

КИНЕМАТИКА



Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел без учета действия сил, вызывающих это движение.

Цель кинематики - определение траекторий, скоростей, ускорений и других кинематических характеристик движения.

Движением называется изменение положения одних тел по отношению к другим телам.

Тело, по отношению к которому рассматривается движение, называется **телом отсчета**.

Тело отсчета и жестко связанная с ним система координат называются **системой отсчета**.

По виду движущихся объектов кинематика подразделяется на кинематику точки и кинематику твердого тела.

Точкой считается тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

КИНЕМАТИКА

ТОЧКИ

План

- Способы задания движения точки
- Определение скорости и ускорения при векторном способе задания движения
- Определение скорости и ускорения при координатном способе
- Определение скорости и ускорения при естественном способе задания движения

Задачей кинематики точки является определение кинематических характеристик движения точки – траекторий, скоростей и ускорений.

Для этого движение точки должно быть задано.

2.1.1 Способы задания движения точки

Рассмотрим три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

- При **векторном способе** должна быть известна зависимость радиус-вектора точки от времени (рис.2.1,а)

$$\overset{\vee}{r} = \overset{\vee}{r}(t) \quad (2.1)$$

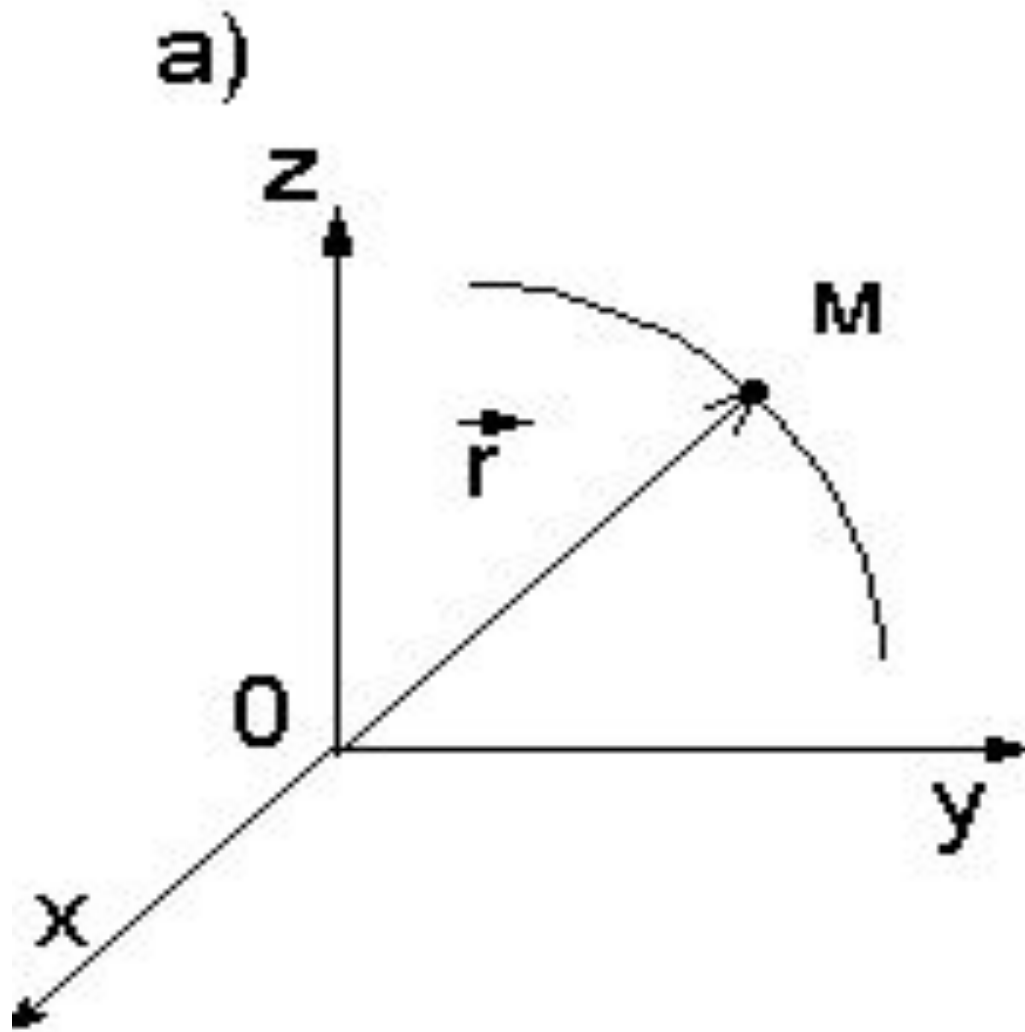


Рис.2.1.а – Векторный способ задания движения точки

- При **координатном способе** задаются зависимости координат точки (рис.2.1,б) от времени:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t), \\y &= f_2(t), \\z &= f_3(t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Данные уравнения позволяют в любой момент времени найти положение точки.

Если точка движется в плоскости, то для задания ее движения достаточно двух уравнений, а если по прямой - то одного.

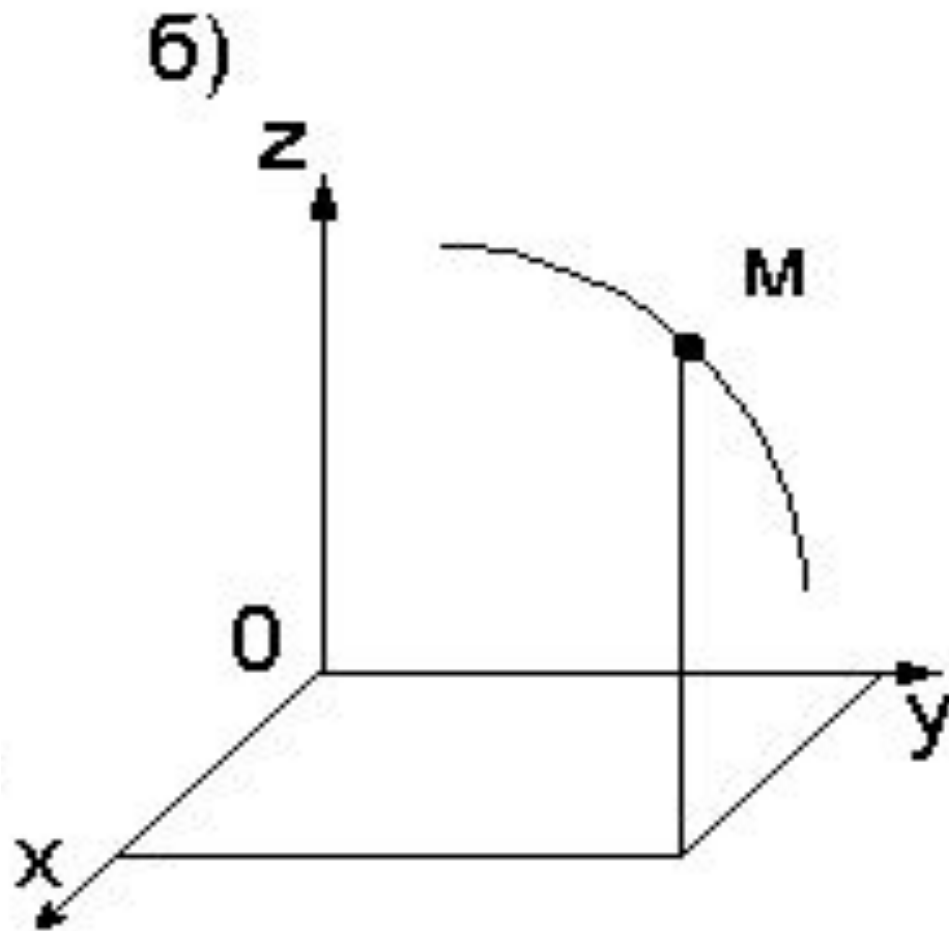


Рис.2.1.б – Координатный способ задания движения точки

Уравнения (2.2) являются уравнениями траектории точки в **параметрической форме**.

Для получения уравнения траектории в **координатной форме** надо из этих уравнений исключить время.

Пример 1.

Движение точки задано уравнениями: $x=2t$,
 $y=t^2$. Найти уравнение траектории.

Решение.

Из первого уравнения:

$$t=x/2,$$

подставляя во второе, получим:

$$y=x^2/4;$$

поскольку x и y положительны, то траекторией будет правая ветвь параболы.

При **естественном способе** задания движения (рис.2.1,в)

задается траектория, начало отсчета и направление, а также закон движения по траектории:

$$S = f(t) \quad (2.3)$$

Величина S отсчитывается от начала отсчета и в общем случае не равна пройденному пути.

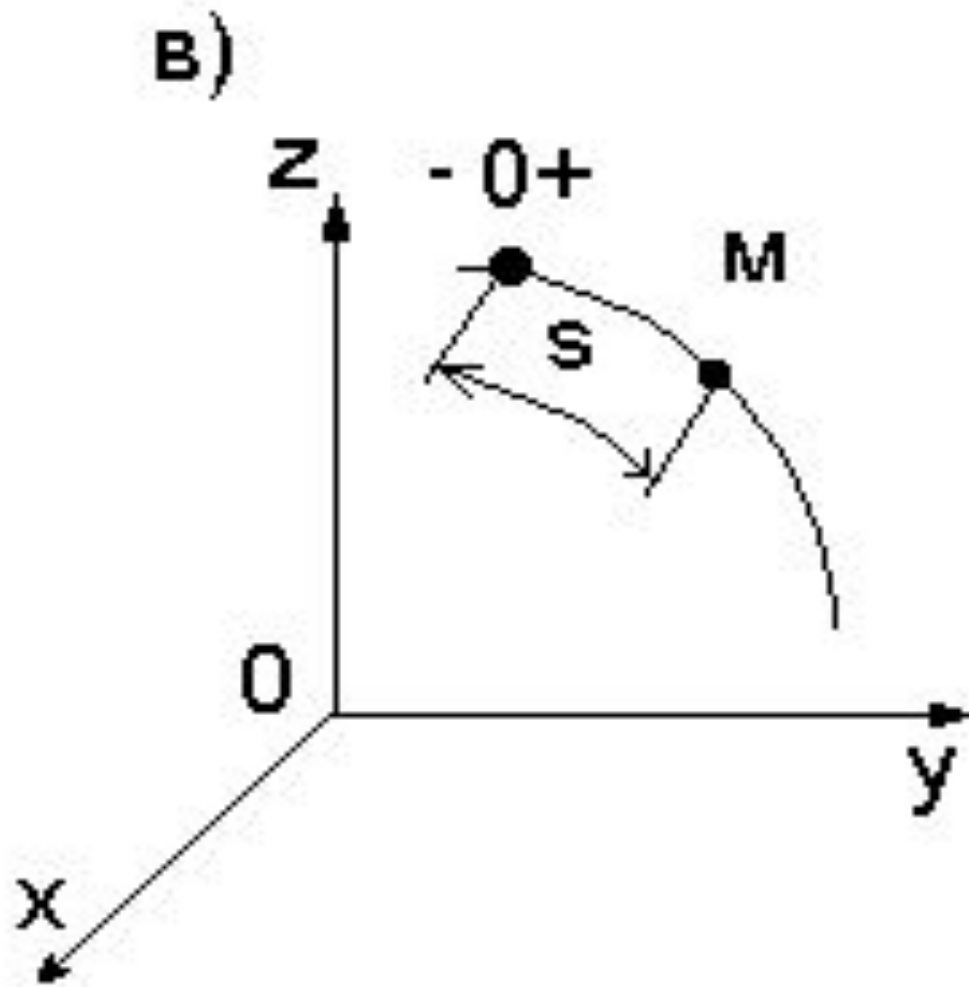


Рис.2.1.в – Естественный способ задания движения точки

Векторный способ

Вектор скорости

Одной из важнейших кинематических характеристик движения является **скорость**, она характеризует быстроту перемещения точки.

Пусть точка M в момент времени t_0 занимала положение M_0 , задаваемое вектором \vec{r}_0 , а в момент t_1 займет положение M_1 , задаваемое радиус-вектором - \vec{r}_1 , (рис.2.2,а).

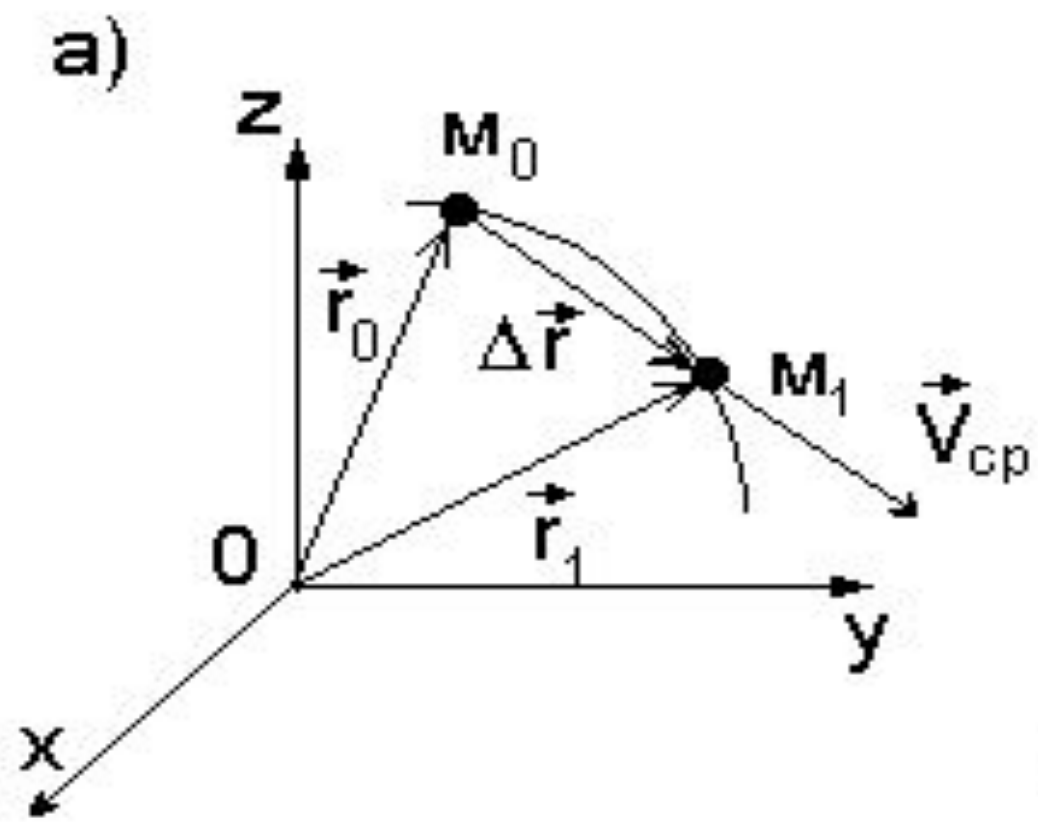


Рис. 2.2. Вектор скорости

За время $t_1 - t_0$ радиус-вектор изменится на величину $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Вектор $\Delta \vec{r}$ называется **вектором перемещения**.

Средней скоростью точки называется отношение вектора перемещения к промежутку времени

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Средняя скорость направлена в ту же сторону, что и вектор перемещения.

Мгновенной скоростью называется предел, к которому стремится средняя скорость, если промежуток времени стремится к нулю

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

то есть мгновенная скорость равна производной по времени от радиус-вектора точки.

Поскольку в пределе при уменьшении Δt вектор $\Delta \vec{r}$ стремится к касательной, то и мгновенная скорость направлена по касательной к траектории в данной точке.

Единица измерения скорости в системе СИ - м/с, 1 м/с=3,6 км/час.

Вектор ускорения

Ускорение характеризует изменение скорости.

Пусть в момент времени t_0 точка имеет скорость \vec{V}_0 а в момент t_1 - скорость \vec{V}_1 (рис.2.2,б). За время $t_1 - t_0$ вектор скорости получил приращение

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_0 .$$

Вектором среднего ускорения называется отношение приращения скорости к промежутку времени

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

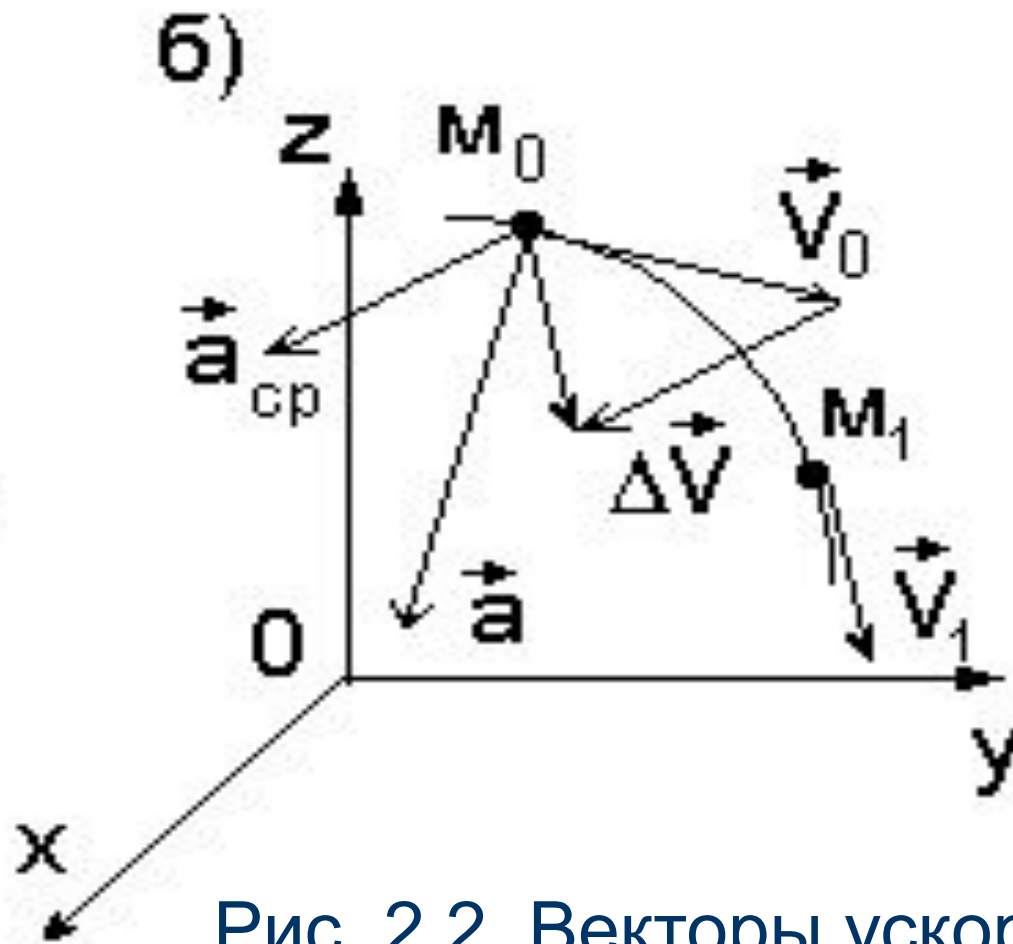


Рис. 2.2. Векторы ускорения

Вектор среднего ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор приращения скорости.

Мгновенным ускорением

называется предел, к которому стремится среднее ускорение, если промежуток времени стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2.7)$$

то есть **вектор мгновенного ускорения** равен производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора точки.

Вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории.

Единица измерения ускорения – м/с².

Определение скорости и ускорения при координатном способе задания движения

Введем единичные орты осей координат - $\overset{\curvearrowright}{i}, \overset{\curvearrowright}{j}, \overset{\curvearrowright}{k}$
(рис.2.3), разложим радиус-вектор точки и вектор
ее скорости по осям координат:

$$\overset{\curvearrowright}{r} = x\overset{\curvearrowright}{i} + y\overset{\curvearrowright}{j} + z\overset{\curvearrowright}{k} \quad (\text{a})$$

$$\overset{\curvearrowright}{V} = V_x\overset{\curvearrowright}{i} + V_y\overset{\curvearrowright}{j} + V_z\overset{\curvearrowright}{k} \quad (\text{б})$$

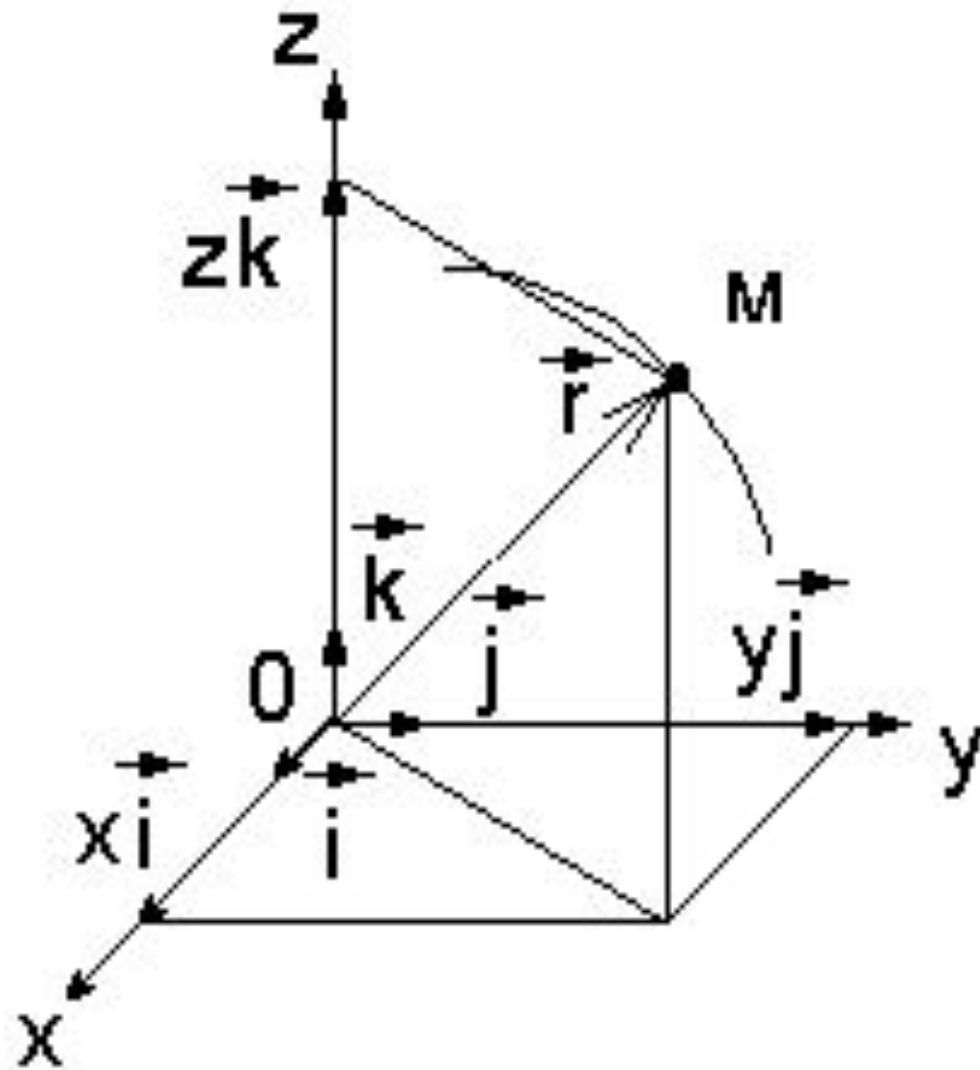


Рис. 2.3. Разложение вектора перемещения по осям координат

Продифференцировав (а) по времени и учитывая, что производные от векторов i, j, k равны нулю, получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \quad (B)$$

Левые части выражений (б) и (в) равны, поэтому, получим выражения для проекций скорости на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.8)$$

Модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (2.9)$$

Аналогично можно получить формулы для определения проекций на оси координат и модуля ускорения:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (2.10)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.11)$$

Пример 2 .

По уравнениям, приведенным в примере 1
(Движение точки задано уравнениями: $x=2t$, $y=t^2$)
найти скорость и ускорения в момент времени 1 с.

Решение.

Вначале построим траекторию и найдем
положение точки в данный момент (рис.2.4).

При $t = 1$ с координаты точки M равны:

$$x=2, y=1 .$$

Вычислим проекции скорости:

$$V_x=2, V_y=2t$$

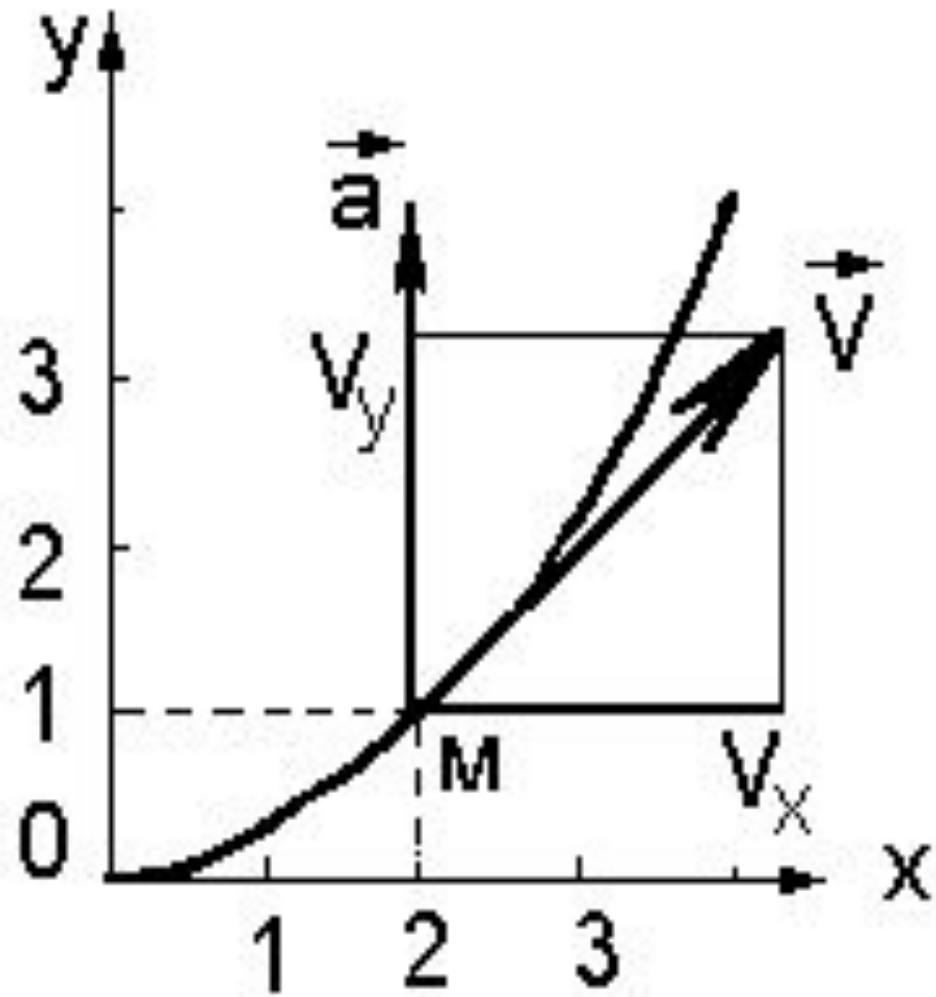


Рис. 2.4. Рисунок к примеру

Модуль скорости:

$$V = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{2} \approx 2,8 \text{ м/с}$$

Откладывая из точки M в масштабе по осям X и Y значения $V_x=2$, $V_y=2t=2$, строим прямоугольник, в котором вектор скорости будет диагональю (рис.2.4).

Продифференцировав уравнения движения второй раз, найдем значения проекций вектора ускорения на оси координат:

$$a_x=0, a_y=2.$$

Следовательно модуль ускорения:

$$a=2 \text{ м/с}^2,$$

а вектор ускорения направлен параллельно оси OY .

Определение скорости и ускорения при естественном способе задания движения

При данном способе скорость и ускорение находятся через проекции на так называемые естественные оси координат (оси Эйлера), которые имеют начало в данной точке на траектории и направлены:

ось t - касательная - по касательной в положительном направлении,

ось n - нормаль - по главной нормали,

ось b - бинормаль - перпендикулярна осям t и n и образует с ними правую тройку (рис.2.5).

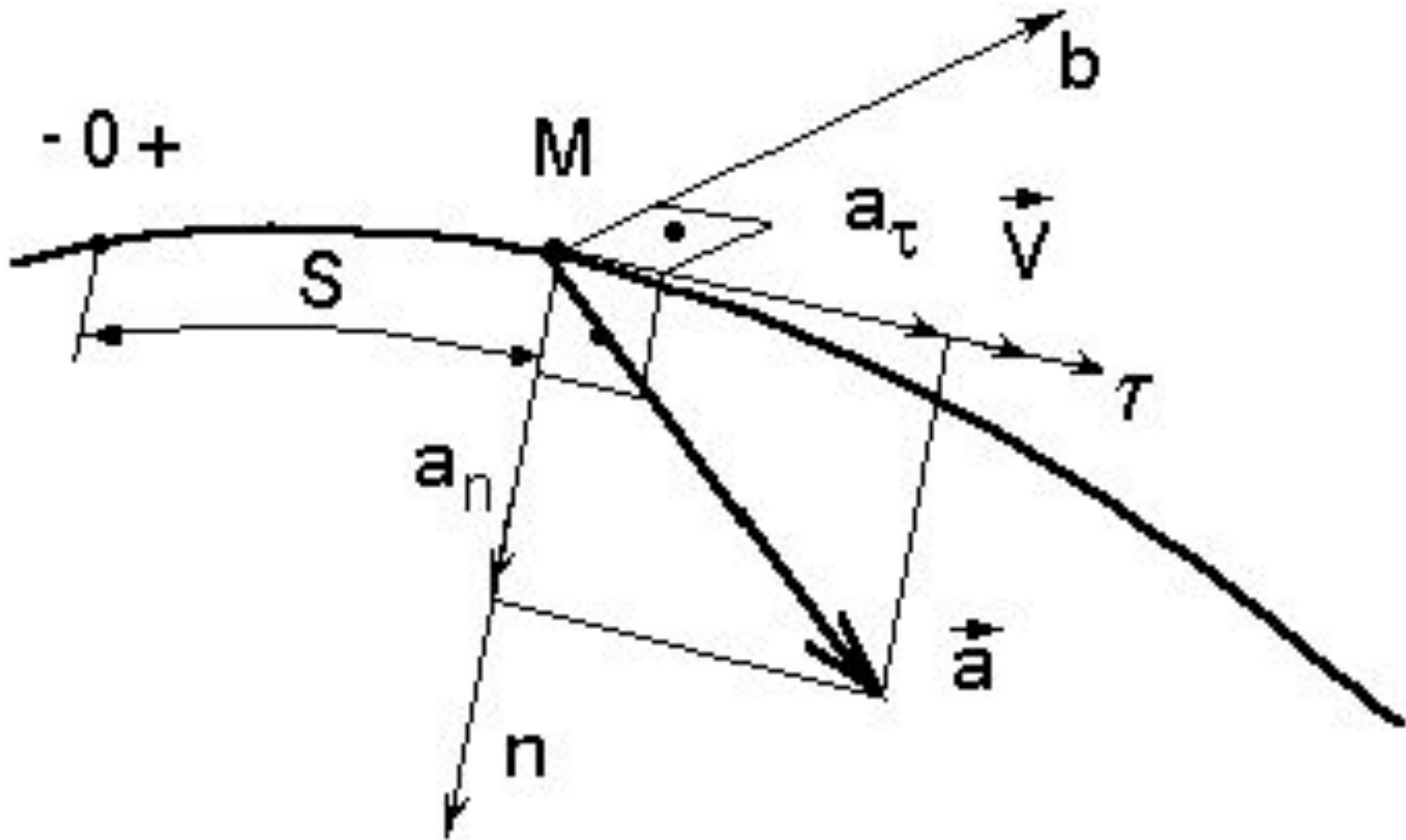


Рис. 2.5. Естественные оси координат

Проекция скорости на ось τ :

$$V_{\tau} = \frac{ds}{dt} \quad (2.12)$$

то есть равна производной по времени от закона движения точки по траектории.

Модуль скорости равен модулю ее проекции на касательную ось

$$|\vec{V}| = |V_{\tau}|$$

Направление вектора скорости совпадает с касательной, если величина V_{τ} положительна, и противоположно касательной – если отрицательна.

Проекция ускорения на ось τ называется **касательным ускорением** и определяется по формуле

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2.13)$$

Проекция ускорения на нормаль называется **нормальным ускорением** и определяется из выражения

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \quad (2.14)$$

где, ρ - радиус кривизны траектории в данной точке.

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} \quad (2.15)$$

Пример 3.

По условию предыдущего примера
(Движение точки задано уравнениями: $x=2t$, $y=t^2$)
найти касательное и нормальное ускорение
точки, а также радиус кривизны траектории.

Решение.

Поскольку $a_\tau = dV / dt$, а $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$,

то, взяв производную от корня, получим
выражение

$$a_\tau = d(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}) / dt = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

Подставляя значения, получим:

$$a_{\tau} = 1,41 \text{ м/с}^2.$$

Затем из формулы (2.15) находим:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{4 - 2} = 1,41$$

а из формулы (2.14) $\rho = V^2/a_n = 5,6 \text{ м}$.