



Оценка стоимости опционов

Биномиальная модель оценки
стоимости опционов

Модель Блэка-Шоулза



Биномиальная модель оценки стоимости опционов

- Для оценки стоимости опциона «колл» или «пут» можно использовать биномиальную модель оценки стоимости опциона (BOPM). Лучше всего представить ее на примере **европейского опциона** (*European option*), т.е. опциона, который может быть исполнен только в день его истечения.
- В этом случае мы предполагаем, что по базисной акции не выплачиваются дивиденды в течение срока действия опциона. Модель также можно модифицировать для оценки стоимости **американского опциона** (*American option*), т.е. опциона, который можно исполнить в любое время в течение срока действия опциона. Модель также можно использовать для оценки стоимости опционов на акции, по которым выплачиваются дивиденды в течение срока опционного контракта.
- Предположим, что цена акции компании *Альфа* сегодня ($t = 0$) равна 100 руб., а через год ($t = T$) эта акция будет стоить 125 руб. или 80 руб., т.е. цена акции за год или поднимется на 25%, или упадет на 20%. Кроме того, непрерывно начисляемая ставка без риска в расчете на год равна 8%. Предполагается, что инвесторы могут предоставлять кредит (покупая 8%-ные облигации) и занимать средства (осуществляя продажи облигаций) под данный процент.



- Рассмотрим опцион «колл» на акции компании *Альфа* с ценой исполнения 100 руб. и датой истечения через год. Это означает, что на дату истечения стоимость опциона «колл» составит или 25 руб. (если акция *Альфа* стоит 125 руб.), или 0 руб. (если акция *Альфа* стоит 80 руб.).
- На рис. 2 данная ситуация представлена с помощью «дерева цены», которое позволяет понять, почему модель называется биномиальной, поскольку оно имеет только две «ветви», которые показывают цены на дату истечения.

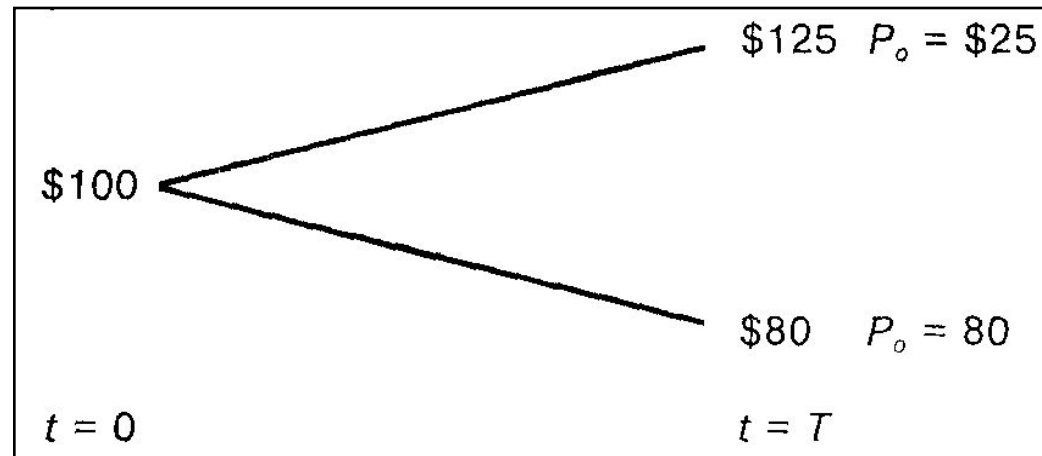


Рис. 2 - Биномиальная модель оценки стоимости акций компании *Альфа*



- Если надо узнать, чему равна внутренняя (действительная) стоимость опциона в момент времени 0, то для ответа на этот вопрос используется биномиальная модель оценки стоимости опциона.
- Мы располагаем тремя возможностями делать инвестиции: 1) вложить средства в акцию, 2) опцион и 3) облигацию без риска. Цены и результаты операции с акцией известны. Также известно, что 100 руб. инвестируются в безрисковую облигацию, стоимость которой вырастет приблизительно до 108,33 руб. с учетом непрерывно начисляемого процента (по формуле сложных процентов), равного 8% годовых.
- Наконец, известны результаты опционной операции в конце периода. Требуется определить цену продажи опциона в настоящий момент. Возможны два варианта развития ситуации в будущем: курс акции может пойти вверх или вниз. Для краткости назовем эти два состояния соответственно «верхнее положение» и «нижнее положение». Основные данные приводятся ниже.

Ценная бумага	Выплаты в «верхнем положении»	Выплаты в «нижнем положении»	Текущий курс
Акция	125	80	100
Облигация	108,33	108,33	100
Опцион «КОЛЛ»	25	0	?



- В нашей ситуации текущий курс опциона «колл» не известен. Несмотря на то, что опцион «колл» на акции компании *Альфа* может показаться несколько необычным инструментом, его характеристики можно воспроизвести за счет комбинации акций компании *Альфа* и безрисковых облигаций. Стоимость воспроизведенного портфеля составляет действительную стоимость опциона.
- Сначала необходимо определить состав портфеля, который точно повторит выплаты по опциону «колл» на акции компании *Альфа*. Рассмотрим портфель из N_s акций компании *Альфа* и N_b безрисковых облигаций.
- В «верхнем положении» такой портфель принесет выплаты в размере $125 N_s + 108,33 N_b$, в «нижнем положении» выплаты составят $80 N_s + 108,33 N_b$. В «верхнем положении» опцион стоит 25 руб. Таким образом, N_s и N_b должны иметь такую стоимость, чтобы:

$$125 N_s + 108,33 N_b = 25$$

- С другой стороны, в «нижнем положении» опцион ничего не стоит. Таким образом, N_s и N_b должны иметь такую стоимость, чтобы:

$$80 N_s + 108,33 N_b = 0$$



- В приведенных линейных уравнениях имеются два неизвестных и они могут быть легко определены вычитанием второго уравнения из первого:

$$(125 - 80) N_s = 25$$

откуда $N_s = 0,5556$, $N_b = - 0,4103$.

- Это значит, что инвестор может воспроизвести платежи по опциону «колл», осуществив *продажу* безрисковой облигации за 41,03 руб. и *купив* 0,5556 акций компании *Альфа*. Что это действительно так, можно увидеть из нижеследующего:

Состав портфеля	Выплата в «верхнем положении»	Выплата в «нижнем положении»
Инвестиции в акции	$0,5556 \times 125 = 69,45$	$0,5556 \times 80 = 44,45$
Выплата займа	$-41,03 \times 1,0833 = -44,45$	$-41,03 \times 1,0833 = -44,45$
Чистая выплата	25	0



- Так как воспроизведенный портфель обеспечивает те же выплаты, что и опцион «колл», то для определения действительной стоимости опциона необходимо определить его стоимость.
- Чтобы сформировать портфель, надо затратить 55,56 руб. на покупку 0,5556 акций компании *Альфа* (по цене 100 руб. за акцию). Кроме того, 41,03 руб. получается от продажи облигации.
- Таким образом, требуется только 14,53 руб. (55,56 руб.- 41,03 руб.) собственных средств инвестора. Следовательно, это и есть действительная стоимость опциона «колл».
- В общем виде, стоимость опциона «колл» будет равна:

$$V_o = N_s P_s + N_b P_b,$$

- где V_o — стоимость опциона,
- P_s — цена акции,
- P_b — цена безрисковой облигации,
- N_s и N_b - число акций и безрисковых облигаций, позволяющих воспроизвести выплаты по опциону.



- Теперь рассмотрим то влияние, которое окажет на стоимость воспроизведенного портфеля изменение курса акций, например, завтра (а не через год).
- Так как в портфель входит 0,5556 акций, то стоимость портфеля изменится на 0,5556 руб. при изменении курса акций *Альфа* на 1 руб. Но так как опцион «колл» и портфель должны продаваться по одной цене, то цена опциона «колл» также должна измениться на 0,5556 руб. при изменении курса акции на 1 руб.
- Данная взаимосвязь называется коэффициентом хеджирования (*hedge ratio*) опциона. Для опциона «колл» на акции компании *Альфа* коэффициент хеджирования составлял 0,5556, что равно $(25 \text{ руб.} - 0 \text{ руб.}) / (125 \text{ руб.} - 80 \text{ руб.})$. Обратите внимание на то, что числитель равен разности между выплатами по опциону в «верхнем» и «нижнем» положениях, а знаменатель - разности между выплатами по акции в этих двух положениях. В общем виде в биномиальной модели:

$$h = \frac{P_{ou} - P_{od}}{P_{su} - P_{sd}}$$

где P — это цена в конце периода, а индексы обозначают инструмент (о — опцион, s — акция) и положение (u — «верхнее», d — «нижнее»).



- Чтобы воспроизвести опцион «колл» в условиях биномиальной модели, необходимо купить h акций. Одновременно необходимо получить под ставку без риска средства путем продажи облигации. Эта сумма равна:

$$B = PV(hP_{sd} - P_{od}),$$

- где PV — дисконтированная стоимость суммы, указанной в скобках.
- В итоге стоимость опциона «колл» равна:

$$V_o = hP_s - B$$

- где h - это коэффициент хеджирования, а B - текущая стоимость облигации в портфеле, который воспроизводит выплаты по опциону «колл».

Модель Блэка-Шоулза

- Рассмотрим, что произойдет с моделью *ВОРМ* оценки стоимости опциона, если число периодов до даты истечения возрастет. Например, для опциона на акции компании *Альфа* с истечением через год можно построить «дерево цены» с числом периодов, равным числу торговых дней в году, которых насчитывается приблизительно 250.
- Таким образом, в конце года для акций *Альфа* будет существовать 251 возможная цена. Действительная цена любого опциона «колл» для такого «дерева» быстро определяется компьютером по такому же принципу, как было показано выше для акций компании *Альфа*. Если число периодов еще более увеличить, считая каждый час торгового дня, тогда они будут насчитывать порядка 1750 (7×250) часовых периодов (что соответствует 1751 возможной цене в конце года).
- Число периодов в году возрастает при уменьшении продолжительности каждого периода. Максимально возможным будет бесчисленное количество бесконечно малых периодов (и соответственно бесконечное число возможных курсов в конце года). В таком случае модель *ВОРМ* превращается в модель Блэка-Шоулза, названную так в честь ее авторов.

- В условиях отсутствия налогов и транзакционных издержек стоимость опциона «колл» можно оценить, воспользовавшись данной моделью. Она используется в ситуации, когда рыночная цена опциона серьезно отличается от его действительной цены. Опцион, который продается по существенно более низкой цене, является кандидатом на покупку, и наоборот, - тот, который продается по значительно более высокой цене, - кандидат на продажу. Формула Блэка-Шоулза для оценки действительной стоимости опциона V_c имеет следующий вид:

$$V_c = N(d_1)P_s - \frac{E}{e^{RT}}N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(P_s/E) + (R + 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} =$$

$$d_2 = \frac{\ln(P_s/E) + (R - 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- P_s - текущая рыночная цена базисного актива,
- E - цена исполнения опциона,
- R - непрерывно начисляемая ставка без риска в расчете на год,
- T - время до истечения, представленное в долях в расчете на год,
- σ - риск базисной обыкновенной акции, измеренный стандартным отклонением доходности акции, представленной как непрерывно начисляемый процент в расчете на год.

Обратите внимание на то, что E/e^{RT} — это дисконтированная стоимость цены исполнения на базе непрерывно начисляемого процента. Величина $\ln(P_s/E)$ - это натуральный логарифм P_s/E . Наконец, $N(d1)$ и $N(d2)$ обозначают вероятности того, что при нормальном распределении со средней, равной 0, и стандартным отклонением, равным 1, результат будет соответственно меньше $d1$ и $d2$.

Для определения стоимости опциона «колл» с использованием формулы Блэка-Шоулза нужна таблица величин $N(d)$. Следует обратить внимание на то, что в данной формуле ставка процента R и стандартное отклонение актива σ предполагаются постоянными величинами на протяжении всего времени действия опциона.



- Рассмотрим опцион «колл», который истекает через три месяца и имеет цену исполнения 40 руб. (таким образом, $T= 0,25$ и $E= 40$). Кроме того, текущий курс и риск базисной обыкновенной акции составляют соответственно 36 руб. и 50%, а ставка без риска равна 5% (таким образом, $P_s = 36$, $R= 0,05$ и $\sigma= 0,50$).
- Решение уравнений дает следующие значения $d1$ и $d2$:

$$d_1 = \frac{\ln(36/40) + [0,05 + 0,5(0,50)^2] 0,25}{0,5\sqrt{0,25}} = -0,25$$

$$d_2 = -0,25 - 0,5\sqrt{0,25} = -0,5$$

- Воспользуемся табличными значениями $N(d1) = 0,4013$ и $N(d2) = 0,3085$. Определим действительную стоимость опциона «колл»:

$$V_c = (0,4013 \cdot 36) - \left(\frac{40}{e^{0,05 \times 0,25} \times 0,3085} \right) = 14,45 - 12,19 = 2,26$$

- Если в настоящий момент этот опцион продается за 5 руб., то инвестору следует подумать, не выписать ли несколько опционов, так как они переоценены (согласно модели Блэка-Шоулза).



- Также можно предположить, что в ближайшем будущем их цена упадет. Таким образом, продавец получит премию 5 руб. и сможет рассчитывать на покупку по более низкой цене, что принесет ему доход от разницы цен. Напротив, если опцион «колл» продается за 1 руб., то инвестору следует купить его. Так как он недооценен, то можно ожидать роста его стоимости в будущем.

- Тщательный анализ формулы Блэка-Шоулза позволяет обнаружить некоторые интересные особенности ценообразования для европейского опциона «колл». Можно показать, что произойдет с действительной ценой опциона «колл» при изменении одной из переменных, когда остальные четыре сохраняют свои значения.
- 1. Чем выше цена базисной акции P_s , тем больше стоимость опциона «колл».
- 2. Чем выше цена исполнения E , тем меньше стоимость опциона «колл».
- 3. Чем больше времени до даты истечения T , тем больше стоимость опциона «колл».
- 4. Чем выше ставка без риска R , тем больше стоимость опциона «колл».
- 5. Чем больше риск обыкновенной акции, тем больше стоимость опциона «колл».