



Тема

Булевы функции и алгебра логики



Логика — это наука о формах и законах человеческой мысли, о законах доказательных рассуждений, изучающая методы доказательств и опровержений, т.е. методы установления истинности или ложности одних высказываний (утверждений) на основе истинности или ложности других высказываний.



Алгебра логики

- ◆ Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.



Создателем алгебры логики является живший в XIX веке английский математик Джордж Буль, в честь которого эта алгебра названа булевой алгеброй высказываний.



Булевы переменные и функции

Переменные, которые могут принимать значения только из множества $B=\{0,1\}$, называются *логическими* или *булевыми переменными*. Сами значения 0 и 1 булевых переменных называются *булевыми константами*.



Булевы переменные и функции

Функция вида $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы и значения которой заданы на множестве B , называется ***n-местной булевой функцией***. Такие функции также называют ***логическими*** или ***переключаемыми функциями***.



Основные определения

Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретных значений булевых переменных называется **двоичным словом** (**n -словом**) или **булевым набором** длины **n** .

Для булевой функции $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретное (индивидуальное) значение булевого набора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется также **интерпретацией** булевой функции **f** .

Множество всех двоичных слов, обозначаемое через **B^n** , образует область определения булевой функций и называется **n -мерным булевым кубом** и содержит **2^n** элементов-слов: **$|B^n|=2^n$** .

Каждому двоичному слову соответствует одно из двух возможных значений (0 или 1), таким образом, область значений представляет собой кортеж длиной **2^n** , состоящий из 1 и 0.



I. Таблицы истинности

Таблицы, в которых каждой интерпретации функции поставлено в соответствие ее значение, называются ***таблицами истинности булевой функции***.

В таблице истинности каждой переменной и значению самой функции соответствует по одному столбцу, а каждой интерпретации — по одной строке. Количество строк в таблице соответствует количеству различных интерпретаций функции.



Булевы функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $\phi_0 \equiv 0$ — функция константа 0,
2. $\phi_1 = \underline{x}$ — функция повторения аргумента,
3. $\phi_2 = \overline{x}$ — функция инверсии или отрицания аргумента,
4. $\phi_3 \equiv 1$ — функция константа 1.



Таблица истинности

- ◆ Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.
- ◆ Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
 - ◆ $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$,
 - ◆ $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.
- ◆ Количество наборов для формулы с четырьмя переменными равно шестнадцати и т.д.



Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1



Булевы функции двух переменных

Функ-ция	Обоз-начение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_0(x,y)$	0	константа 0		константа 0
$f_1(x,y)$	$x \wedge y$	конъюнкция (логическое «и»)	$;$, $\&$, $\&\&$, $*$, <i>И</i> , $\times$, <i>AND</i> , <i>min</i>	x и y
$f_2(x,y)$	$\overline{x \rightarrow y}$	отрицание импликации	$>$	x и не y
$f_3(x,y)$	x	повторение первого аргумента		как x
$f_4(x,y)$	$\overline{x \leftarrow y}$	отрицание обратной импликации	$<$	не x и y
$f_5(x,y)$	y	повторение второго аргумента		как y
$f_6(x,y)$	$x \oplus y$	исключающее «или» (сумма по модулю 2)	$\neq$, $<>$, $><$, $\neq$, <i>XOR</i>	x не как y
$f_7(x,y)$	$x \vee y$	дизъюнкция (логическое «или»)	<i>OR</i> , <i>ИЛИ</i> , $+$, <i>max</i>	x или y



Булевы функции двух переменных

Функ-ция	Обоз-начение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_8(x,y)$	$x \downarrow y$	отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса)	$\overline{x \vee y}$	не x и не y
$f_9(x,y)$	$x \sim y$	эквивалентность	$\Leftrightarrow, \equiv, Eqv, =$	x как y
$f_{10}(x,y)$	$\overline{y}$	отрицание второго аргумента	$\neg y$	не y
$f_{11}(x,y)$	$x \leftarrow y$	обратная импликация	$\supset$	x , если y (x или не y)
$f_{12}(x,y)$	$\overline{x}$	отрицание первого аргумента	$\neg x$	не x
$f_{13}(x,y)$	$x \rightarrow y$	импликация	$\supset, \Rightarrow, Imp$	если x , то y (не x или y)
$f_{14}(x,y)$	$x y$	отрицание конъюнкции (штрих Шеффера)	$\overline{x \wedge y}$	не x или не y
$f_{15}(x,y)$	1	константа 1		константа 1



Построение таблицы истинности

1. Подсчитать количество переменных в формуле n .
2. Определить количество строк в таблице – 2^n .
3. Подсчитать количество операций в формуле и определить количество столбцов $m + n$.
4. Записать названия столбцов с учетом последовательности выполнения операций.
5. Заполнить столбцы переменных наборами от 00...0 до 11...1 в лексикографическом порядке, используя метод «последовательного деления столбцов пополам»
6. Заполнить таблицу по столбцам.



Примеры

$$x \wedge \bar{y} \rightarrow (x \vee y) \wedge \bar{z}$$

n=3

m=

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \wedge \bar{y}$	$(x \vee y) \wedge \bar{z}$	F
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1



Выполнимая формула

$$\overline{x \vee \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z}$$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee \overline{y}}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z}$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.



II. Задание булевых функций с помощью формул

Формула — это выражение, задающее некоторую функцию в виде суперпозиции других функций.

Суперпозицией называется прием получения новых функций путем подстановки значений одних функций вместо значений аргументов других функций.



Пример

Рассмотрим формулу булевой алгебры, задающую некоторую функцию $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = (x \wedge \bar{y}) \vee z$$

Эта формула содержит функции:

$g(x_1)$ – отрицание,

$s(x_1, x_2)$ – конъюнкция,

$l(x_1, x_2)$ – дизъюнкция.

Представим данную формулу в виде суперпозиции указанных функций следующим образом:

$$f(x,y,z) = l(s(x, g(y)), z)$$



Приоритет выполнения операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.
4. Импликация.
5. Эквивалентность

—
∧
∨
→
~

Пример

Убрать все возможные скобки

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y) = x \wedge y \wedge z \vee x \vee y$$

Расставить скобки с учетом приоритета операций

$$((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \vee y) \rightarrow x \wedge y \wedge z \vee x \vee y$$



Эквивалентные формулы

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются **эквивалентными** или **равносильными**.