ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

# Замена переменной
# ( подведение под знак дифференциала)

ПОВТОРЕНИЕ

# Правило дифференцирования сложной функции

Сложная функция (или функция от функции) $y = f(g(x))$

дифференц $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## Восстановление сложной первообразной функции

Проблема состоит в том, что изначально все интегралы задаются в виде

$$\int f(x)dx$$

**Вы сами должны представить подынтегральную функцию в виде произведения двух сомножителей. Один сомножитель – это новая (отличная от $f(x)$) сложная функция $h$ от внутренней функции $g(x)$, а второй сомножитель – это производная внутренней функции $g'(x)$.**

$$f(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$$

Если такое представление сделать удалось, то процесс интегрирования можно оформить цепочкой равенств.

$$\int f(x)dx = \int h(g(x))\cdot(g(x))'\cdot dx = \left| \begin{array}{c} \text{Замена} \\ t = g(x) \\ dt = (g(x))'dx \end{array} \right| =$$

$$= \int h(t)dt = H(t)+C = H(g(x))+C$$

Предполагается, что новый интеграл $\int h(t)\,dt$ - либо табличный, либо легко в него преобразуется.

Главный вопрос – какую часть подынтегральной функции обозначить за новую переменную? Однозначного ответа нет. Но следует помнить, что внутренняя функция может стоять $g(x)$ где угодно – в знаменателе, под корнем, под знаком логарифма, в степени показательной функции, в аргументе тригонометрической функции, а её производная может быть только сомножителем.

*Пример 1.* Найти интеграл $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

*Решение.* $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Самое главное и одновременно самое сложное в начале решения – увидеть дифференциальную связь между двумя частями подынтегральной функции.
В данном примере такими частями являются числитель $\boldsymbol{x}$ и сумма в знаменателе $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$. Важно вспомнить, что производная этой суммы $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})' = 2\boldsymbol{x}$, т.е. почти равна числителю $\boldsymbol{x}$. Можно сказать и иначе : выражение $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$ – это почти первообразная для числителя $\boldsymbol{x}$. Забудьте на время, что в подынтегральной функции есть ещё операция деления. На этапе замены переменной она роли не играет. Не старайтесь сразу учесть все действия, которые есть в подынтегральной функции

За новую переменную ***t*** нужно обозначить ту часть подынтегральной функции, производная которой равна (или очень близка ) к другой части подынтегральной функции.

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} \textit{Замена} \\ t = 1 + x^2 \\ dt = \left(1 + x^2\right)' dx = 2x\,dx \end{matrix} \right|$$

***<u>Замечание</u>***. Если Вы ввели новую переменную ***t***, то все подынтегральное выражение должно содержать только переменную ***t*** , в том числе и дифференциал должен быть ***dt***. Но нельзя просто механически заменить ***dx*** на ***dt***. Выражение, которое Вы замените на ***dt***, находится в заготовке замены.

В примере 1 в подынтегральном выражении есть только ***xdx,*** а нужно **2*xdx.***
Здесь у Вас два способа.
***Способ1***: выразить произведение ***xdx*** из равенства ***dt = 2xdx*** как $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$.

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{c} \textit{Замена} \\ t = 1 + x^2 \\ dt = \left(1+x^2\right)' dx = 2x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

***Способ2***: искусственно сделать в числителе подынтегральной дроби ***2xdx,***
умножив числитель на 2, а весь интеграл на $\dfrac{1}{2}$ .

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{c} \textit{Замена} \\ t = 1 + x^2 \\ dt = \left(1+x^2\right)' dx = 2x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

# ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ
# как подведение под знак дифференциала

Замену переменной интегрирования можно сделать и без переобозначения внутренней функции $g(x)$ новой буквой $\boldsymbol{t}$. Последовательность действий в этом случае задается цепочкой равенств.

$$\int f(x)dx = \int h(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int h(g(x))dg(x) = H(g(x)) + C$$

Использовали понятие дифференциала функции $dg(x) = g'(x) \cdot dx$

Этот метод ещё называется **подведением под знак дифференциала** (**ППЗД**).

Образно говоря, производная $g'(x)$ перемещается за букву $\boldsymbol{d}$ вправо, превращаясь при этом в свою первообразную $g(x)$ и становясь новой переменной интегрирования ***вместо x***.

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\int (2x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)'\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\,1+x^2\,\right| + C$$

**Можно было бы ……**

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \int x\cdot(arctg\,x)'\cdot dx = \int x\cdot d(arctg\,x)$$

Верно. Но! Бесполезно, т.к. оставшаяся после подведения под знак дифференциала функция сократилась до $x$ и выражение её через $arctg\,x$ возможно, но не рационально.

*Пример 2.* Найти интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$

*Решение.*

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Замена} \\ t = x^2+3 \\ dt = (x^2+3)'dx = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \int \frac{dt}{2\cdot\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+3} + C$$

# ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

## методом определения независимой переменной *x* как новой функции новой переменной *t*.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$ . Определим ***x*** как функцию новой переменной ***t***, а именно, $x = \varphi(t)$. Предположим, что функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема, т.е. существует производная $x' = \varphi'(t)$ и её дифференциал $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$ . Тогда переход к новой переменной интегрирования в искомом интеграле задается цепочкой равенств.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\, d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\, \varphi(t)' \cdot dt = \int y(t)dt = Y(t) + C$$

Разумеется, последним шагом в решении будет возврат к старой переменной $x$

по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$. Например, $x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$.

Или $x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{2}$

***Внимание!***

Символом $\varphi^{-1}(x)$ здесь обозначается функция, обратная функции $\varphi(t)$, как на калькуляторах.

Но!! $\varphi^{-1}(t) \neq \dfrac{1}{\varphi(t)}$

Именно с помощью такой замены находятся интегралы от функций, содержащих корни разных степеней (или иначе от иррациональностей).

# Интегрирование простейших иррациональностей

*Пример* . Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Цель замены –
чтобы все корни извлеклись!

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{c} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \\ t=\sqrt[4]{x} \end{array} \right| = \int \frac{4t^3dt}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^3dt}{t(t+1)} =$$

$$= 4\int \frac{t^2dt}{t+1} = 4\int \frac{(t^2-1+1)\,dt}{t+1} = 4\int \frac{(t^2-1)}{t+1}dt + 4\int \frac{dt}{t+1} = 4\int (t-1)\,dt + 4\ln|t+1| =$$

$$= 4\left(\frac{t^2}{2}-t\right) + 4\ln|t+1| + C = 4\left(\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}{2}-\sqrt[4]{x}\right) + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt[4]{x}\right) + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C$$

*Пример* . Найти интеграл $\int \sqrt{5-x^2}\,dx$

*Решение*.

$$\int \sqrt{5-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Замена} \\ x=\sqrt{5}\sin t \\ dx=\sqrt{5}\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{5-\left(\sqrt{5}\sin t\right)^2}\,\sqrt{5}\cos t\,dt =$$

$$= \int \sqrt{5}\cdot\sqrt{1-(\sin t)^2}\,\sqrt{5}\cos t\,dt = 5\int \cos t\cdot\cos t\,dt = 5\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 5\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{5}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{5}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \left| \begin{array}{c} x=\sqrt{5}\sin t \\ \Downarrow \\ t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right)+C$$