

Лекция 3. Диэлектрическая проницаемость сред с временной и пространственной дисперсией

1. Комплексные тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости

- а. Интегральная формулировка материальных уравнений электродинамики
- б. Комплексные проводимость и диэлектрическая проницаемость

2. Соотношения Крамерса-Кронига

- а. Два свойства комплексных проводимости и диэлектрической проницаемости
- б. Соотношения Крамерса-Кронига для проводимости
- в. Соотношения Крамерса-Кронига для диэлектрической проницаемости
- г. Применение соотношений Крамерса-Кронига
- д. О материальных средах без временной дисперсии

3. Диэлектрическая проницаемость газа осцилляторов

- а. Электронная теория диэлектрической проницаемости
- б. Нормальная и аномальная дисперсия

4. Диэлектрическая проницаемость изотропной горячей плазмы в гидродинамическом приближении

- а. Уравнения многожидкостной гидродинамики
- б. Продольная и поперечная диэлектрические проницаемости изотропной плазмы

5. Диэлектрическая проницаемость плазмы в магнитном поле

$$\mathbf{j} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{E}$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'),$$

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}').$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'),$$

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}').$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp[i\omega(t - t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\sigma}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) = \hat{\sigma}_{ij}(\tau)\delta(\boldsymbol{\rho}), \quad \sigma_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \hat{\sigma}_{ij}(\tau) \exp(i\omega\tau), \quad \varepsilon_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau) \exp(i\omega\tau).$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) = \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau)\delta(\boldsymbol{\rho}).$$

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega) = \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(-\omega), \quad \operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega) = -\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(-\omega),$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{ij}(\omega) = \operatorname{Re} \sigma_{ij}(-\omega), \quad \operatorname{Im} \sigma_{ij}(\omega) = -\operatorname{Im} \sigma_{ij}(-\omega).$$

$$\tau \rightarrow \infty \quad \hat{\sigma}_{ij}(\tau) \rightarrow 0$$

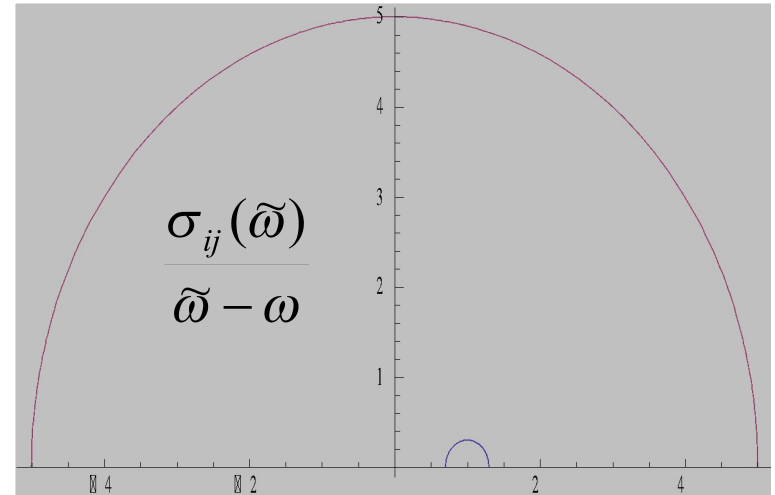
$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(\omega) = 0, \quad \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} = \int_{-\infty}^{\omega-\mu} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} + \int_{\omega+\mu}^{\infty} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} + \int_{C_{\mu}} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} + \int_{C_{\infty}} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} = 0$$

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega}$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{ij}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega},$$

$$\operatorname{Im} \sigma_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega}.$$



$$\varepsilon_{ij}(\omega) - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi i} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}(\tilde{\omega}) - \delta_{ij}}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} + i \frac{4\pi\sigma_{ij}(0)}{\omega}$$

$$\text{Re} \varepsilon_{ij}(\omega) - \delta_{ij} = \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} \varepsilon_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega},$$

$$\text{Im} \varepsilon_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re} \varepsilon_{ij}(\tilde{\omega}) - \delta_{ij}}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} + \frac{4\pi\sigma_{ij}(0)}{\omega}.$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = (\varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0)\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}(0) = \sigma_0$$

$$\text{Re} \sigma(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \quad \text{Im} \sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{\omega_0^2 \nu}{4\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{\omega} - \omega)(\tilde{\omega}^2 + \nu^2)} d\tilde{\omega} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2}$$

$$\sigma(\omega) = i \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{1}{\omega + i\nu},$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + i\nu)}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\tau) = \sigma_{ij}^0 \delta(\tau) \rightarrow \sigma_{ij}(\omega) = \sigma_{ij}^0$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}^0 \rightarrow \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau) = \delta_{ij} \delta(\tau) + 4\pi \sigma_{ij}^0$$

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = en_0 \mathbf{d}(t, \mathbf{r})$$

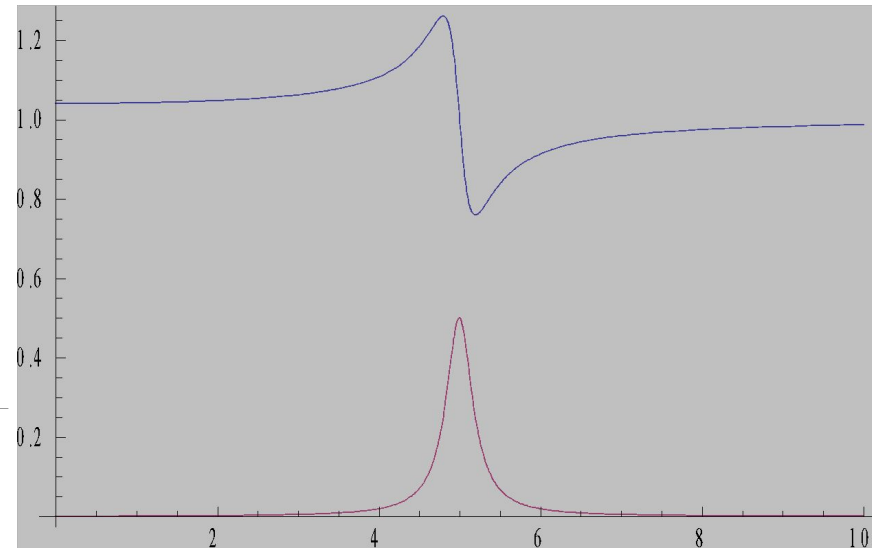
$$\nabla \cdot \mathbf{d} + \gamma \mathbf{d} + \omega_s^2 \mathbf{d} = \frac{e}{m} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d})] \}$$

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{P}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{P}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{e^2 n_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + 4\pi \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \quad \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega} \quad \omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{s\alpha}^2 + i\gamma_{\alpha}\omega}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega^2 - \omega_s^2)}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + i \frac{\omega_0^2 \gamma \omega}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$



$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha = -V_{\gamma\alpha}^2 \frac{\nabla N_\alpha}{N_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\} - v_\alpha \mathbf{V}_\alpha.$$

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{j}_\alpha}{\partial t^2} = V_{\gamma\alpha}^2 \nabla(\nabla \mathbf{j}_\alpha) + \frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - v_\alpha \frac{\partial \mathbf{j}_\alpha}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega}{4\pi [\omega(\omega + iv_\alpha) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2]} \left[\mathbf{E}^l + \left(1 - \frac{k^2 V_{\gamma\alpha}^2}{\omega(\omega + iv_\alpha)} \right) \mathbf{E}^{tr} \right]$$

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + iv_\alpha) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2} \quad \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + iv_\alpha) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2} \left(1 - \frac{k^2 V_{\gamma\alpha}^2}{\omega(\omega + iv_\alpha)} \right)$$

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + iv_\alpha)}$$

$$\mathbf{E}^l = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2} \rightarrow E_i^l = \frac{k_i k_j}{k^2} E_j, \quad \mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l \rightarrow E_i^{tr} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j,$$

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \left[\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \frac{k_i k_j}{k^2} + \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right] E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} - \Omega_\alpha [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{b}_0] = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \mathbf{V}_\alpha$$

$$i(\omega + i\nu_\alpha) \mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) + \Omega_\alpha [\mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{b}_0] = -\frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$$

$$j_{\alpha x} = i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2} [(\omega + i\nu_\alpha) E_x + i\Omega_\alpha E_y],$$

$$j_{\alpha y} = i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2} [(\omega + i\nu_\alpha) E_y - i\Omega_\alpha E_x],$$

$$j_{\alpha z} = i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)} E_z.$$

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad i, j = x, y, z$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(\omega) & \sigma_{xy}(\omega) & 0 \\ \sigma_{yx}(\omega) & \sigma_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(\omega) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{xx}(\omega) = \sigma_{yy}(\omega) = (4\pi)^{-1} i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega + i\nu_\alpha)}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2},$$

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\sigma_{yx}(\omega) = -(4\pi)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2},$$

$$\sigma_{zz}(\omega) = (4\pi)^{-1} i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega + i\nu_\alpha}.$$

$$\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{yy}(\omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega + i\nu_\alpha)}{\omega [(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2]},$$

$$\varepsilon_{xy}(\omega) = -\varepsilon_{yx}(\omega) = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega [(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2]},$$

$$\varepsilon_{zz}(\omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_\alpha)},$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0.$$