ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

БУЛЕВА АЛГЕБРА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕКЦИЯ 7

С.В.ЧУМАЧЕНКО

Факультет компьютерной инженерии и управления, кафедра АПВТ, ХНУРЭ

Тема: Основные понятия булевой алгебры

Цель лекции – изучить основные положения теории булевых функций для использования точных методов анализа и синтеза при проектировании компьютерных систем

Содержание:

- Булевы переменные и функции
- Двоичные наборы
- Основные логические операции
- Таблицы истинности
- Законы булевой алгебры
- ДНФ и КНФ
- СДНФ и СКНФ
- Аналогия с алгеброй множеств Кантора

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Литература

- Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 32-61с.
- Савельев А.Я. Прикладная теория цифровых автоматов. М.: Высш. шк., 1987. 272 с.
- Беннеттс Р.Д. Проектирование тестопригодных логических схем: Пер. с англ. М.: Радио и связь. 1990. 176 с.
- Бондаренко М.Ф., Кривуля Г.Ф., Рябцев В.Г., Фрадков С.А., Хаханов В.И. Проектирование и диагностика компьютерных систем и сетей. К.: НМЦ ВО. 2000. 306 с.
- Богомолов А.М., Сперанский Д.В. Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовкого ун-та, 1986. 240с.
- Хаханов В.И. Техническая диагностика элементов и узлов персональных компьюторов. К.: ИСМО, 1997. 308 с.
- Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Дискретна математика”. Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 263-268.

Термины

Базовые понятия:

- множество
- законы (ассоциативный, коммутативный, элиминации, др.),
- бинарные и унарные операции,
- алгебра,
- двоичная система счисления
- изоморфизм
- структура

Ключевые слова:

- булева переменная
- булева функция
- логические операции (дизъюнкция, конъюнкция, инверсия, импликация, сумма по модулю два, эквивалентность)
- дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)
- конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

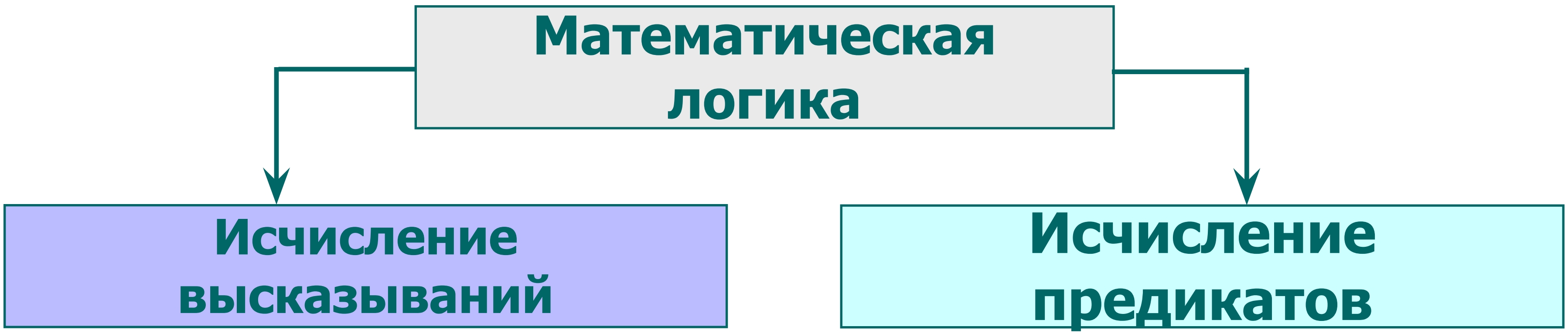
Историческая справка

- Родился в Линкольне
- 1849 – профессор математики Куинс-Колледжа в Корке (Ирландия)
- За работы в области высшего анализа получил Королевскую медаль
- 1854 – основное произведение «Исследование законов мышления»
- Предпринял попытку построить формальную логику в виде некоторого «исчисления», «алгебры»
- В современной алгебре встречаются булевы кольца, булевы алгебры — алгебраические системы, законы которых берут свое начало от исчисления Буля
- В общей топологии – булево пространство
- В математических проблемах управляющих систем − булевы разброс, разложение

Джордж Буль
(XIXв.)

Структура математической логики

- Математическая логика – раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики
- Исчисление высказываний и исчисление предикатов



- Исчисление высказываний – вступительный раздел математической логики, в котором рассматриваются логические операции над высказываниями

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Булевы переменные и булевы функции

- В алгебре логики интересуются лишь истинностным значением высказываний
- Обозначения:

  1 (истина) 0 (ложь)
- Каждой логической операции соответствует функция, принимающая значения 0, 1, аргументы которой также принимают значения 0, 1
- **Def: логическая** (булева) переменная

$$x \in \{0, 1\}$$

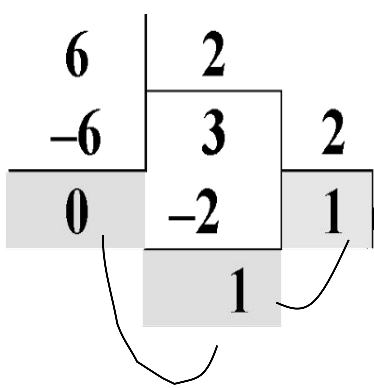
- **Def: логическая** (булева) или функция алгебры логики **(ФАЛ)**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$$

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Двоичные наборы

- Переменные булевой функции образуют наборы из нулей и единиц. Такие наборы называют двоичными
- Сколько двоичных наборов имеет функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных?
- Булева функция от n переменных определена на 2^n двоичных наборах
- Переход от десятичной к двоичной системе счисления:
-



$6)_{10}=(110)_2$

Двоичные наборы для функций от двух и трех переменных

$f(x_1, x_2)$

№ набора	x_1	x_2
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

$f(x_1, x_2, x_3)$

№ набора	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Логические операции

Название	Обозначение	Чтение
Дизъюнкция (логическое сложение)	$\vee$ (+)	ИЛИ
Конъюнкция (логическое умножение)	$\wedge$ (&, •)	И
Инверсия (отрицание)	– (¬)	НЕ
Импликация	$\rightarrow$	ВЛЕЧЕТ
Эквивалентность	~	эквивалентно
Сумма по модулю 2 (исключающее ИЛИ)	$\oplus$	сумма по модулю 2

Определение логических операций. Таблицы истинности

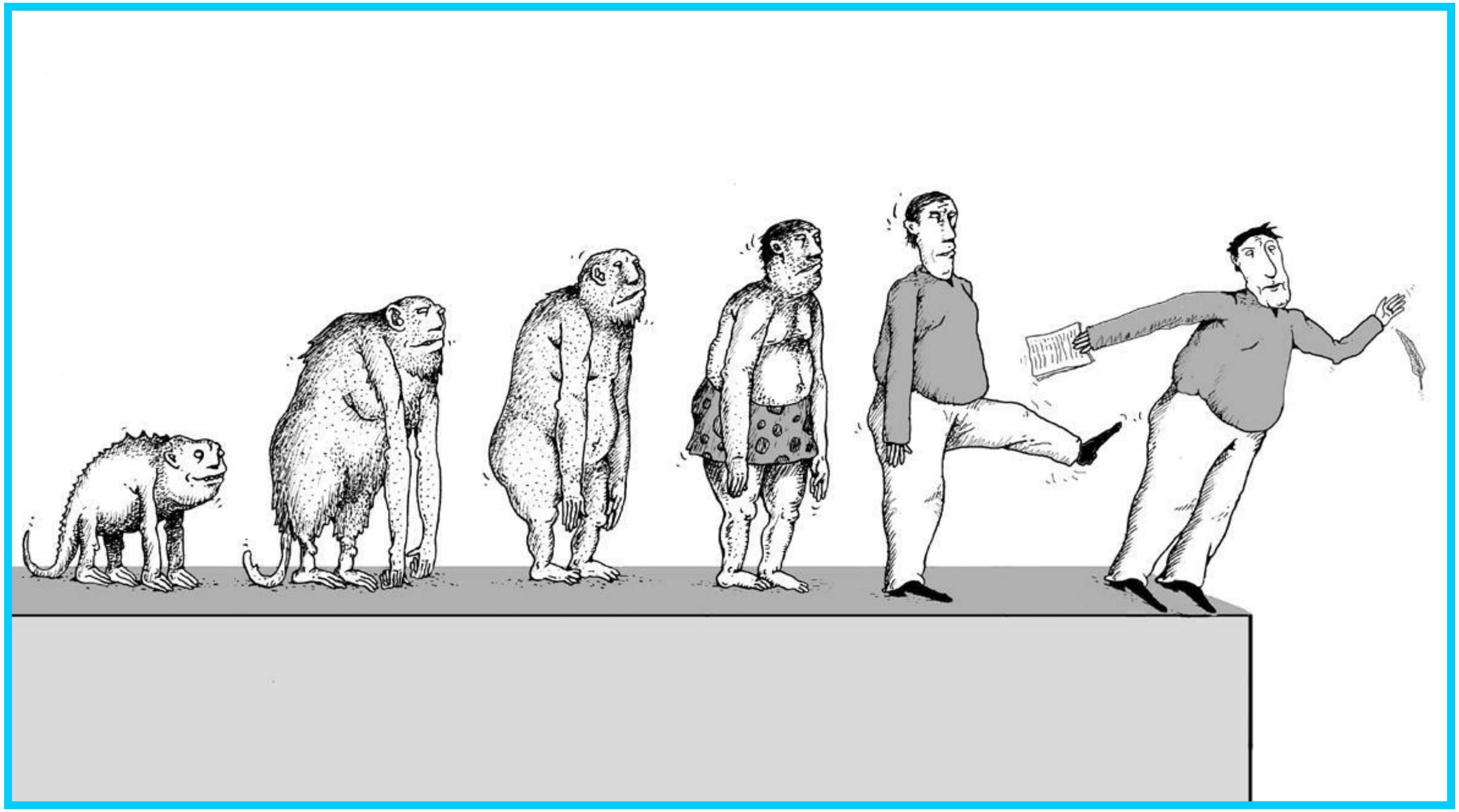
- Логические операции – логические функции
- Таблицы истинности

№ набора	x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$\overline{x}$	$x \oplus y$	$x \sim y$
0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0
3	1	1	1	1	1	0	0	1

Пример

№ набора	x	y	z	$x \wedge y$	$\overline{z}$	$h(x,y,z)= (x \wedge y) \sim \overline{z}$
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0

Time-Out



Законы и тождества алгебры логики. 1

Название	Формула
Коммутативность	$x \vee y = y \vee x,\ xy = yx$
Ассоциативность	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),\ (xy)z = x(yz)$
Дистрибутивность	$(x \vee y)z = xz \vee yz,$ $xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$
Идемпотентность	$x \wedge x = x,\ x \vee x = x$
Действия с константами	$x \vee 0 = x,\ x \wedge 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \wedge 1 = x,$ $x \vee \overline{x} = 1,\ x \wedge \overline{x} = 0$
Инволюция	$\overline{\overline{x}} = x$

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Законы и тождества алгебры логики

Название	Формула
Закон де Моргана	$\overline{x \vee y}=\bar{x}\,\bar{y}$, $\overline{xy}=\bar{x} \vee \bar{y}$
Элиминация	$(x \vee y)x=x$, $xy \vee x=x$
Склеивание	$(x \vee y)(x \vee \bar{y})=x$, $xy \vee \bar{x}y=x$
Законы Блэйка-Порецкого	$x(\bar{x} \vee y)=xy$, $x \vee \bar{x}y=x \vee y$

- Связь эквивалентности ~ с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием:

$$x \sim y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$$

- Связь импликации с отрицанием и дизъюнкцией:

$$x \to y = \bar{x} \vee y$$

Доказательство дистрибутивного закона при помощи таблиц истинности: $xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$

№ набора	x	y	z	$x \wedge y$	$xy \vee z$	$x \vee z$	$y \vee z$	$(x \vee z)(y \vee z)$
0	0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
2	0	1	0	0	**0**	0	1	**0**
3	0	1	1	0	**1**	1	1	**1**
4	1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
5	1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
6	1	1	0	1	**1**	1	1	**1**
7	1	1	1	1	**1** LHS	1	1	**1** RHS

- Таким образом, показано: LHS=RHS

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

ДНФ и КНФ

Термин	Обозначение	Пример
Первичный терм	$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1, \\ \overline{x}_i, & \sigma_i = 0. \end{cases}$	$x_1, \overline{x}_1$
Двоичный набор	$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$	$(0,1,1,0,1)$
Элементарная конъюнкция (ЭК)	$x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n^{\sigma_n} \equiv \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$
ДНФ	$\bigvee (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i})$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2$
Элементарная дизъюнкция (ЭД)	$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \equiv \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}$	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$
КНФ	$\&(\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i})$	$(\overline{x}_1 \vee x_2 \overline{\vee} x_3)(x_1 \overline{\vee} x_2)$

Совершенные ДНФ и КНФ (СДНФ и СКНФ). 1

- **Def: Совершенной ДНФ (СДНФ)** называется ДНФ, в которой нет равных элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции содержат одни и те же переменные, причем каждую – только один раз (включая вхождения под знаком отрицания).
- **Def: Совершенная КНФ (СКНФ)** определяется как такая КНФ, в которой нет одинаковых сомножителей; все сомножители содержат одни и те же переменные, причем каждую переменную – только один раз.

Пример получения СДНФ и СКНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	**1**	1	0	0	**0**
0	0	1	**0**	1	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	1	0	**0**
0	1	1	**0**	1	1	1	**1**

$$f_{СДНФ}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$f_{СКНФ}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$$

Теорема Шеннона

- Любая булева функция **f≠0** представима в виде разложения Шеннона:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\forall(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} (\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i^{\sigma_i}) \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

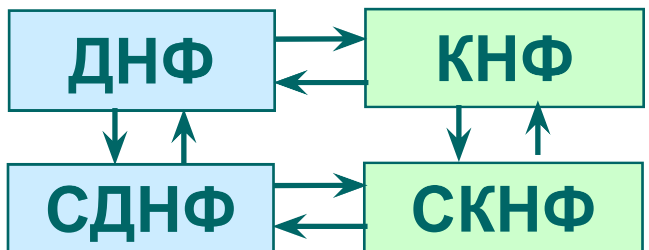
- **Следствие**

Предельное разложение Шеннона (**k=n**) булевой функции **f≠0** имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} (\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i^{\sigma_i})$$

Выводы

- Всякая ФАЛ может быть реализована формулой, оперирующей символами $\vee$, $\wedge$, $\neg$, скобками и знаком равенства
- Любая булева функция может быть представлена в виде ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ



- ДНФ и КНФ есть сокращенная форма записи СДНФ и СКНФ (таблицы истинности)
- ДНФ есть наиболее распространенная форма описания цифровых систем, максимально приближенная к аппаратурной реализации

Тест-задание

- Заполнить таблицу истинности для пяти функций:

№ набора	x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$	$x \wedge z$	$y \wedge z$	$xz \vee yz$
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua

Аналогия с алгеброй множеств Кантора

Теория множеств	Булева алгебра
Множество элементов M	Элемент $X \in \{0,1\}$
Операция пересечение ⊠	Операция И ($\wedge$ – конъюнкция)
Операция объединение ⊠	Операция ИЛИ ($\vee$ – дизъюнкция)
Операция дополнение –	Операция инверсия –
Пустое множество $\varnothing$	0-элемент
Универсум – множество всех элементов U	1-элемент

ХНУРЭ, факультет КИУ, кафедра АПВТ,
тел. 7021 326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua