АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Подзаголовок

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕО МТЕРИЯ

Происхождение термина «алгебра»

- Название труда арабского математика Аль-Хорезми **«Аль-джабр-аль-мукабалла»** (Учение о перестановках, отношениях и решениях);
- Имя математика **Гебера**, существование которого, однако, подвергается сомнению.

- Алгебра, как и арифметика и геомерия, - старейший раздел математики
- Алгебра вместе с арифметикой есть наука о числах и через посредство чисел – о величинах вообще. Но арифметика исследует свойства определенных величин, а алгебра – только те свойства величин, которые общи для всех величин независимо от их значений.
- Таким образом, алгебра есть обобщенная арифметика, не случайно Исаак Ньютон назвал свой трактат об алгебре «Общая арифметика».

- Алгебру можно определить как науку о количественных соотношениях.
- В современном понимании алгебру можно определить как науку об операциях над любыми математическими объектами.

Алгебру разделяют на:

- Низшую
  - теория простейших арифметических операциях над алгебраическими выражениями,
  - решение уравнений первой и второй степени,
  - теория степеней и корней,
  - теория логарифмов,
  - простейшая комбинаторика;

Алгебру разделяют на:

- Высшую
  - теория уравнений произвольных степеней,
  - Теория исключений,
  - Теория симметрических функций
  - Теория подстановок и т.д.

Линейная алгебра – это раздел высшей алгебры, изучающий объекты линейной природы (векторные пространства, линейные отображения, системы линейных уравнений).

Среди основных инструментов линейной алгебры – определители, матрицы и т.д.

Аналитическая геометрия – это раздел геометрии изучающий геометрические объек ты средствами алгебры на основе метода координат.

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение, так как значительная часть математических моделей экономических, технологических, биологических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

Матрицей размера m x n называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие таблицу, называются **элементами матрицы**.

Элемент, стоящий на пересечении i-ой строки матрицы и её j-го столбца (i=1,…m j=1,…n) обозначается a_{ij}

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Две матрицы A и B одной размерности $m \times n$ равны, если для любых i, j $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$.

Матрица, состоящая из одной строки $A=\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \cdots a_{ij} \cdots a_{1n} \end{bmatrix}$ называется матрицей-строкой, а матрица B, состоящая из одного столбца - матрицей-столбцом: $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$. Если число строк матрицы равно числу её столбцов и равно n, то матрица называется квадратной $n-$го порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых i=j, называются **диагональными** и образуют главную диагональ матрицы.

Если все недиагональные элементы матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной**.

Матрица любого порядка называется **нулевой** или **нуль матрицей**, если все её элементы равны нулю.

Например:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы $n-$го порядка все диагональные элементы равны единице, то такая матрица называется единичной $n-$го порядка и обозначается E.

Например: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций:

1) умножение матрицы на число;

2) сложение матриц;

3) умножение матриц.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число λ называется матрица B, у которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$. $(i, j \in N)$.

Например:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot3 & 3\cdot(-2) & 3\cdot4 \\ 3\cdot0 & 3\cdot(-7) & 3\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & -6 & 12 \\ 0 & -21 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Произведение любой матрицы *A* размерности *m* x *n* на нуль есть нулевая матрица, т.е. 0 x *A* = 0
- Общий множитель для всех элементов можно выносить за знак матрицы.
- Например:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -6 & 12 & 10 \\ 8 & -2 & -8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

- **Суммой матриц** А и В одинакового порядка m x n называется матрица С того же порядка, элементы которой $c_{ij}: \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- Например: сложить матрицы *А* и *В*, если:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Разность двух матриц** А и В одинакового порядка mxn определяется через предыдущие операции: С=А-В=А+(-1)хВ.

- Умножение матрицы А на матрицу В возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.
- **Произведением матриц** A_{mxn} х B_{nxk} называется такая матрица C_{mxk}, каждый элемент c_{ij}, которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А и j-го столбца матрицы В.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$$

Из данного выражения следует правило умножения матриц: чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы **C**, необходимо все элементы i-й строки матрицы **A** умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы **B** и полученные произведения сложить:

$$\underset{m\times k}{\mathbf{A}}\quad\underset{k\times n}{\mathbf{B}} = \underset{m\times n}{\mathbf{C}}$$

- Например: Вычислить произведение матриц

  *A*x *B*, где

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

- Матрица *A* имеет размер 2x 4, матрица *B* – 4x3.
- Найдем размер матрицы произведения: A_{2x4} x B_{4x3} = C_{2x3}

$$C=\begin{bmatrix} -1\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot(-1) & -1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 1 & -1\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 1+0\cdot 0 \\ -2\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-1) & -2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 1 & -2\cdot 0+1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Транспонированием** матрицы *A* называется переход к матрице $A^{т}$, у которой столбцами являются строки матрицы *A* (и наоборот) с сохранением порядка.
- Матрица $A^{т}$ называется транспонированной относительно матрицы *A*.

Например, к матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, транспонированной является

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1) $A+B=B+A$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

4) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

5) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

6) $\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B$

7) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

8) $A\cdot B\neq B\cdot A$ - в общем случае

9) $A\cdot E=E\cdot A=A$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(\gamma x A)^T = \gamma x A^T$

4) $(A+B)^T = B^T + A^T$

5. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

Любой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое **определителем** или **детерминантом** n-го порядка этой матрицы.

Обозначения: $\det \mathrm{A}$, $|\mathrm{A}|$, $D(\mathrm{A})$, Δ.

Определителем матрицы первого порядка $\mathrm{A} = (a_{11})$ назовем число $|\mathrm{A}| = a_{11}$.

Определителем Δ второго порядка квадратной матрицы *A* называется выражение:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\ .$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}} - \underbrace{a_{12}a_{21}}.$$

Пример 1.3. Вычислим определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение

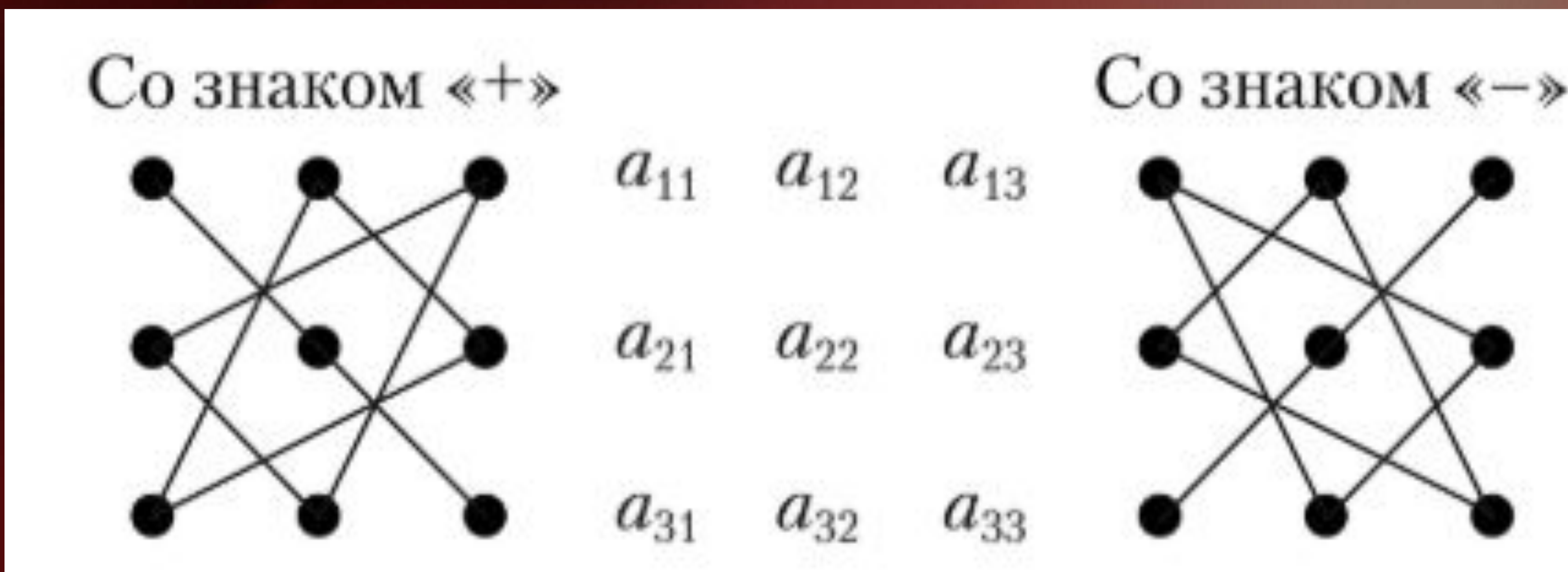
$$|\mathbf{A}| = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -10.$$

Определитель Δ третьего порядка квадратной матрицы *А* вычисляется по формуле **Саррюса:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} - побочную диагональ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Например: вычислить определители второго и третьего порядков:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7-(-3)\cdot 4 = 14+12 = 26$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-5)+2\cdot 0\cdot 2+1\cdot(-1)\cdot 5-1\cdot(-3)\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot(-5)-3\cdot 0\cdot 5 =$

$= 45+0-5+6-10-0 = 36$

6. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ N-ГО ПОРЯДКА

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A $n-$го порядка называется определитель $(n-1)-$го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием $i-$ой строки и $j-$го столбца.

Например: найти миноры элементов a_{11}, a_{22}, a_{33} матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A $n-$го порядка называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (3.2)$$

Например: найти алгебраические дополнения к элементам матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

По формуле (3.2) находим:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = \ a_{22}$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -a_{12}$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -a_{21}$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = \ a_{11}$

Теорема Лапласа

Определитель квадратной матрицы A равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{1}^{n} a_{in}A_{in}$$

- разложение определителя по элементам i-ой строки

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{1}^{n} a_{nj}A_{nj}$$

- разложение определителя по элементам j-го столбца

Пример. Вычислим определитель матрицы, используя разложение по строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Разумнее разложить определитель по элементам 1-ой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

полученные определители третьего порядка можно разложить, например, по первой строке:

$$=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & -3\\ 4 & 7\end{vmatrix}-3\cdot\left[-2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-5 & 6\\ 2 & 4\end{vmatrix}\right]=$$

$$=23-54-3\cdot\left[-2\cdot10-1\cdot(-19)+(-32)\right]=-31-3\cdot(-20+19-32)=-31+99=68$$

6. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы является нулевой (состоит из одних нулей), то ее определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число γ, то ее определитель умножится на число γ.
3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:
   $|A^T| = |A|$
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если матрица содержит два одинаковых ряда, то ее определитель равен нулю

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраическое дополнение элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0, \quad i = j$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой- либо строки (столбца) прибавить элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Пример 1.6. Найдем определитель произведения матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (-2) \cdot 19 = -38.$$

Вычислим этот же определитель, находя произведение матриц:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}; \quad \det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 25 \end{vmatrix} = -38.$$

Пример. Используя свойства 1-9 определителя, вычислим определитель 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

7. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

Матрица A размера $m \times n$ называется ступенчатой, если она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1m} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2m} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \; \ldots a_{mm} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Элементарными преобразованиями матрицы являются следующие:

1. отбрасывание нулевой строки (столбца);

2. умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число $\neq 0$;

3. изменение порядка строк (столбцов) матрицы;

4. прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

5. транспонирование матрицы.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Например: приведем к ступенчатому виду матрицу А, используя элементарные преобразования, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Прибавим поэлементно ко 2-ой строке 1-ю строку, умноженную на (-3),
3. к 3-ей прибавим 1-ю, умноженную на (-6),
4. к 4-ой прибавим 1-ю, умноженную на (-2).

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 11 & -2 \\ 0 & 16 & 19 & -13 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Прибавим к 3-ей строке 2-ю, умноженную на -4,
6. к 4-ой прибавим 2-ю, умноженную на -5/4;
7. к 4-ой строке прибавим 3-ю строку, умноженную на -7/20
8. Получаем ступенчатый искомый вид исходной матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -25 & -5 \\ 0 & 0 & -35/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -25 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

8. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$$

Если определитель матрицы А отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или неособенной, в противном случае (при $|A| = 0$) - вырожденной или особенной.

Теорема *(необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)*:

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Обратная матрица находится по алгоритму:

1. Найти определитель исходной матрицы A.
   - Если $|A|=0$, то матрица A – вырожденная и обратной ей матрицы не существует.
   - Если $|A|\neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует.
2. Найти матрицу A^T, транспонированную к данной.
3. Найти алгебраические дополнения к каждому элементу транспонированной матрицы.
4. Составить присоединенную матрицу $\tilde{A}$, элементами которой являются найденные алгебраические дополнения.

5. Вычислить обратную матрицу A^{-1} по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

6. Проверить правильность вычисления обратной матрицы, используя равенства:

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$$

Пример.

Определить, имеет ли данная матрица обратную, и если имеет, то вычислить ее. Проверить правильность нахождения обратной матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1) найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 8 - 18 - 12 + 12 + 32 = 38.$$

$|A| \neq 0$ =>матрица A^{-1} существует.

2) транспонируем матрицу A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3) найдем алгебраические дополнения матрицы A^T:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=16 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=11$$

4) составим присоединенную матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -10 \\ -4 & 10 & -7 \\ -10 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

5) Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 16 & -2 & -10 \\ -4 & 10 & -7 \\ -10 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

6) проверим правильность нахождения A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{38} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -2 & -10 \\ -4 & 10 & -7 \\ -10 & -6 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 64+4-30 & -8-10+18 & -40+7+33 \\ 48-8-40 & -6+20+24 & -30-14+44 \\ 32+8+40 & -4-20+24 & -20+14+44 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 38 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

9. РАНГ МАТРИЦЫ

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы обозначается:

Rang A,   или r(A).

Теорема.

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$,

2) $r(A+B) \ge |r(A) - r(B)|$,

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$,

4) $r(A^T A) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если A и B – квадратные матрицы и $|B| \ne 0$.

С помощью элементарных преобразований любую (кроме нулевой) матрицу можно привести к ступенчатому виду, тогда вычисление ранга матрицы не представляет труда.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

1. Преобразуем матрицу *A* так, чтобы все элементы какого-либо столбца, например третьего, кроме элемента a_{13}, обратились в нуль.

Для этого ко второй строке прибавим первую, к третьей – первую, умноженную на (-2), и к четвертой – третью.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Преобразуем теперь матрицу так, чтобы в четвертом столбце все элементы, кроме элементов первой и второй строк, обратились в нули. Для этого прибавим к четвертой строке вторую, умноженную на (-1), и будем иметь

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен трем, т.е. минор третьего порядка отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$