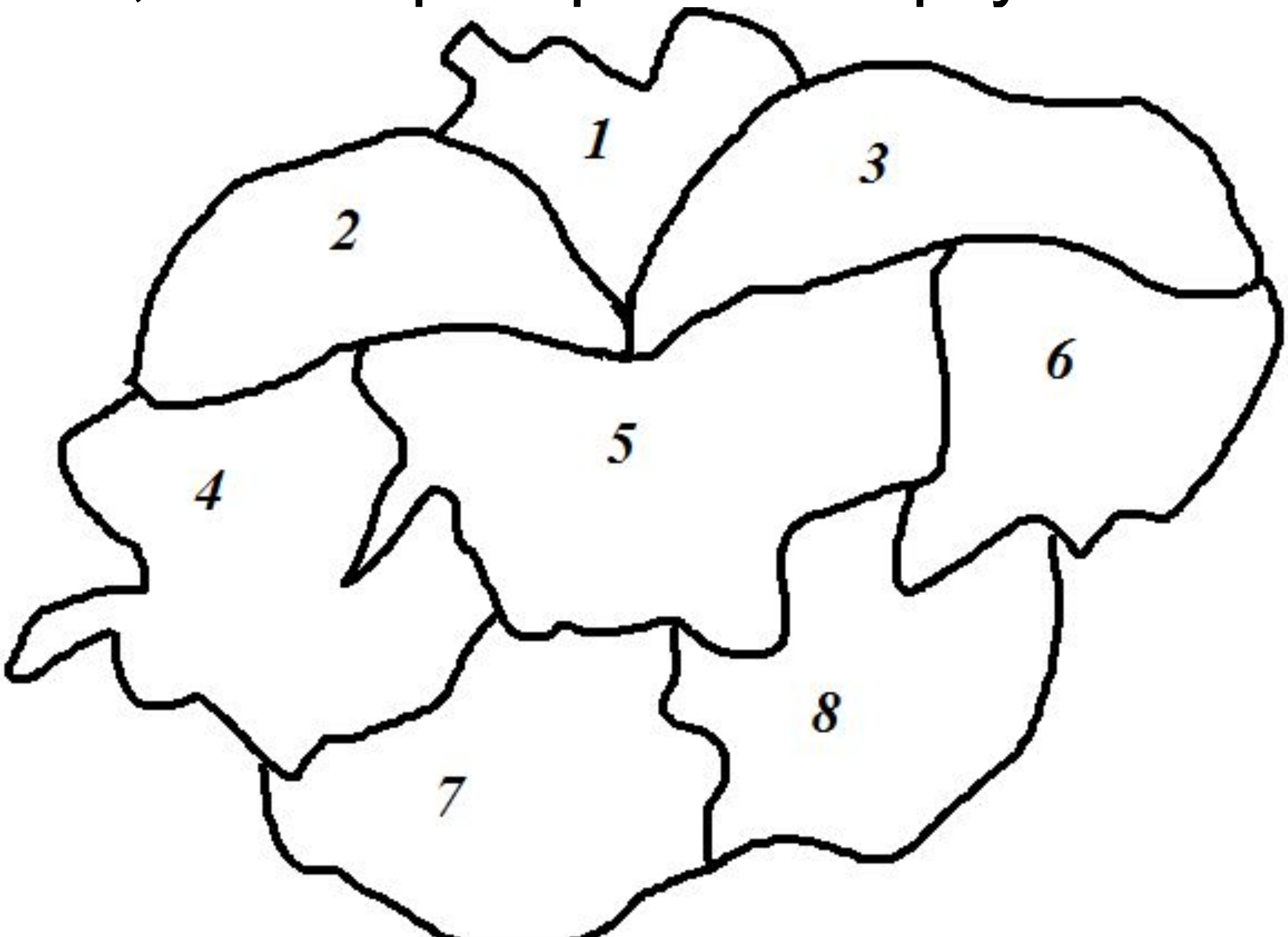
$S_1=\{X_2, X_5\}$, $S_2=\{X_1, X_4\}$, $S_3=\{X_3, X_6\}$, $S_4=\{X_1, X_3, X_5\}$.

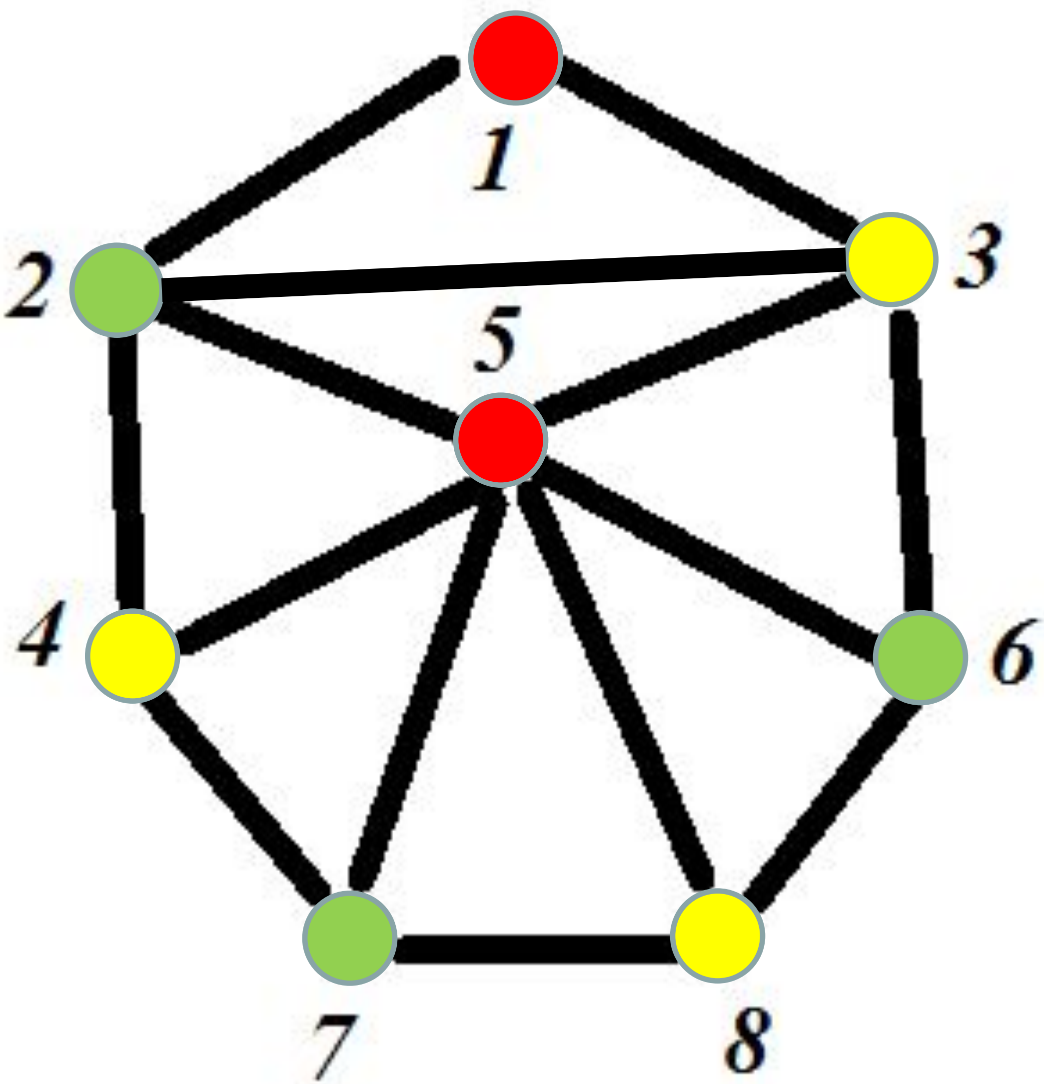
Пример 2

Объекты X_1, X_2, … , X_9 расположены так, как показано на графе. Объекты, которые просматриваются друг из друга соединены ребрами. Определить в каких объектах достаточно поставить камеры наблюдения, чтобы они в совокупности просматривали все объекты.


X1
X2
X3
X4
X5
X6
X7
X8
X9

Пример 3. Дана политическая карта континента. Найти минимальное число цветов, чтобы раскрасить карту.





Заменим страны на вершины, а границы между ними на ребра. Найдем хроматическое число графа.

$$\chi(G) = 3.$$

Раскраска карты в три цвета