



«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Методы параметрического  
спектрального анализа.*

*Методы оценки параметров  
АР-модели*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ

## Метод Юла-Уолкера оценки параметров АР-модели (автокорреляционный метод)

- 1) Оценивание параметров АР-модели производится по **отсчетам анализируемой последовательности длины  $L$** .
- 2) **Моделируемая последовательность** рассматривается как **линейное предсказание вперед** анализируемой последовательности  **$x(n)$** .
- 3) Виды линейного предсказания:
  - **линейное предсказание вперед;**
  - **линейное предсказание назад.**

$$y(n) = \hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)$$



# ОШИБКА ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ

## Ошибка линейного предсказания (ЛП)

Разность между **истинным значением** отсчета и его **оценкой**

$$\varepsilon(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

$$\varepsilon(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k)$$

**Аналитическое выражение для анализируемой последовательности**

$$x(n) = - \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) + n$$

**Сравнение анализируемой последовательности с моделируемой**

Если ошибка ЛП – **нормальный белый шум**, параметры ЛП будут совпадать с параметрами **АР-модели**.

# КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

## Представление анализируемой последовательности

$$x(n) \approx y(n) + \varepsilon(n)$$

## Критерий наилучшего приближения

Минимум среднего квадрата ошибки линейного предсказания.

## Аналитическая запись критерия

$$M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = M \left\{ \left[ x(n) - y(n) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_{\bar{a}}$$

$$M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = M \left\{ \left[ x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right]^2 \right\} \rightarrow \min_{\bar{a}}$$

$M \{ \cdot \}$  – оператор математического ожидания

$\bar{a}$  – вектор параметров линейного предсказания



# РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ

**Средний квадрат (математическое ожидание)  
ошибки линейного предсказания**

$$M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \varepsilon^2(n)$$

$$M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left[ x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k x(n-k) \right]^2$$

**Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  
для расчета параметров АР-модели**

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k-m) = -R_x(m), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1)$$

# РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ (1)

**СЛАУ в матричной форме для расчета параметров АР-модели**

$$\begin{vmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-2) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ R_x(M-1) & R_x(M-2) & \dots & R_x(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \boxtimes \\ a_M \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \boxtimes \\ R_x(M) \end{vmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k \left\{ \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-1) + \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x(n-2) + \dots + \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n-k)x[n-(M-1)] \right\} = \sum_{k=1}^{M-1} a_k R_x(k-m), \quad m = 1, 2, \dots, (M-1).$$

**Решение СЛАУ – вектор параметров линейного предсказания.**

Поиск решения **СЛАУ** осуществляется по рекуррентному **алгоритму**

**Левинсона-Дарбина.**

## РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ АР-МОДЕЛИ (2)

**Средний квадрат ошибки линейного предсказания**

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = M \left\{ \varepsilon^2(n) \right\}$$

**Оценка дисперсии нормального белого шума в АР-модели**

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \hat{\sigma}^2$$

**Вычисление оценки СПМ анализируемой последовательности**

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{f_d} \left| H e^{j\omega T} \right|^2$$



# МЕТОД БЕРГА

## Параметрические методы оценивания СПМ в MATLAB

- 1) Метод Юла-Уолкера (автокорреляционный);
- 2) Метод Берга;
- 3) Ковариационный метод;
- 4) Модифицированный ковариационный метод.

### Метод Берга

Основан на вычислении оценок параметров **АР-модели** по отсчетам последовательности с линейным предсказанием вперед и назад с **минимизацией среднего значения соответствующих средних квадратов ошибок линейного предсказания**, но без непосредственного вычисления оценки АКФ.



# КОВАРИАЦИОННЫЙ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КОВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОДЫ

9

## Ковариационный метод

Основан на вычислении оценки АКФ по известным отсчетам последовательности  $x(n)$  (без добавления нулей в начале и в конце), для чего последняя **усекается симметрично справа и слева на  $(M-1)$  отсчетов**, и оценка АКФ нормируется к длине усеченной последовательности  $L-2(M-1)$ .

## Модифицированный ковариационный метод

Основан на вычислении оценки АКФ для суммы последовательностей с линейным предсказанием вперед (forward) и назад (backward) с **минимизацией среднего значения соответствующих квадратов ошибок линейного предсказания**. Затем оценка АКФ вычисляется так же, как в ковариационном методе, и нормируется к удвоенной длине усеченных последовательностей. В линейном предсказании назад значение текущего отсчета определяется как взвешенная сумма последующих отсчетов.

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ. МЕТОД ЮЛА-УОЛКЕРА

## Эквивалентные БИХ-фильтры

- 1) Методы **Юла-Уолкера** и **Берга** гарантируют **устойчивость** эквивалентного БИХ-фильтра АР-модели.
- 2) **Ковариационный** и **модифицированный ковариационный** методы требуют проверки эквивалентного БИХ-фильтра на **устойчивость**.

## Особенности оценки СПМ. Метод Юла-Уолкера

- 1) применяют при анализе длинных последовательностей;
- 2) при анализе коротких последовательностей и завышенном порядке АР-модели его применение может сопровождаться расщеплением и смещением пиков.



# МЕТОД БЕРГА. КОВАРИАЦИОННЫЙ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КОВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОДЫ

## Особенности оценки СПМ. Метод Берга

- 1) дает удовлетворительные результаты и при анализе **коротких последовательностей**;
- 2) **завышенный порядок** АР-модели может также приводить к **расщеплению и смещению пиков**.

## Особенности оценки СПМ.

### Ковариационный и модифицированный ковариационный методы

- 1) обеспечивают более высокую (по сравнению с методом Юла-Уолкера) точность при анализе **коротких последовательностей** при одинаковом порядке АР-модели;
- 2) **модифицированный ковариационный метод** может сопровождаться незначительным, по сравнению с ковариационным методом, **смещением ПИКОВ**.



«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Методы параметрического  
спектрального анализа.*

*Методы оценки параметров  
AR-модели*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)