

«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Методы синтеза и анализа  
цифровых фильтров. Метод  
чебышевской аппроксимации  
для синтеза КИХ-фильтров*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

## МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (1)

Метод чебышевской аппроксимации позволяет получить **оптимальный КИХ-фильтр** – фильтр наименьшего возможного порядка, удовлетворяющий заданным требованиям к АЧХ.

Коэффициенты **оптимального КИХ-фильтра** определяются в результате поиска минимума некоторого **функционала – критерий Чебышева** (критерий наилучшего равномерного приближения).

### **Веса в методе чебышевской аппроксимации**

Вес, равный единице, присваивается полосе с **наибольшим максимально допустимым отклонением;**

Веса в остальных полосах рассчитываются как отношение **наибольшего максимально допустимого отклонения к максимально допустимому отклонению в данной полосе.**

# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (2)

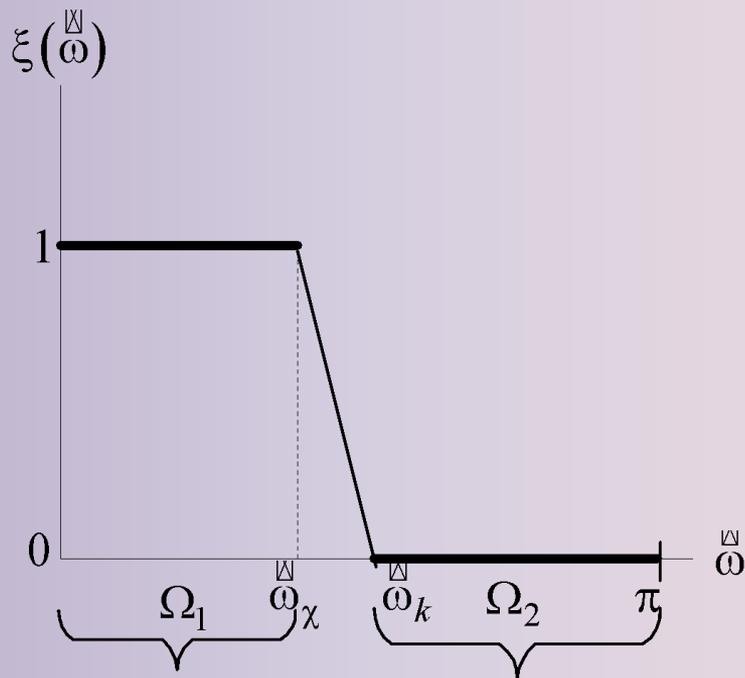
## Теорема Чебышева

**Минимум** максимальной взвешенной ошибки аппроксимации достигается в **точках альтернанса**.

Тип КИХ-фильтра	Число точек альтернанса $m$	Порядок фильтра $R$
<b>Тип 1 (Туре-1):</b> порядок $R$ — четный; ИХ $h(n)$ — симметричная	$m = \frac{R}{2} + 2$	$R = 2m - 4$
<b>Тип 2 (Туре-2):</b> порядок $R$ — нечетный, ИХ $h(n)$ — симметричная	$m = \frac{R-1}{2} + 2$	$R = 2m - 3$
<b>Тип 3 (Туре-3):</b> порядок $R$ — четный; ИХ $h(n)$ — антисимметричная и $h\left(\frac{R}{2}\right) = 0$	$m = \frac{R}{2} + 1$	$R = 2m - 2$
<b>Тип 4 (Туре-4):</b> порядок $R$ — нечетный; ИХ $h(n)$ — антисимметричная	$m = \frac{R-1}{2} + 2$	$R = 2m - 3$

# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (3)

1) задание **аппроксимируемой функции (идеальной АЧХ)**;



# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (4)

2) выбор класса **аппроксимирующих функций**.

**Амплитудная функция КИХ-фильтра 1-го типа  
(тригонометрический полином)**

$$B(\omega, \bar{a}) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[\omega(M-k)]$$

$$M = \frac{R}{2} = \frac{N-1}{2}$$

$$N = 2M + 1$$

$$A(\omega) = |B(\omega, \bar{a})|$$



# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (5)

3) выбор **критерия аппроксимации (критерий Чебышева)**.

$$\max_{\omega \in \Omega} |\delta(\omega, \bar{a})| = \max_{\omega \in \Omega} p(\omega) |\xi(\omega) - B(\omega, \bar{a})| \Rightarrow \min_{\bar{a}}$$

$|\delta(\omega, \bar{a})|$  — минимальная взвешенная ошибка аппроксимации,

$p(\omega)$  — весовая функция,

$\xi(\omega)$  — идеальная АЧХ,

$B(\omega, \bar{a})$  — АЧХ реального КИХ-фильтра,

(тригонометрический полином),

$\Omega$  — интервал аппроксимации.



# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (5)

## Итерационная процедура синтеза оптимального КИХ-фильтра

1. Задание требований к АЧХ.
2. Оценка начальной длины КИХ-фильтра (по эмпирической формуле).
3. Синтез КИХ-фильтра – расчет передаточной функции  $H(z)$ .  
 Рассчитывается вектор  $\bar{a}$ , по нему – ИХ и по ней –  $H(z)$ .
4. Проверка выполнения требований к АЧХ:
  - если *не выполняются* –  $N \uparrow$  до тех пор, пока не будет найдена  $N_{\min}$ , при которой требования к АЧХ выполняются.
  - если *выполняются* –  $N \downarrow$  до тех пор, пока не будет найдена  $N_{\min}$ , при которой требования к АЧХ выполняются.
 При  $N \uparrow$  и  $N \downarrow$  следует помнить о типе КИХ-фильтра.
5. В результате *итерационной* процедуры синтезирован *оптимальный* КИХ-фильтр длины  $N_{\min} = N_{\text{opt}}$ .

# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (6)

## Синтез оптимального КИХ-фильтра в MATLAB

$[b, error, opt] = \text{firpm}(R, f0, weight, ftype, \{lgrid\})$

### Параметр $ftype$

- 'hilbert' — для 3-го и 4-го типов и цифровых преобразователей Гильберта;
- 'differentiator' — для 3-го и 4-го типов и цифровых дифференциаторов;
- по умолчанию (если параметр отсутствует) — для 1-го и 2-го типов;
- ' ' (пробел) — тождественно отсутствию параметра  $ftype$ .



# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (7)

## Параметр `opt`

- `opt.fgrid` — сетка нормированных частот (вектор) на интервале аппроксимации (совокупности ПП и ПЗ) в шкале нормированных частот  $\hat{f}$ ; правая граница основной полосы частот, равная единице, не выводится;
- `opt.H` — вектор значений комплексной частотной характеристики на сетке частот `opt.fgrid`;
- `opt.error` — вектор отклонений АЧХ от идеальной на сетке частот `opt.fgrid`;
- `opt.des` — вектор значений идеальной АЧХ на сетке частот `opt.fgrid`;
- `opt.wt` — вектор весов на сетке частот `opt.fgrid`;
- `opt.iextr` — вектор номеров элементов вектора `opt.fgrid`, соответствующих частотам альтернанса;
- `opt.fextr` — вектор нормированных частот альтернанса.



# МЕТОД ЧЕБЫШЕВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (8)

## Оценка порядка КИХ-фильтра

$$[R, f_0, m_0, \text{weight}] = \text{firpmord}(f, m, \text{ripple}, F_s)$$

$f$  – вектор граничных частот в полосе пропускания и полосе задерживания,

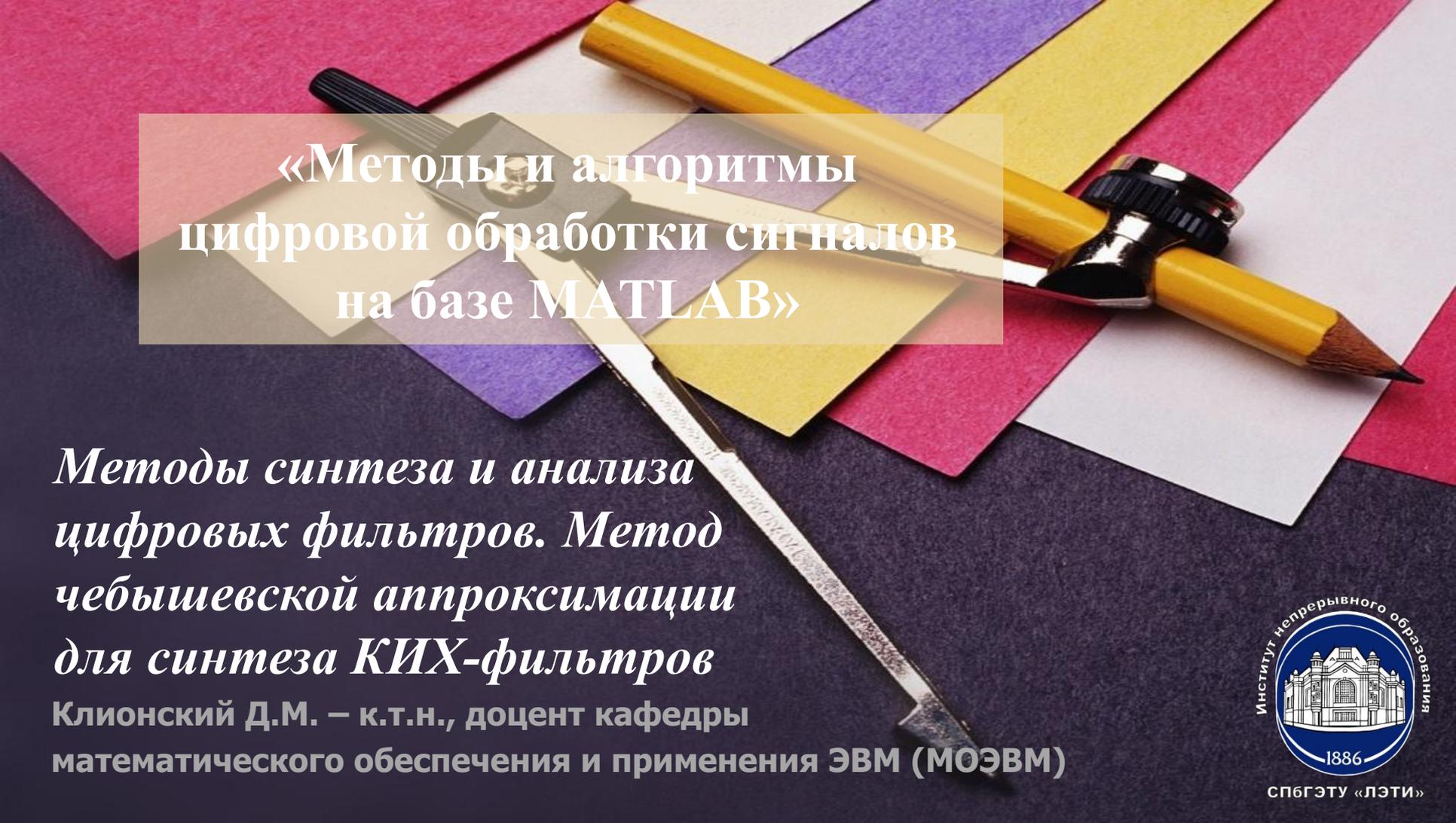
$m$  – вектор значений идеальной АЧХ,

$\text{ripple}$  – вектор максимально допустимых отклонений АЧХ,

$F_s$  – частота дискретизации,

$R$  – оценка порядка фильтра,

$\text{weight}$  – вектор весов в полосе пропускания и полосе задерживания.



«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Методы синтеза и анализа  
цифровых фильтров. Метод  
чебышевской аппроксимации  
для синтеза КИХ-фильтров*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)