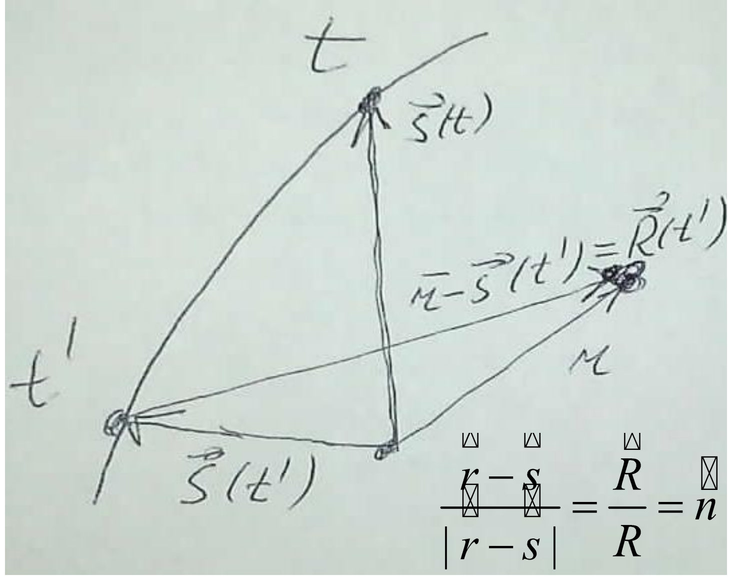
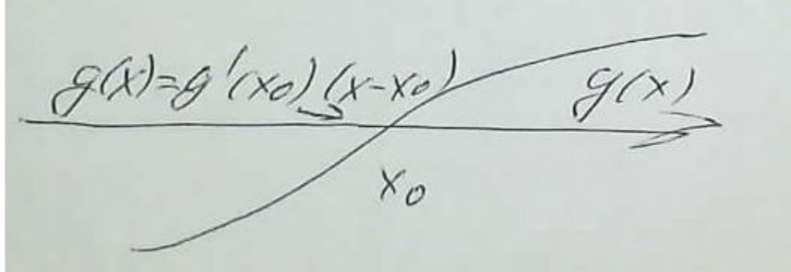
6. Потенциалы Лиенара-Вихерта.
Поле точечного заряда.

6.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта



$$\frac{\vec r-\vec s}{|\vec r-\vec s|}=\frac{\vec R}{R}=\vec n$$

$$(t-t')=\frac{|\vec r-\vec s(t')|}{c}\Rightarrow t'=t_k'(\vec r,t)$$



$\vec s(t)$ — *закон движения*

$$\rho(\vec r,t)=e\delta(\vec r-\vec s(t))$$

$$\vec j(\vec r,t)=e\vec V(t)\delta(\vec r-\vec s(t))$$

$$\vec V=\frac{d\vec s}{dt}$$

$$\varphi(\vec r,t)=\int\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}\delta(\vec r'-\vec s(t'))d\vec r'dt'$$

$$\vec A(\vec r,t)=\frac{e}{c}\int\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}\vec V(t')\delta(\vec r'-\vec s(t'))d\vec r'dt'=$$

$$=\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec V(t')}{|\vec r'-\vec s(t')|}\delta\left(t'-\left(t-\left(\frac{|\vec r'-\vec s(t')|}{c}\right)\right)\right)dt'$$

$$\int\delta(g(x))f(x)dx=\int\delta(g'(x_0)(x-x_0))f(x)dx=\int\frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0)f(x)dx=\frac{1}{|g'(x_0)|}f(x_0)$$

$$g(x_0)=0$$

6.1(+) Потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x - x_0) \quad g(t') = t' - (t - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c}) = 0$$

$$(t - t') = \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c} \Rightarrow t' = t_k'(\vec{r}, t)$$

$$\frac{dg(t')}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{\partial(\vec{r} - \vec{s})} * \frac{\partial(\vec{r} - \vec{s})|}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{x_j - s_j}{|\vec{r} - \vec{s}|}(-V_j) = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|}\vec{V} = 1 - \frac{\vec{n}\vec{V}}{c}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{c}\frac{\vec{V}(t')}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|(1 - \frac{\vec{n}\vec{V}}{c})}, [t' = t_k'(\vec{r}, t)]$$

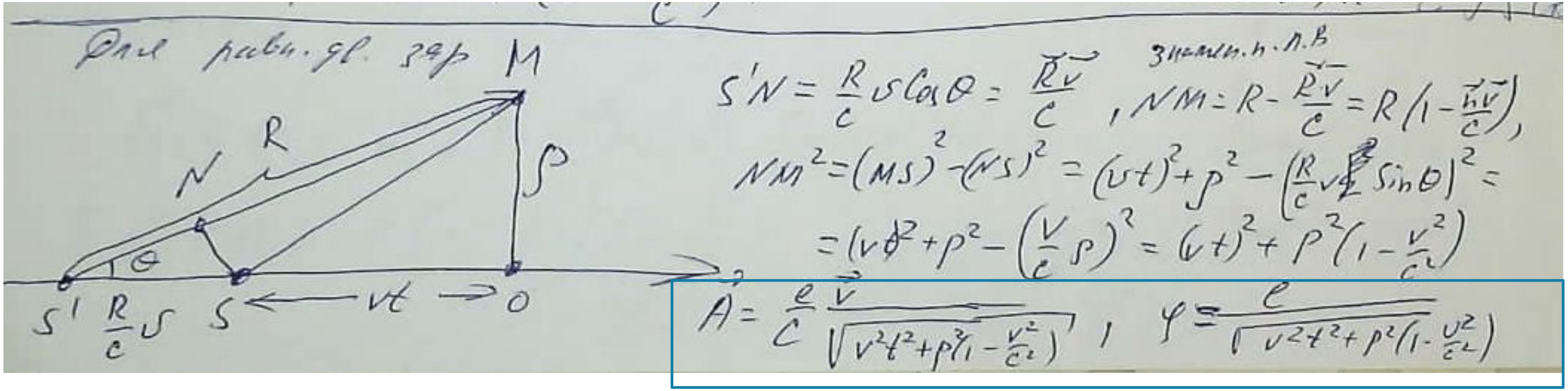
$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|(1 - \frac{\vec{n}\vec{V}}{c})}, [t' = t_k'(\vec{r}, t)]$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{n}$$

6.1(++) Потенциалы Лиенара-Вихерта (равн движ заряд)

$$(t-t') = \frac{|\vec r - \vec s(t')|}{c} \Rightarrow t' = t'_k(\vec r,t)$$

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{e}{c}\frac{\vec V(t')}{|\vec r-\vec s(t')|(1-\frac{\vec n\vec V}{c})}, [t'=t'_k(\vec r,t)] \qquad \varphi(\vec r,t) = \frac{e}{|\vec r-\vec s(t')|(1-\frac{\vec n\vec V}{c})}, [t'=t'_k(\vec r,t)]$$



6.2 Поле точечного заряда (H=rotA ...)

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_j} = \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x_j} = -\frac{1}{R^2}\frac{R_j}{R}$$

$$\vec{H} = \frac{e}{c}\nabla\times\int\frac{\vec{v}(t')}{R}\delta(t-t'-\frac{R}{c})dt' = \frac{e}{c}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\frac{v_k(t')}{R}\delta(t-t'-\frac{R}{c})dt'$$

$$\vec{H} = \frac{e}{c}\int[\varepsilon_{ijk}(-\frac{R_j}{R})v_k\delta(t-t'-\frac{R}{c}) + \varepsilon_{ijk}\frac{1}{R}v_k\delta'(t-t'-\frac{R}{c})(-\frac{1}{c})\frac{R_j}{R}]dt'$$

$$\vec{H} = \frac{e}{c}\frac{(\vec{n}\times\vec{v})(-1)}{R^2(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})} + \ldots = \frac{e}{cR^2}\frac{(\vec{n}\times\vec{v})}{(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})} + \ldots; t' = t'_k$$

$$\delta(t-t'-\frac{R}{c}) = \frac{\delta'(t-t')}{1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial\delta(x-a)}{\partial x}dx = f(x)\delta(x-a)|(-\infty;\infty) - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f'(x)dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial x}$$

$$\frac{e}{c}\int\frac{(\vec{n}\times\vec{v})}{cR}\frac{d\delta(t-t'-\frac{R}{c})}{dt'}\frac{1}{\frac{d(t-t'-\frac{R}{c})}{dt'}}dt' = \frac{e}{c}\int\frac{(\vec{n}\times\vec{v})}{(-1)(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})R}d\delta(t-t'-\frac{R}{c}) =$$

$$= (-1)(-1)\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t'-t'_k)}{(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})R}\frac{d}{dt'}\frac{(\vec{n}\times\vec{v})}{(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})}dt'$$

$$\frac{dR}{dt'} = -\vec{n}\vec{v};\ \frac{d\vec{n}}{dt'} = \frac{d}{dt'}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{v}}{R} + (-\frac{1}{R^2})(\frac{\vec{R}}{R}*(-\vec{v}))\vec{R} = -\frac{\vec{v}}{R} + \frac{\vec{n}(\vec{n}\vec{v})}{R} = \frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v})}{R}$$

$$\vec{H} = \frac{e(1-\frac{v^2}{c^2})(\vec{n}\times\vec{v})}{cR^2(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^3} + \frac{e(\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{n} + \vec{n}\times[(\vec{v}\times\frac{d\vec{v}}{dt})\times\vec{n}])}{c^3R(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^3}$$

аналогично

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{n}(t')\times\vec{E}(r,t');\ t' = t'_k$$

$$\vec{E}(r,t) = \frac{e(1-\frac{v^2}{c^2})(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c})}{R^2(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^3} + \frac{e\vec{n}\times[(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c})\times\frac{d\vec{v}}{dt}]}{c^2R(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c})^3}$$

6.3 Поток энергии. Формула Лармора.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c}\right)^3}+\frac{e\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right]}{c^2R\left(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c}\right)^3}$$

Кулон

Излучение

поток энергии в телесный угол $d\Omega$ $\quad(\vec{H}=\vec{n}\times\vec{E})$

$$dI=\vec{Sp}*\vec{n}R^2d\Omega=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}))*\vec{n}R^2d\Omega=$$

$$=(\text{только второе слагаемое}, E\perp\vec{n})=\frac{c}{4\pi}E^2R^2d\Omega$$

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{e^2\left(\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right]\right)^2}{4\pi c^3\left(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c}\right)^6}$$

$$\frac{v}{c}<<1$$

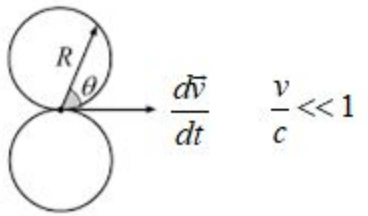
$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\right]^2=\left[\vec{n}*(\vec{n}*\vec{v})-\frac{d\vec{v}}{dt}\right]^2=\sin^2\theta\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2*\frac{e^2}{4\pi c^3}$$

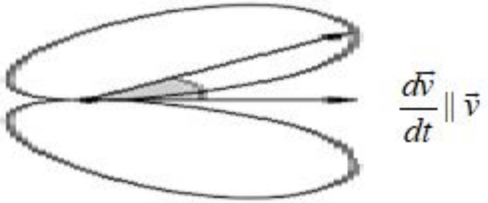
Формула Лармора для нерелятивисткого заряда

$$P=\int\frac{dI}{d\Omega}d\Omega=2\pi\frac{e^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2}{4\pi c^3}\int_{-1}^{1}d\cos\theta(1-\cos^2\theta)=$$

$$\frac{e^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2}{2c^3}\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1;1}=\frac{e^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2}{2c^3}\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\frac{e^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2}{c^3}=\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2}{c^3}$$

$$\frac{v}{c}\sim 1,\quad\frac{d\vec{v}}{dt}\parallel\vec{v}\quad\frac{dI}{d\Omega}=\sin^2\theta\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2*\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}$$





На этом обсуждение темы
«Потенциалы Лиенара-Вихерта.
Поле точечного заряда.»
в курсе онлайн-лекций завершено

До новых встреч!