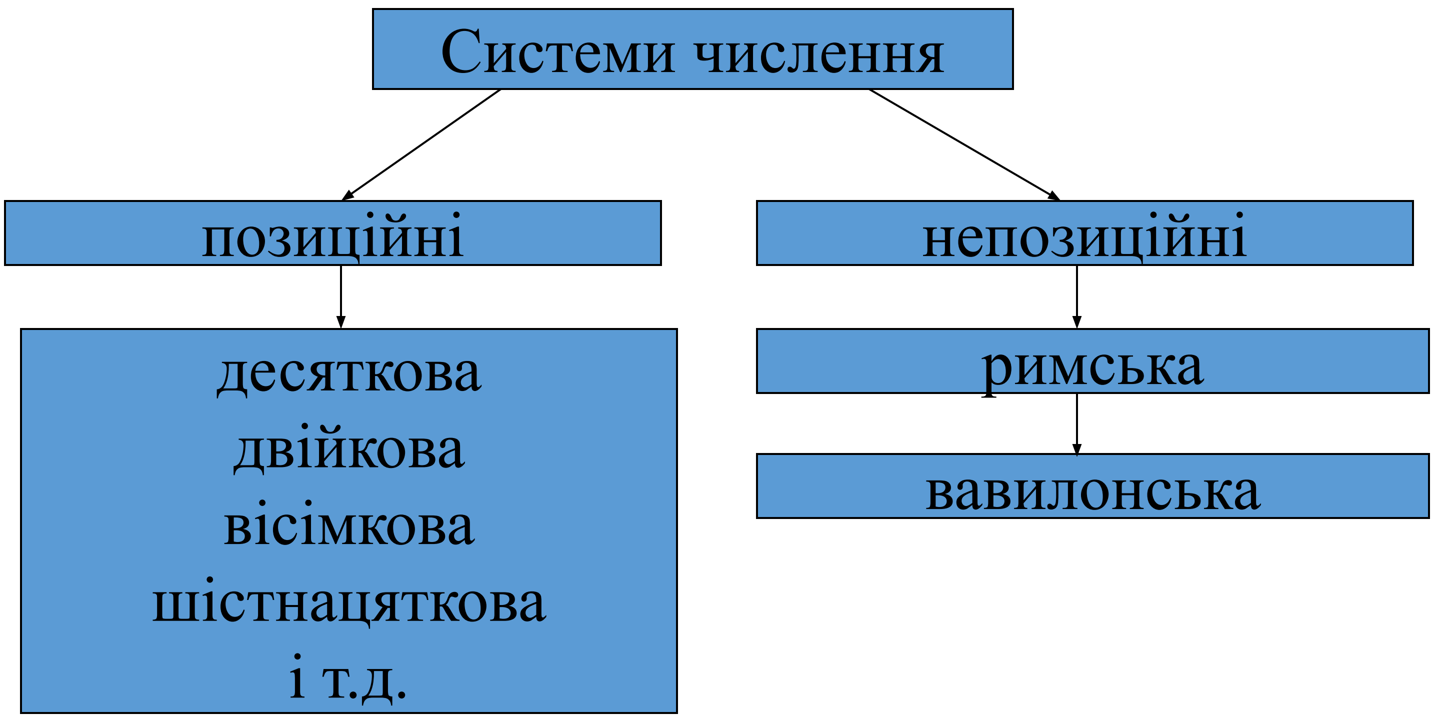
Системи числення

Савісько Антон
101-НЗ

***Система числення** – сукупність способів і засобів запису чисел для проведення підрахунків.*



Непозиційні системи числення

Непозиційна система числення – система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється (вавилонська, римська).
У непозиційній системі кожен знак у запису незалежно від місця означає одне й те саме число.

Римська система числення – непозиційна система числення, кожний символ означає одне і те ж число не залежно від позиції. Цифри позначаються латинськами буквами

I, V, X, L, C, D, M
(1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000)

Римська цифра	Десяткове значення
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Позиційні системи числення

- Основою системи може бути довільне натуральне число, більше одиниці;
- Основа ПСЧ – це кількість цифр, що використовуються для представлення чисел;
- Значення цифри залежить від її позиції, тобто, одна і та ж цифра відповідає різним значенням в залежності від того на якій позиції числа вона стоїть;
- Наприклад: 888: 800; 80; 8
- Довільне позиційне число можна представити у вигляді суми степеней основи системи.

Двійкова СЧ

- Основа системи – 2;
- Містить 2 цифри: 0; 1;
- Довільне двійкове число можна представити у вигляді суми степеней числа 2 – основи системи;
- Приклади двійкових чисел: 11100101; 10101;

Біт і Байт

Кожна цифра двійкового числа називається біт.

Група з 8 біт складає байт, який зберігає різні типи даних,
літери алфавіту, десяткові цифри або інші знаки.
Байт - основна одиниця виміру інформації.

Похідні від байта :

1 Кбайт (кілобайт) = 1024 байт = 2^{10} байт,
1 Мбайт (мегабайт) = 1024 Кбайт = 2^{20} байт,
1 Гбайт (гігабайт) = 1024 Мбайт = 2^{30} байт,
1 Тбайт (терабайт) = 1024 Гбайт = 2^{40} байт.

Вісімкова СЧ

- Основа системи – 8;
- Містить 8 цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;
- Довільне вісімкове число можна представити у вигляді суми степеней числа 8 – основи системи;
- Приклади вісімкових чисел: 2105; 73461;

Основу восьмеричної с/ч, тобто число 8, можна представити у вигляді 2^3. Тому одній восьмеричній цифрі відповідає три двійкових розряди – тріада.

Правило переходу з двійкової системи числення у вісімкову

Розбити двійковий код на класи справа на ліво по три цифри у кожному. Замінити кожний клас відповідною вісімковою цифрой.

Двійкові тріади	000	001	010	011	100	101	110	111	001000	001001	001010
Вісімкові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12

$$1.110.101.100_2 = 1654_8$$

Правило переходу з вісімкової системи числення у двійкову

Кожну вісімкову цифру замінити двійковим кодом по три цифри у кожному

$$2571_8 = 10.101.111.001_2$$

Шістнадцяткова СЧ

- Основа системи – 16;
- Містить 16 цифр: от 0 до 9; A; B; C; D; E; F;
- Довільне шістнадцяткове число можно представити у вигляді суми степеней числа 16 – основи системи;
- Приклади шістнадцяткових чисел: 21AF3; B09D;

Правило переходу з двійкової системи числення у шістнацяткову

Розбити двійковий код на класи справа наліво по чотири цифри у кажному. Замінити кожний клас відповідною шістнацятковою цифрою.

Двійкові тетради	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Шістнадцяткові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Десяткові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$1.1011.1000.1101_2 = 1B8D_{16}$$

Правило переходу з шістнадцяткової системи числення у двійкову

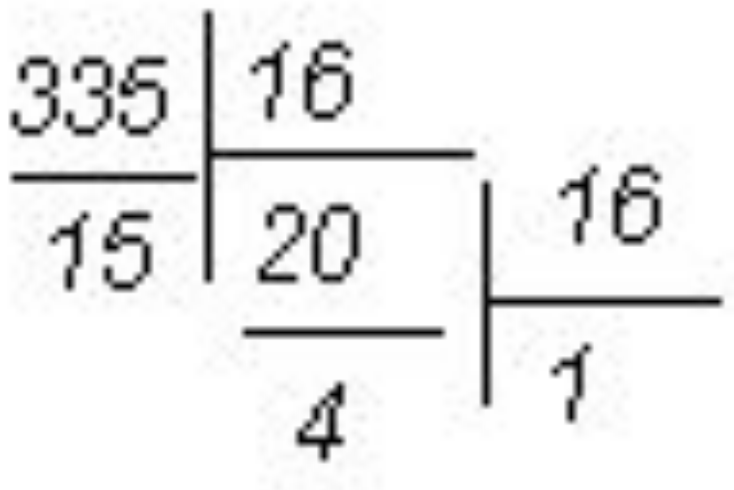
Кожну шістнадцяткову цифру замінити двійковим кодом по чотири цифри у кожному

$$F54D0_{16} = 1111.0101.0100.1101.0000_2$$

Правило переходу з десяткової системи числення у шістнадцяткову

- Розділити десяткове число на 16. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову разділити на 16. Отримаєте частку та остачу.
- Виконуйте ділення до тих пір, поки остання частка не стане меньшою 16.
- Записати останню частнку та всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде шістнадцятковим кодом даного десяткового числа.

Приклад:



$$335_{10} = 14F_{16}$$

Правило переходу з шістнадцяткової системи числення у десяткову.

Для переходу з шістнадцяткової системи числення у десяткову необхідно дане число представити у вигляді суми степеней шістнацятки та обчислити її десяткові значення.

$$A14_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 =$$
$$= 10 \cdot 256 + 16 + 4 = 2580_{10}$$

Десяткова СЧ

- Основа системи - число 10;
- Містить 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- Довільне число можна представити у вигляді суми степеней числа 10 – основи системи;

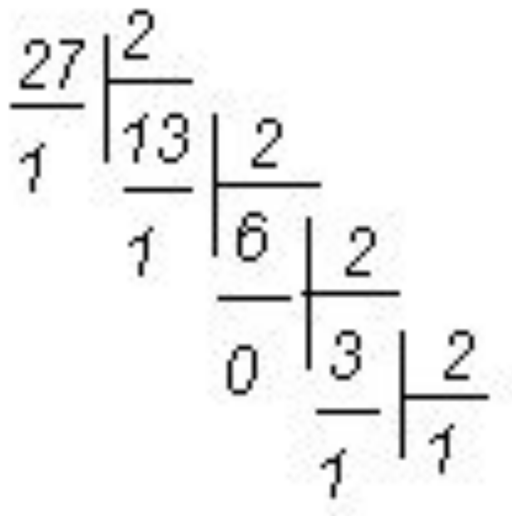
$$2345_{10} = 2\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 5\cdot10^0$$

Правила переходу

1. *З десяткової СЧ у двійкову СЧ:*

- Розділити десяткове число на 2. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову поділити на 2. Отримаєте частку та остачу.
- Виконувати ділення до тих пір, поки остання частка не стане меньшим 2.
- Записати останню частку і всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде двійковим кодом даного десяткового числа.

Приклад:



$$27_{10} = 11011_2$$

2. *Правило переходу з двійкової системи числення у десяткову.*

Для переходу з двійкової системи числення у десяткову необхідно двійкове число представити у вигляді суми степеней двійки та порахувати її десяткове значення.

Приклад:

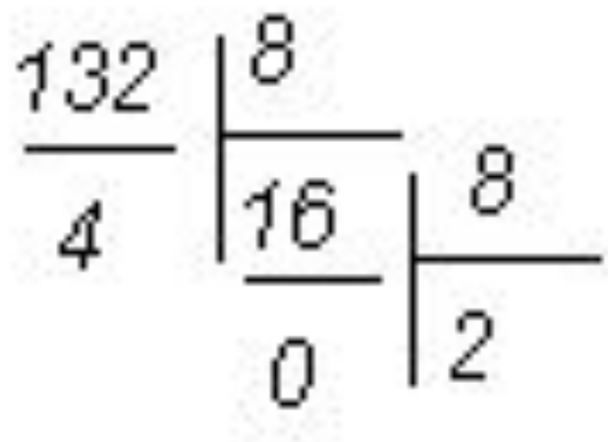
$$11101_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$$

$$= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29_{10}$$

Правило переходу з десяткової системи числення у вісімкову

- Разділити десяткове число на 8. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову разділити на 8. Отримаєте частку та остачу.
- Виконуйте ділення до тих пір, поки остання частка не стане меньшим 8.
- Записати останню частку та всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде вісімковим записом даного десяткового числа.

Приклад:



$$132_{10} = 204_8$$

Правило переходу з вісімкової системи числення у десяткову.

- Для переходу з вісімкової системи числення у десяткову необхідно вісімкове число представить у вигляді суми степеней 8 та знайти її десяткове значення.

$$215_8 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 =$$

$$= 2 \cdot 64 + 8 + 5 = 141_{10}$$

Переведення дробової частини десяткового числа в різні системи числення із заданою точністю

Переведення дробової частини числа представленого в десятковій с/ч у двійкову, восьмеричну або шістнадцятеричну системи числення виконується шляхом множення дробової частини вхідного числа на основу нової с/ч.

Процес послідовного множення може тривати нескінченно, переведення виконується або до одержання необхідної кількості розрядів у дробовій частині числа в нової с/ч або до досягнення заданої точності.

Послідовність дій

- Помножити дробову частину вхідного числа на основу нової с/ч. Ціла частина отриманого добутку дає першу цифру дробової частини числа в нової с/ч.

2. Дробову частину отриманого добутку помножити на основу нової с/ч. Ціла частина отриманого добутку дає наступну цифру дробової частини числа в нової с/ч.

3. Якщо досягнуто задану точність або отримано необхідну кількість цифр у дробовій частині числа в нової с/ч те перейти до п. 4, інакше повторити п. 2.

4. Отримані в результаті множення цілі частини добутків, записати в порядку їхнього обчислення. Це й буде дробова частина вхідного числа в нової с/ч.

Приклад

$$0{,}74_{10} \rightarrow (?)_2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}74 \\ \underline{\quad 2} \\ \underline{1}{,}\ 48 \\ \underline{\quad 2} \\ \underline{0}{,}\ 96 \\ \underline{\quad 2} \\ \underline{1}{,}\ 92 \end{array}$$

$$0{,}74_{10} \rightarrow 0{,}101_2$$

$$0{,}23_{10} \rightarrow (?)_8$$

$$\begin{array}{r} 0{,}23 \\ \underline{\quad 8} \\ \underline{1}{,}\ 84 \\ \underline{\quad 8} \\ \underline{6}{,}\ 72 \\ \underline{\quad 8} \\ \underline{5}{,}\ 76 \end{array}$$

$$0{,}23_{10} \rightarrow 0{,}165_8$$

$$0{,}12_{10} \rightarrow (?)_{16}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}12 \\ \underline{\quad 16} \\ \underline{1}{,}\ 92 \\ \underline{\quad 16} \\ \underline{14}{,}\ 72 \\ \underline{\quad 16} \\ \underline{11}{,}\ 52 \end{array}$$

$$0{,}12_{10} \rightarrow 0{,}1EB_{16}$$

Погрішність

Переведемо отримані значення назад в десяткову систему числення й визначимо Δ_A погрішність даного способу переведення.

$0,101_2 \rightarrow 0^0, 1^{-1}\ 0^{-2}\ 1^{-3} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,625_{10}$

Погрішність для двійкової с/ч складе Δ_2 = 0.74-0.625=0.115.

$0.165_8 \rightarrow 0^0, 1^{-1}\ 6^{-2}\ 5^{-3} = 0 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} + 5 \cdot 8^{-3} \approx 0.229_{10}$

Погрішність для восьмеричної с/ч складе Δ_8 = 0.23-0.229 = 0.001.

$0.1EB_{16} \rightarrow 0^0, 1^{-1}\ E^{-2}\ B^{-3} = 0 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1} + 14 \cdot 16^{-2} + 11 \cdot 16^{-3} \approx 0.1199_{10}$

Погрішність для шістнадцятеричної с/ч складе Δ_{16} = 0.12-0.1199 = 0.0001

Для десяткової с/ч точність представлення числа визначається в такий спосіб: $(0, b_{-1}\, b_{-2} \ldots b_{-k})_{10} \rightarrow b_{-1}\cdot 10^{-1}+b_{-2}\cdot 10^{-2}+\ldots+b_{-k}\cdot 10^{-k}$

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -1 дорівнює 10^{-1}= 0.1;

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -2 дорівнює 10^{-2}=0.01

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -k дорівнює 10^{-k}

У загальному випадк ться число, у будь-якій позиційній системі чи виразу

$$t_A = \frac{1}{A^R},$$

де A – основа системи числення; R – кількість цифр у дробовій

Точність переведення задається в десятковій системі числення Для виконання переведення із заданою точністю необхідно одержати таку кількість цифр у дробовій частині числа в новій системі числення А, щоб $t_{10} > t$.

$$0{,}74_{10} \to 0{,}1^{-1}\ 0^{-2}\ 1^{-3}\ 1^{-4}\ 1^{-5}\ 1^{-6}\ 0^{-7} = 0{,}1011110_2$$

$0{,}74 \cdot 2$

$\underline{1}, 48$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-1} = 0{,}5 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{0}, 96$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-2} = 0{,}25 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{1}, 92$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-3} = 0{,}125 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{1}, 84$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-4} = 0{,}0625 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{1}, 68$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-5} = 0{,}03125 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{1}, 36$ точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-6} \approx 0{,}01563 > t = 0{,}01$;

$\cdot 2$

$\underline{0}, 72$ точність, що дає ця цифра $\mathbf{t_2 = 2^{-7} \approx 0{,}00781 < t = 0{,}01}$;

Отримана точність представлення числа у двійкової с/ч t_2 менше заданої точності t_{10}, отже, процес переведення можна завершити. Визначимо погрішність переведення, попередньо виконавши зворотне переведення:

$$0{,}1011110_2 \to 0^0,\ 1^{-1}\ 0^{-2}\ 1^{-3}\ 1^{-4}\ 1^{-5}\ 1^{-6}\ 0^{-7} =$$

$$= 0\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} + 0\cdot2^{-2} + 1\cdot2^{-3} + 1\cdot2^{-4} + 1\cdot2^{-5} + 1\cdot2^{-6} + 0\cdot2^{-7} \approx 0{,}734_{10}$$

Погрішність склала $\Delta_2 = 0{,}74 - 0{,}734 = 0{,}006$ і не перевищує t_{10}.