Основные уравнения теории упругости

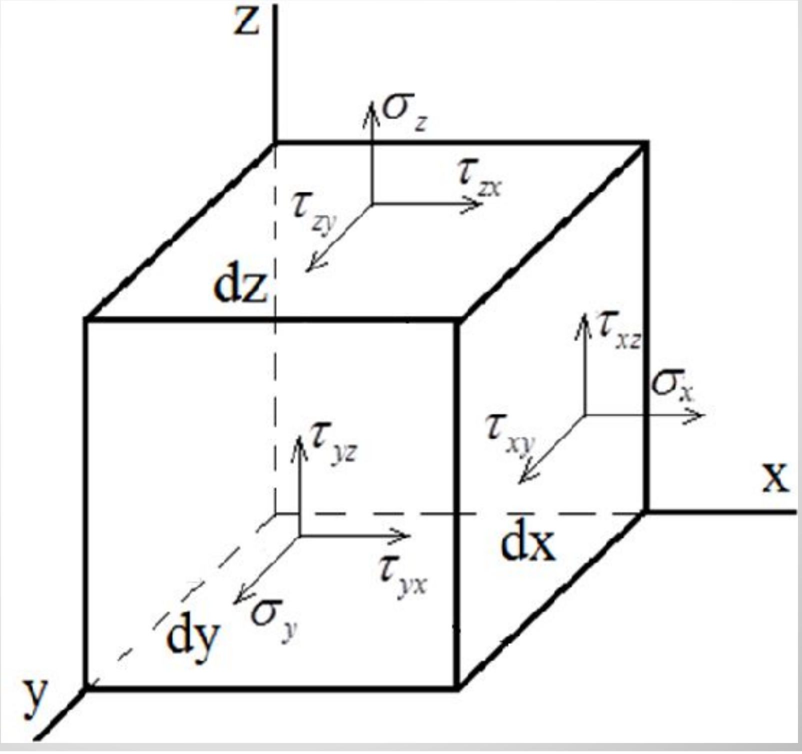
Обобщенный закон Гука для изотропного тела. Упругие постоянные. Объемная деформация.

Уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ляме).

Уравнения неразрывности деформаций в напряжениях (уравнения Бельтрами-Мичелла).

Обобщенный закон Гука

Рассмотрим отдельно воздействие сил, возникающих на гранях элементарного параллелепипеда, вырезанного в изотропном теле вокруг рассматриваемой точки.



Обобщенный закон Гука

Найдем $\sum_i \varepsilon_x$, вызванных всеми нормальными напряжениями. За счет напряжения σ_x параллелепипед растягивается на относительную величину $\frac{\sigma_x}{E}$. Напряжения σ_y, σ_z растягивают его вдоль осей y и z соответственно, следовательно, вдоль оси x за счет этого происходит сжатие. Соответствующие деформации отрицательны и равны $-\frac{\nu\sigma_y}{E}$, $-\frac{\nu\sigma_z}{E}$. Поэтому суммарная деформация вдоль оси x

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

Аналогичные соотношения для $\varepsilon_y, \varepsilon_z$

Обобщенный закон Гука

В пределах малых деформаций существует линейная зависимость между физическими свойствами материала и напряжениями и деформациями.

Эта зависимость носит название обобщенного закона Гука.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (1)$$

Где $G = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$ - модуль сдвига

ν коэффициент Пуассона, он характеризует упругие свойства материала. При приложении к телу растягивающего усилия оно начинает удлиняться (т.е. длина увеличивается), а поперечное сечение уменьшается.

Коэффициент Пуассона показывает во сколько раз изменяется поперечное сечение деформированного тела при его растяжении или сжатии.

Обратная форма закона Гука

Где λ и μ - упругие постоянные, или коэффициенты Ламе. Они также как и модули E и G, характеризуют упругие свойства материала, причем G= μ

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z; \\ \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (2)$$

Объемная деформация

Наряду с линейной и угловой деформациями иногда используется понятие *объемной деформации,* т.е. относительное изменение объема в точке. Линейные размеры элементарного параллелепипеда dx, dy, dz, взятого вокруг точки, в результате деформирования изменяются и становятся равными:

$$dx + \Delta(dx) = dx + \varepsilon_x dx = dx(1+\varepsilon_x);$$

$$dy(1+\varepsilon_y);$$

$$dz(1+\varepsilon_z).$$

Объемная деформация

Абсолютное приращение объема вычисляется как разность между новым и старым объемом:

$$\Delta V = dx(1+\varepsilon_x)\cdot dy(1+\varepsilon_y)\cdot dz(1+\varepsilon_z) - dxdydz.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая произведением линейных деформаций как величинами, малыми по сравнению с их первыми степенями, получим

$$\Delta V = dxdydz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Объемная деформация

Отношение приращения ΔV к первоначальному объему параллелепипеда V называется **объемной деформацией** θ_V. Она равна сумме трех линейных осевых деформаций:

(3)

$$\theta_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{dxdydz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dxdydz} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z .$$

Объемная деформация

При повороте осей координат величина объемной деформации в точке не изменяется, так как совпадает по величине с первым инвариантом тензора деформаций.

Выражение объемной деформации через нормальные напряжения получим, подставляя в (3) соотношения обобщенного закона Гука (1):

$$\theta_V = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \qquad (4)$$

Объемная деформация

Из (4) можно установить предельное значение коэффициента Пуассона для любого изотропного материала. Соотношение (4) применимо для произвольного напряженного состояния, следовательно, оно применимо и для случая всестороннего равномерного растяжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \rho$. Тогда

$$\theta_V = 3\frac{1-2\nu}{E}\rho.$$

Объемная деформация

Так как величина $\rho > 0$, то объемная деформация также должна быть положительной. Это возможно, если $1 - 2\nu > 0$. Следовательно , значение коэффициента Пуассона не может превышать 0.5.

Полученный вывод вытекает из частного случая напряженного состояния, однако он является общим для изотропных материалов, поскольку является ν характеристикой материала и в пределах упругих деформаций от напряженного состояния не зависит.

Коэффициент Пуассона

Для абсолютно хрупкого материала $\nu = 0$, для абсолютно упругого 0.5. для большинства сталей коэффициент Пуассона лежит в районе 0.3, для резины $\cdot \nu \approx 0.5$

ν – величина безразмерная.

Полная потенциальная энергия деформации

Удельная потенциальная энергии единицы объема

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right). \qquad (5)$$

Полная потенциальная энергия деформации

Через главные напряжения удельная потенциальная энергия (5) выражается в виде:

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right) \quad (6)$$

Полную потенциальную энергию получим, проинтегрировав удельную деформацию (5), (6) по объему деформированного тела.

Формулировка основной задачи теории упругости. Типы граничных условий на поверхности тела. Теорема о единственности решения.

Понятие о температурных напряжениях и деформациях упругих телах.

Задача ТУ

Полученные закономерности можно использовать для решения задачи ТУ о напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил.

Задача ТУ найти напряжения и деформации, возникающие в упругом изотропном теле под действием внешних сил.

Решение задачи ТУ любым способом сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих поведение упругого тела во внутренних точках. К этим уравнениям добавляются условия на поверхности, ограничивающей тело.

Эти условия диктуют задание или внешних поверхностных сил, или перемещений точек поверхности тела. В зависимости от этого обычно один из трёх типов краевых задач.

Первая краевая задача – кинематическая. В объеме тела отыскиваются составляющие перемещений, принимающие на поверхности определенные значения. В условии на поверхности тела таким образом задаются уравнение поверхности и значения составляющих перемещений на этой поверхности.

Вторая краевая задача – статическая. В этом случае на поверхности тела не наложены никакие ограничения на перемещения и задаются уравнение поверхности, направляющие косинусы нормали к поверхности и значения составляющих поверхностных нагрузок. Эти данные вносятся в уравнения на поверхности.

$$P_{vx} = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{zx} l_3;$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3;$$

$$P_{vz} = \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3.$$

В случае, когда поверхность тела совпадает с координатными плоскостями, краевые условия могут быть сформулированы непосредственно в напряжениях. Тогда достаточно указать уравнение поверхности и задать значения составляющих напряжений на этой поверхности.

Третья краевая задача – смешанная. В этом случае на одной части поверхности тела задаются кинематические условия, а на другой статические.

Все разнообразие краевых условий, этими тремя задачами не исчерпывается. Например, на некотором участке поверхности могут быть заданы не все три составляющие перемещения или составляющие поверхностной нагрузки.

Теорема о единственности

При решении задачи ТУ может возникнуть вопрос о том, является ли полученное решение однозначным, т.е. соответствует ли заданным объемным и поверхностным силам одна система напряжений или их несколько.

Докажем следующую теорему. *Для тела, находящегося в естественном состоянии, решение задачи ТУ единственно, если справедлив принцип независимости действия сил.*

Из доказанной теоремы следует: так как решение задачи ТУ единственно, то безразлично, каким математическим методом она решена. Можно указать три основных метода математического решения задачи ТУ.

1. *Прямой метод*. Он заключается в непосредственном интегрировании уравнений ТУ совместно с заданными условиями на поверхности.

2. *Обратный метод*. В этом случае задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям, и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

3. *Полуобратный метод Сен-Венана*. Он состоит в задании части функций напряжений или перемещений. Затем с помощью уравнений теории упругости устанавливаются зависимости, которым должны удовлетворять оставшиеся функции напряжений и перемещений. При этом дифференциальные уравнения несколько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей.

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0. \end{cases}$$

Дифференциальные соотношения равновесия связывают составляющие объемной силы с составляющими напряжений, эти соотношения получили название уравнений равновесия. Если они выполняется, то элементарный параллелепипед находится в равновесии под действием внешних сил.

Геометрические соотношения носят название **уравнений Коши**.

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z};\\[2ex]
\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x};\\[2ex]
\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y};\\[2ex]
\gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z};
\end{array}\right\}$$

Уравнения Сен-Венана

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y};\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z};\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z};\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y};
\end{aligned}\right\}$$

Обобщенный закон Гука

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \\
\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \\
\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\
\tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\
\tau_{zx} = G\gamma_{zx}.
\end{cases}
$$

Перечисленные уравнения содержат 15 неизвестных функций:

6 составляющих напряжения:

$$\sigma_x(x,y,z);\ \sigma_y(x,y,z);\ \sigma_z(x,y,z);$$

$$\tau_{xy}(x,y,z);\ \tau_{yz}(x,y,z);\ \tau_{zx}(x,y,z).$$

6 составляющих деформации:

$$\varepsilon_x(x,y,z);\ \varepsilon_y(x,y,z);\ \varepsilon_z(x,y,z);$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z);\ \gamma_{yz}(x,y,z);\ \gamma_{zx}(x,y,z).$$

3 составляющих перемещения:

$$u(x,y,z);\ v(x,y,z);\ w(x,y,z).$$

Для отыскания этих функций располагаем 15 уравнениями.

Т. о. с математической точки зрения задача может быть решена и сводится к интегрированию указанных 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхности:

$$P_{vx} = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{zx} l_3;$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3;$$

$$P_{vz} = \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3.$$

Решение уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные.

1. Решение в перемещениях, когда за неизвестные приняты 3 составляющих перемещения:

$$u(x, y, z); \;\; v(x, y, z); \;\; w(x, y, z).$$

2. Решение в напряжениях, когда за неизвестные приняты 6 составляющих напряжений:

$$\sigma_x(x,y,z);\ \ \sigma_y(x,y,z);\ \ \sigma_z(x,y,z);$$

$$\tau_{xy}(x,y,z);\ \ \tau_{yz}(x,y,z);\ \ \tau_{zx}(x,y,z).$$

3. Решение в смешанной форме, когда за неизвестные приняты некоторые составляющие перемещений и некоторые составляющие напряжений.

Решение задачи ТУ в перемещениях (уравнения ***Ляме***)

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta_V}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + P_x = 0; \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta_V}{\partial y} + \mu \nabla^2 \upsilon + P_y = 0; \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta_V}{\partial z} + \mu \nabla^2 \omega + P_z = 0. \end{cases}$$

Решение задачи ТУ в напряжениях (уравнения ***Бельтрами-Мичелла***)

$$\begin{cases} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \dfrac{\partial^2 I_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{cases}$$

Решение задачи ТУ в напряжениях

Для решения задачи ТУ в напряжениях приходится интегрировать 9 уравнений (6 уравнений Бельтрами-Мичелла и 3 уравнения равновесия). Наличие трех лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения.

Полученные после интегрирования 6 составляющих напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (граничным условиям). После этого по формулам обобщенного закона Гука определяют составляющие деформаций, а из геометрических соотношений Коши – составляющие перемещений.

Понятие о температурных напряжениях и деформациях в упругих телах.

Неустановившийся температурный процесс

Неустановившимся называется такой температурный процесс, при котором $t = t(x, y, z, \tau)$ неизвестная функция положения точки и времени τ .

Для определения температуры дополнительно рассматривают уравнение теплопроводности

$$\chi \nabla^2 t + \frac{W}{c\rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

Для определения температуры дополнительно рассматривают уравнение теплопроводности

$$\chi\nabla^2 t + \frac{W}{c\rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

где $\chi = \frac{k}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности;

k - коэффициент теплопроводности;

c - удельная теплоемкость;

ρ - плотность;

W - количество тепла, которое выделяется в единице объема за единицу времени источником тепла, расположенным внутри элементарного объема dV.

Уравнение теплопроводности интегрируют с учетом различных условий на поверхности. Наиболее часто при решении задач встречаются следующие случаи:

1. Температура на поверхности является заданной функцией от координат и времени.

2. Поток тепла через поверхность тела равен нулю, т.е. во всех точках поверхности с нормалью ν.

$$\frac{\partial t}{\partial \nu} = 0$$

3. Поток тепла через поверхность тела является заданной функцией от координат и времени.

4. Происходит излучение с поверхности. Если поток тепла через поверхность пропорционален разности температур на границе между телом (t) и окружающей средой (t0), т.е. определяется выражением $H\left(t-t_0\right)$

где H-коэффициент теплоотдачи, то граничное условие имеет вид:

$$k\frac{\partial t}{\partial v}+H\left(t-t_0\right)=0$$

5. на границе двух слоев

$$k_1\frac{\partial t_1}{\partial v}=k_2\frac{\partial t_2}{\partial v}$$