12. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

12.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке *[a,b]* задана неотрицательная функция *y=f(x)*.

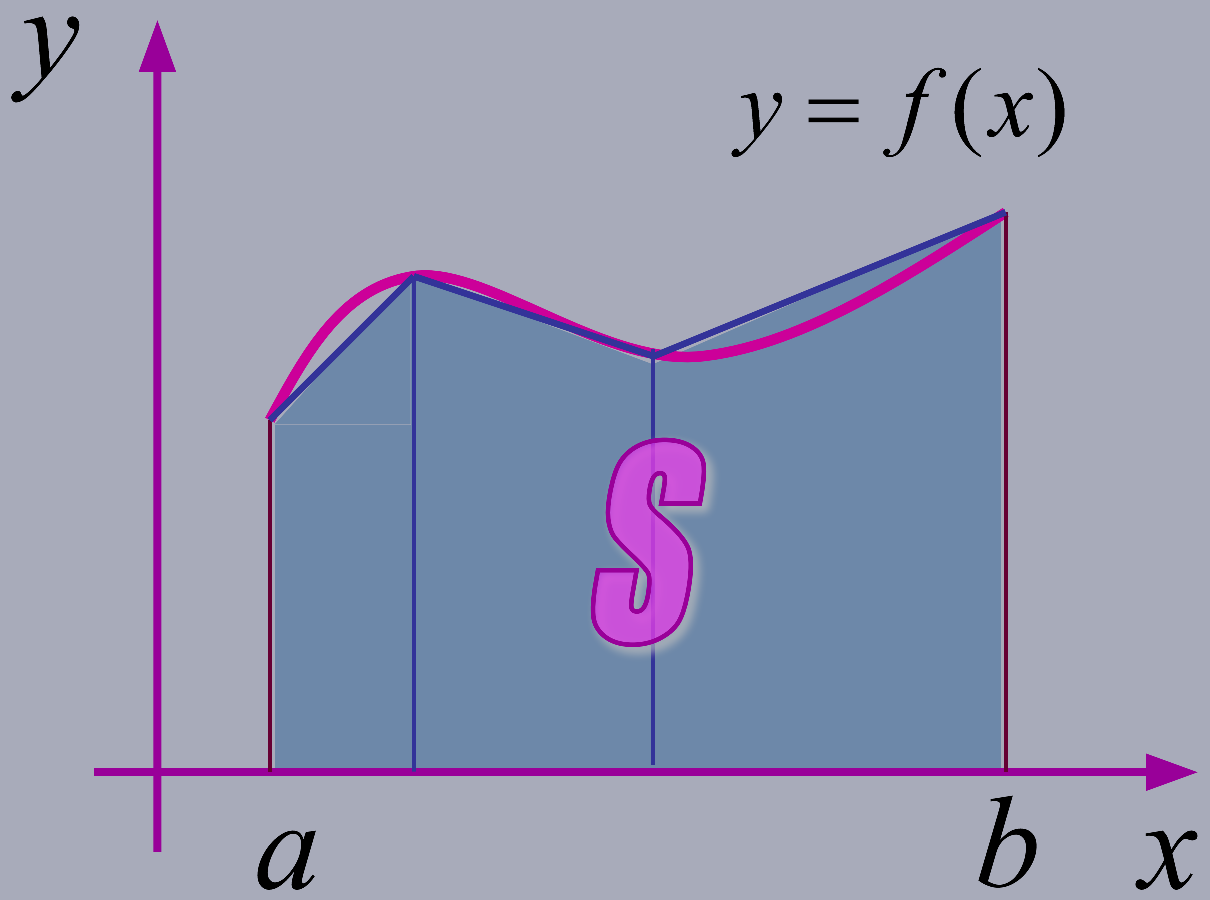
Требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* и осью абсцисс *y=0*.

Рассмотрим ломаную, расположенную достаточно близко к кривой.

Фигура под ломаной состоит из трапеций и ее площадь равна сумме площадей всех трапеций:

$$S = \sum S_{трап}$$

Причем, площадь под кривой будет приближенно равна площади под ломаной, если ломаная достаточно близко подходит к кривой.


y
y = f(x)
S
a
b
x

За искомую площадь под кривой берут предел площади под ломаной при условии, что ломаная неограниченно приближается к кривой.

Разобьем отрезок *[a,b]* на n элементарных отрезков точками x_0, x_1, …x_n .

На каждом из отрезков выберем точку ξ_i , и найдем значение функции в этой точке

$$f(\xi_i)$$

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

называют интегральной суммой

для функции y=f(x) на отрезке [a,b] .

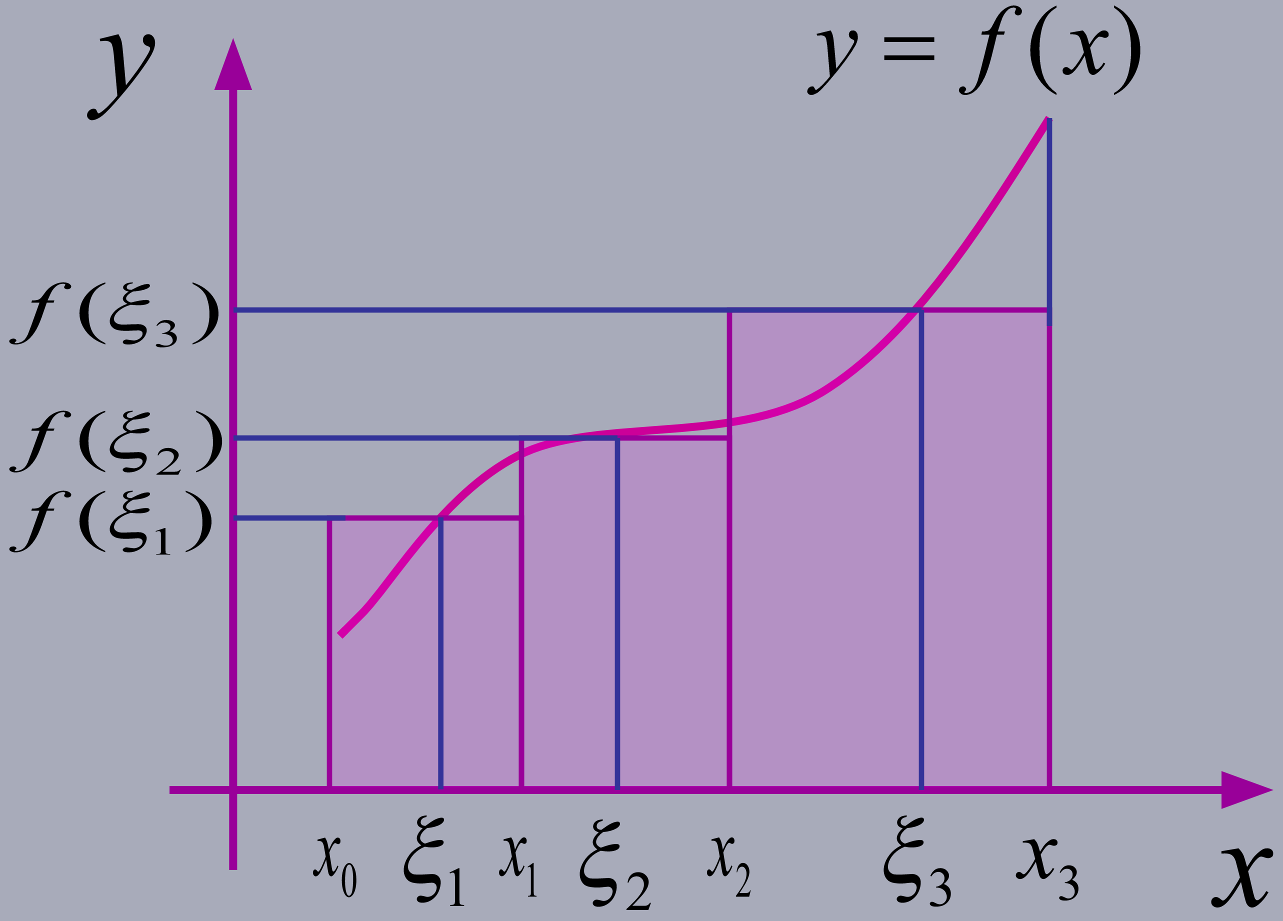
Интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек ξ_i

Каждое отдельное слагаемое в интегральной сумме

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

равно площади S_i прямоугольника со сторонами

$$f(\xi_i) \quad \text{и} \quad \Delta x_i$$



y
y = f(x)
f(ξ3)
f(ξ2)
f(ξ1)
x0
ξ1
x1
ξ2
x2
ξ3
x3
x

Наибольший из отрезков разбиения

$$\left[x_{i-1}, x_i\right]$$

обозначим как

$$\max \Delta x_i$$

Вся интегральная сумма будет равна

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$ ***не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек*** ξ_i***, то он называется <u>определенным интегралом</u> от функции y=f(x) на отрезке [a,b].***

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

Числа a и b называются нижним и верхним пределом, соответственно.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

есть семейство функций, а определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

есть определенное число.

По определению предполагается, что *a* < *b*.

Положим

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

С учетом этого несущественно, какой предел больше или меньше.

Если $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$$

$$2\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$