Лекция № 1

Функция нескольких переменных

Вопросы

1. Понятие функции двух и более переменных.
2. Дифференцирование функции нескольких переменных.
3. Частные производные. Полный дифференциал.
4. Экстремум функции двух переменных.

1. Рассмотрим функцию двух переменных.

Опр. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно значение переменной z, то она называется ***функцией двух переменных.***

$$z = f(x, y)$$

Опр. Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Опр. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r .$$

Опр. Число *A* называется ***пределом*** функции *f(x, y)* при стремлении точки *M (x, y)* к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки *M(x, y),* для которых верно условие $MM_0 < r$

также верно и условие

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$$

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

Опр. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется ***точкой разрыва*** функции *f(x, y).* Это может быть в следующих случаях:

1. Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Не существует предел в точке

$M_0(x_0, y_0)$.

3. Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

2. Дифференцирование функции нескольких переменных

Опр. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и дадим приращение Δx переменной x. Тогда величина $\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется ***частным приращением функции по x.***

Можно записать

$$\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Тогда $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$$

называется ***частной производной*** функции *z* = *f*(*x*, *y*) по *x*.

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по у:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Полное приращение и полный дифференциал

***Опр*.** Для функции *f(x, y)* выражение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется ***полным приращением***.

Полное приращение функции *f(x, y)* в некоторой точке (*x, y*), можно представить как

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Опр. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \ldots, t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции

$$u = x^{y^2 z}$$

.

*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

Получаем

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy$$

Частные производные высших порядков

Если функция *f(x, y)* определена в некоторой области *D*, то ее частные производные $f'_x(x, y)$ $f'_y(x, y)$

тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные ***частными производными первого порядка.***

Производные этих функций будут ***частными производными второго порядка.***

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Опр. Частные производные вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$$

и т.д. называются **смешанными *производными*.**

Теорема. Если функция *f(x, y)* и ее частные производные определены и непрерывны в точке *M(x, y)* и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

***Пример* 3**. Найти частные производные 1-го и 2-го порядков функций

1) $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$

Решение. Рассматривая *y* как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$$

Рассматривая *x* как постоянную величину, найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$$

Далее, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -8;$$

*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -3.$$

Имеем, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

2)

$$z = e^{x^2+y^2}$$

Решение. Рассматривая *y* как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2}$$

Рассматривая *x* как постоянную величину, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xe^{x^2+y^2}\right)'_x = 2\left(e^{x^2+y^2} + xe^{x^2+y^2} \cdot 2x\right) =$$

$$= 2e^{x^2+y^2}\left(1+2x^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2ye^{x^2+y^2}\right)'_y = 2\left(e^{x^2+y^2} + ye^{x^2+y^2} \cdot 2y\right) =$$

$$= 2e^{x^2+y^2}\left(1+2y^2\right);$$

*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2xe^{x^2+y^2}\right)'_y = 2xe^{x^2+y^2} \cdot 2y = 4xye^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2ye^{x^2+y^2}\right)'_x = 2ye^{x^2+y^2} \cdot 2x = 4xye^{x^2+y^2}.$$

Имеем,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

3. Экстремум функции нескольких переменных

Опр. Если для функции *z = f(x, y)*, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется ***точкой максимума.***

Опр. Если для функции *z = f(x, y),* определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется ***точкой минимума***.

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть ***критической точкой***.

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$\Delta(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1. Если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум,

если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум,

если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$- минимум.

2. Если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.
3. В случае, если $\Delta = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

****Пример*** 4. Найти экстремум функции

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$$

Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки:

*

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

Откуда $x = 0$, $y = 3$; $M(0;3)$.

Находим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

*и составляем выражение

$$\Delta(x,y) = f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2 =$$

$$= 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0$$

Так как $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$,

то функция в точке *M*(0;3) имеет минимум. Значение функции в этой точке

$$z_{\min} = -9$$

Пример 5.Найти область определения функции

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Решение. Функция принимает действительное значение при условии

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0$$ т.е. $$x^2 + y^2 \leq 25$$

Областью определения данной функции является круг радиуса 5 с центром в начале координат, включая граничную окружность.

Метод множителей Лагранжа

Условный экстремум

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию

$u = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

$\phi(x, y) = 0$, которое называется ***уравнением связи***.

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, так как другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является ***необходимыми*** условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$ называется ***функцией Лагранжа***.

***Пример*.** Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

*

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке

$$\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$$

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также ***методом множителей Лагранжа*.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.