

Минимизация логических функций

Метод Квайна

- **Метод Квайна** — способ представления функции в ДНФ или КНФ с минимальным количеством членов и минимальным набором переменных.

Преобразование функции можно разделить на два этапа:

- на первом этапе осуществляется переход от канонической формы (СДНФ или СКНФ) к так называемой **сокращённой форме**;
- на втором этапе — переход от сокращённой формы к **минимальной форме**.

Первый этап (получение сокращённой формы).

- Предположим, что заданная функция представлена в СДНФ. Выполним все возможные операции *склеивания*, а затем все возможные операции *поглощения*.

а) Формула склеивания

$$AB \vee A\bar{B} \equiv A$$

б) Формула неполного склеивания

$$AB \vee A\bar{B} \equiv A \vee AB \vee A\bar{B}$$

в) Формула поглощения

$$A \vee AB \equiv A$$

- В результате СДНФ приводится к СкДНФ.

Минимальная форма формулы (МДФ) получается на основе ***импликантной матрицы*** путем нахождения минимального покрытия этой матрицы.

- **Импликанта** – это элементарная конъюнкция СКДНФ.
- **Конституента единицы** – это элементарная конъюнкция СДНФ. Импликантная матрица – это матрица **импликант и конституент единиц**. (столбцы - конституенты единицы, строки – импликанты). МДНФ может быть несколько.

Подмножество строк

$$i_1, \dots, i_k$$

матрицы M является ее покрытием, если в подматрице, образованной этими строками нет нулевых столбцов.

Покрытие матрицы также называется покрытием столбцов матрицы ее строками.

- Пример 1. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Тогда 1-я и 2-я строки не покрывают матрицу M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- а 1-я и 3-я строки – являются покрытием матрицы M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ПРИМЕР.
- Найдем МДНФ формулы:

$$\begin{array}{cccccc} \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}YZ \vee X\overline{Y}\overline{Z} \vee XY\overline{Z} \vee XYZ \\ 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \end{array}$$

- Во-первых, осуществим всевозможные склеивания

$$1-2 \quad \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}Z \equiv \overline{X}\overline{Y}$$

$$1-4 \quad \overline{Y}\overline{Z}$$

$$2-3 \quad \overline{X}Z$$

$$3-6 \quad YZ$$

$$4-5 \quad X\overline{Z}$$

$$5-6 \quad XY$$

- В результате СКДНФ имеет вид:

$$\overline{X}\overline{Y} \vee \overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee YZ \vee X\overline{Z} \vee XY$$

- А импликантная матрица имеет вид

	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$\overline{X}YZ$	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$XY\overline{Z}$	XYZ
$\overline{X}\overline{Y}$	+	+				
$\overline{Y}\overline{Z}$	+			+		
$\overline{X}Z$		+	+			
YZ			+			+
$X\overline{Z}$				+	+	
XY					+	+

- По данной импликантной матрице можно выбрать следующие МДНФ

$$\overline{X}\overline{Y} \vee YZ \vee X\overline{Z}$$

$$\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee XY$$

Метод минимизирующих карт.

Алгоритм метода минимизирующих карт включает в себя следующие этапы:

- Вычеркнем из таблицы (минимизирующей карты) все строки, в которых конъюнкция последнего столбца не входит в СДНФ функции.
- Конъюнкции «вычеркнутых строк» вычеркнем во всех остальных строках таблицы.
- Если в строке остались конъюнкции с различным числом сомножителей, то конъюнкции с не минимальным числом сомножителей оставляем только тогда, когда они встречаются в других строках.

- Отметим конъюнкции, оставшиеся единственными на строке. Вычеркнем строки, в которых присутствуют такие же конъюнкции.
- Всеми возможными способами выберем из каждой строки по одной конъюнкции (из оставшихся) и составим для каждого случая ДНФ.
- Из всех построенных ДНФ выберем минимальную. Для нахождения минимальной ДНФ мы должны выполнить перебор. Однако в данном случае число вариантов перебора, как правило, существенно меньше вариантов перебора равносильных ДНФ или способов сокращения СДНФ.

- ПРИМЕР. Дана СДНФ

$$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}YZ \vee X\overline{Y}\overline{Z} \vee XY\overline{Z} \vee XYZ$$

Для данной СДНФ таблица всевозможных сочетаний переменных (минимизирующая карта), имеет вид:

X	Y	Z	XY	XZ	YZ	XYZ	
X	Y	\bar{Z}	XY	$X\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$	
X	\bar{Y}	Z	$X\bar{Y}$	XZ	$\bar{Y}Z$	$X\bar{Y}Z$	*
X	\bar{Y}	\bar{Z}	$X\bar{Y}$	$X\bar{Z}$	$\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}\bar{Z}$	
\bar{X}	Y	Z	$\bar{X}Y$	$\bar{X}Z$	YZ	$\bar{X}YZ$	
\bar{X}	Y	\bar{Z}	$\bar{X}Y$	$\bar{X}\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$	*
\bar{X}	\bar{Y}	Z	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Z$	$\bar{Y}Z$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	
\bar{X}	\bar{Y}	\bar{Z}	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}\bar{Z}$	$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	

* - помечены строки, не содержащие конститuentы СДНФ.

- Из таблицы вычеркнем те строки, которые не содержат конъюнкты СДНФ, а также конъюнкции этих строк, содержащиеся в других строках.

- В результате получим:

			XY		YZ		
			XY	$X\bar{Z}$			
							*
				$X\bar{Z}$	$\bar{Y}\bar{Z}$		
				$\bar{X}\bar{Z}$	YZ		
							*
			$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}\bar{Z}$			
			$\bar{X}\bar{Y}$		$\bar{Y}\bar{Z}$		

После всевозможного перебора остаются следующие МДНФ:

$$\bar{X}\bar{Y} \vee YZ \vee X\bar{Z}$$

$$\bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}Z \vee XY$$

Метод минимизации с помощью карт Вейча.

- Алгоритм метода карт Вейча включает в себя следующие этапы:
- Заданная формула приводится к СДНФ.
- Составляется карта Вейча. Карта Вейча – это таблица всех возможных комбинаций значений переменных. В соответствующие ячейки записываются единицы, соответствующие конституентам СДНФ.

- Единицы, стоящие по вертикали и горизонтали, объединяются (по 2 , по 4 , по 8 и т.д.). Объединение единиц соответствует операциям склеивания и поглощения. Иначе говоря, формируются максимальные подкубы.
- Для каждого объединения выписываются конъюнкции из элементов, общих для каждой единицы, входящих в объединение.
- Полученные конъюнкции составляют МДНФ.

- Карты Вейча удобны при поиске МДФ функций двух, трех и четырех переменных.
-

- Пример для $n=2$.
- Функция задана

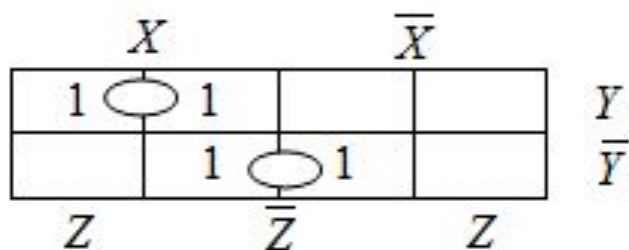
$$\text{СДНФ} = XY \vee X\bar{Y} \vee \bar{X}\bar{Y}$$

X	\bar{X}	
0		Y
1	0	\bar{Y}

$$\text{МДНФ} = X \vee \bar{Y}$$

- Пример для $n=3$.
- Функция задана

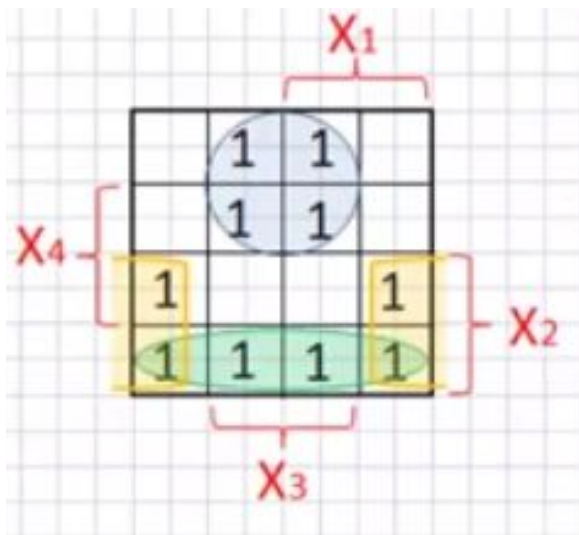
$$\text{СДНФ} = XYZ \vee XY\bar{Z} \vee X\bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$



$$\text{МДНФ} = XY \vee \bar{Y}\bar{Z}$$

- Пример для n=4.
- Функция задана СДНФ

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \\ + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$



$$y = \bar{x}_2x_3 + x_2\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3$$

