Математическая обработка результатов измерений

1. Виды погрешностей.
2. Случайные погрешности измерений.
3. Оценка истинного значения измеряемой величины.
4. Оценка точности измерений.
5. Сравнительные исследования.

Расхождение между истинным значением определяемой величины и полученным результатом измерения носит название *погрешности измерения*

(*ошибки измерения*).

1. Виды погрешностей

1. Систематические погрешности -

это погрешности, вызванные каким-либо постоянным воздействием, которое во время измерения нельзя устранить.

ПРИЧИНА

постоянно действующий фактор, не изменяющийся от измерения к измерению.

конфискованные гири

«В прошлом номере в статье "ПанеГИРИк базарной дешевизне" мы рассказали о весах и гирях на рынках нашего города. О том, что почти везде весы показывают неправильный вес, а большинство гирь весят меньше указанного на них номинала».

УСТРАНЕНИЕ:

сверка с эталонами, исправление прибора и, в целом, устранение
известного мешающего фактора.

Главная палата
мер, весов и часов

2. Промахи -

это результаты, выпадающие из общего ряда измерений.

ПРИЧИНА

невнимание экспериментаторов,
нечеткая градуировка прибора
и т. д.

УСТРАНЕНИЕ:

при обработке обычно отбрасывают.

В экспертной практике принято правило «трех сигм»: для исключения возможного промаха необходимо, чтобы его значение отличалось от среднего арифметического остальной серии измерений больше, чем на утроенное значение σ.

3. Случайные погрешности -

это погрешности, вызванные влиянием различных случайных факторов, влияние которых и их значение во время измерения нельзя предусмотреть;

в виду этого при различных измерениях погрешности могут менять свой знак и величину, причем нельзя заранее указать ее значение.

ПРИЧИНЫ

вызываются причинами, влияние которых изменяется от измерения к измерению, и эти причины не могут быть учтены.

УСТРАНЕНИЕ:

с помощью математической обработки результатов измерений.

2. Случайные погрешности измерений

Целью математической обработки результатов измерений

является оценка величины случайных погрешностей и определение интервалов, в которых с необходимой степенью надежности находится истинное значение измеряемого признака.

Свойства случайных погрешностей

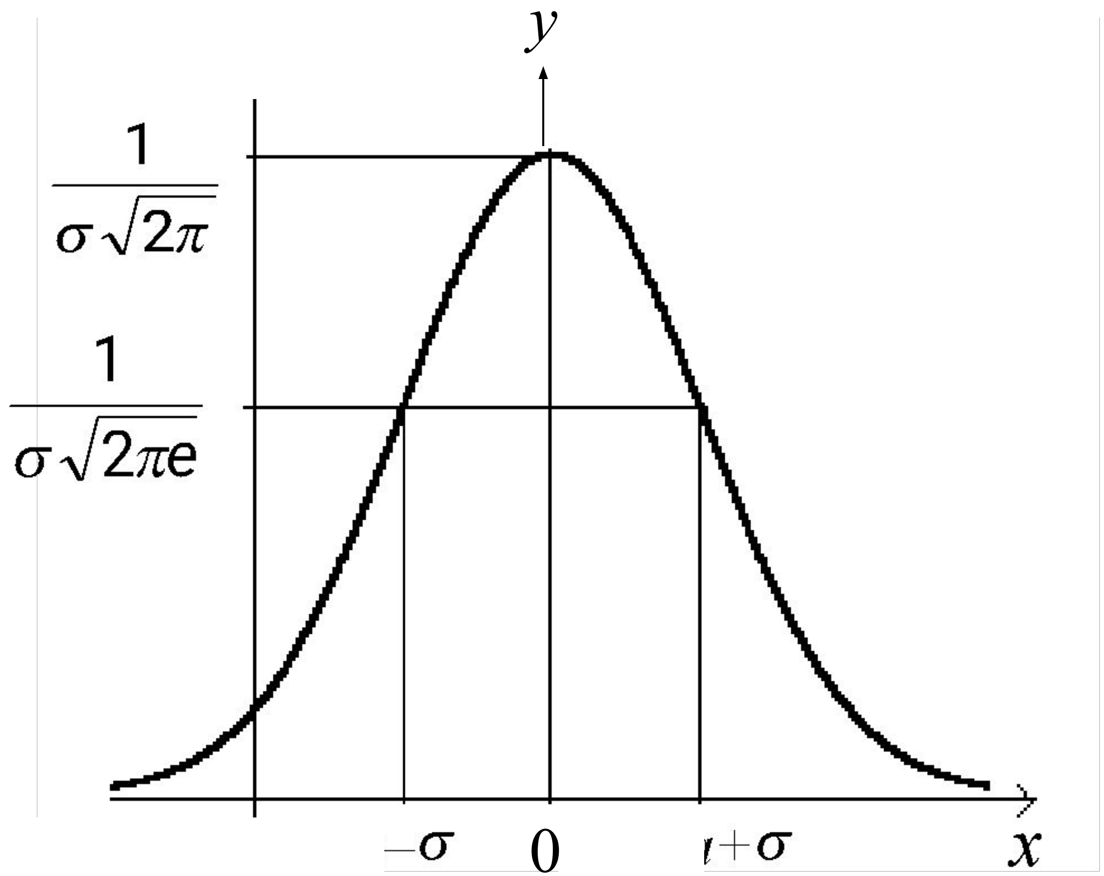
– для данных условий измерений случайные ошибки не могут превосходить по модулю известного предела;

– при достаточно большом количестве измерений случайные ошибки, одинаковые по величине, но различные по знаку, встречаются одинаково часто;

Свойства случайных погрешностей

– большие по абсолютной величине ошибки встречаются намного реже, чем малые, то есть вероятность появления ошибки уменьшается с ростом величины ошибки;

– с увеличением числа измерений среднее арифметическое случайных ошибок одинаковой точности измерений одной и той же величины неограниченно стремится к нулю.



y
1/(σ√2π)
1/(σ√2πe)
−σ
0
ι+σ
x

3. Оценка истинного значения измеряемой величины

Если все измерения некоторой величины произведены с одинаковой точностью, то они называются *равноточными.*

результаты отдельных измерений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

истинное значение измеряемой величины

$$\tilde{X}$$

3. 1 Точечная оценка

Точечной оценкой

называют статистическую оценку, которая определяется одним числом

$$\theta = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$n \to \infty \qquad \bar{x} \to \widetilde{X}$$

3. 2 Интервальная оценка

Задача интервальной оценки:

по данным выборки построить такой числовой интервал (*доверительный*), внутри которого с заранее заданной вероятностью, близкой к единице, будет находиться оцениваемый параметр.

Пусть для неизвестного параметра $\tilde{X}$ найдена оценка $\bar{x}$ и задана вероятность *p*, близкая к единице (доверительная вероятность). Требуется найти такое значение δ, чтобы интервал

$$\left(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta\right)$$

длины 2δ накрыл искомое значение параметра $\tilde{X}$ с вероятностью *p*.

$$p = P(\left|\widetilde{X} - \overline{x}\right| < \delta)$$

$$p = P(\overline{x} - \delta < \widetilde{X} < \overline{x} + \delta)$$

Ширина доверительного интервала определяется по формуле:

$$\boxed{\delta = \frac{t(n,p)\cdot\sigma^{*}}{\sqrt{n}}}$$

где, число *t(n,p)* определяется по специальным таблицам критических точек распределения Стьюдента;

σ^* – исправленное среднее квадратическое отклонение.

4. Оценка точности измерений

Точность измерения в случае точечной оценки

Средней абсолютной ошибкой называется среднее арифметическое модулей всех ошибок:

$$\theta = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$$

Точность измерения в случае точечной оценки

Среднеквадратическая ошибка (стандарт):

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\Delta x_1^{\ 2} + \Delta x_2^{\ 2} + \ldots \Delta x_n^{\ 2}}{n-1}}$$

	Диаметр пули	**Толщина бумаги**
$\bar{X}$	7,62 мм	0,1 мм
σ^*	0,1 мм	0,1 мм

Точность измерения в случае точечной оценки

Коэффициент вариации (относительная среднеквадратическая ошибка)

$$V^* = \frac{\sigma^*}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

	Диаметр пули	**Толщина бумаги**
$\bar{X}$	7,62 мм	0,1 мм
σ^*	0,1 мм	0,1 мм
V_1^*	0,13%	10%

Точность измерения в случае интервальной оценки

Ширина доверительного интервала:

$$\delta = \frac{t(n, p) \cdot s}{\sqrt{n}}$$

Точность измерения в случае интервальной оценки

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Проведен химический анализ чистого образца $BaCl \cdot 2H_2O$ на процентное содержание Ва. Получены следующие результаты:

56,10%, 56,05%, 56,00%,

55,95%, 56,30%, 55,83%.

Провести обработку результатов измерений при надежности $\alpha = 95\%$.

1. Определим среднее арифметическое ряда измерений

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{56,1 + 56,05 + 56,00 + 55,95 + 56,3 + 55,83}{6}$$

$$\bar{x} = 56,04(\%)$$

2. Рассчитаем абсолютную погрешность каждого отдельного измерения:

$$\boxed{\Delta x_i = x_i - \bar{x}}$$

Δx_1 = 56,10 – 56,04 = 0,06 %;

Δx_2 = 56,05 – 56,04 = 0,01 %;

Δx_3 = 56,00 – 56,04 = – 0,04 %;

Δx_4 = 55,95 – 56,04 = – 0,09 %;

Δx_5 = 56,30 – 56,04 = 0,26 %;

Δx_6 = 55,83 – 56,04 = – 0,21.

3. Вычислим величину исправленного среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n\text{-}1}}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(0{,}06)^2 + (0{,}01)^2 + (-0{,}04)^2 + (-0{,}09)^2 + (0{,}26)^2 + (-0{,}21)^2}{6 - 1}}$$

$$\sigma^* = 0{,}16(\%)$$

4. Определим значение ширины доверительного интервала:

$$\boxed{\delta = \frac{t(n,p)\cdot\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\delta = \frac{2{,}57\cdot 0{,}16}{\sqrt{6}} = 0{,}17\%$$

5. Найдем относительную ошибку:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{\bar{x}} \cdot 100\%}$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}17}{56{,}04} \cdot 100\% = 0{,}3$$

Вывод:

После шести измерений установлено, что с надежностью 95% содержание Ва находится в интервале (55,87%; 56,21%).

Относительная ошибка измерений 0,3 %

5. Сравнительные исследования

УСЛОВИЕ 1

Сравниваемые серии измерений различаются в том случае, если выполняется неравенство:

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

$$\rho_i = 0{,}6745 \cdot \frac{\sigma^*{}_i}{\sqrt{n}}$$

Пример 1:

В таблице приведены результаты определения толщины двух кусков проволоки.

Различаются ли статистически устойчиво оценки результатов?

Пример 1:

Объект	Значение	Среднее	Δx_i^2	σ^*	$\sigma^*/\sqrt{n}$	ρ
	1,45		0			
	1,47		0,04			
1	1,41	1,45	0,16	0,026	0,012	0,008
	1,45		0			
	1,48		0,09			
	1,52		0,04			
	1,56		0,04			
2	1,51	1,54	0,09	0,22	0,01	0,006
	1,56		0,04			
	1,54		0			

Пример 1:

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| = \left|1{,}54 - 1{,}45\right| = 0{,}09$$

$$4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} = 4 \cdot 0{,}010 = 0{,}04$$

Пример 1:

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

Следовательно, сравниваемые комплексы измерений статистически устойчиво отличаются.

Пример 1:

Сравниваемые серии измерений различаются в том случае, если выполняется неравенство:

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

$$\rho_i = 0{,}6745 \cdot \frac{\sigma^*{}_i}{\sqrt{n}}$$

УСЛОВИЕ 2

Сравниваемые комплексы измерений статистически устойчиво различаются с данной степенью вероятности p^2, если доверительные интервалы, определенные для каждой серии с доверительной вероятностью p не перекрываются.

Пример 2:

Для указанных в примере 1 данных установить различаются ли они статистически устойчиво.

Пример 2:

$$t(5;\ 0{,}95)=2{,}78;\ \delta_1=0{,}033;\ \delta_2=0{,}028$$

(1,417;1,483)

(1,512;1,568)

Поскольку доверительные интервалы не пересекаются, то с вероятностью $p=0{,}95^2=0{,}9025$ можно утверждать, что эти комплексы измерений устойчиво отличаются

Диалог на экзамене.

Преподаватель: - Что такое лошадиная сила?

Студент: - Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм.

Преподаватель: - Где же вы такую лошадь видели?!

Студент: - А ее просто так не увидишь. Она хранится в Париже, в Палате мер и весов.