Лекция 6: Статистическое моделирование

1. Общие сведения о статистическом моделировании.
2. Методы генерирования случайной величины.
3. Марковские процессы.

1 Общие сведения о статистическом моделировании

Основным отличием статистических методов является построение генеральной совокупности:

последовательность вариантов исходных данных, поступающих на вход системы, определяется не самим исследователем в зависимости от плана эксперимента, а генерируются с помощью датчика случайных чисел на компьютере.

Далее реакция проверяется не на реальном объекте исследований, а на модели.

Таким образом, основное место при использовании статистических методов занимает компьютер.

В качестве моделей, на которых проверяется возможная реакция системы, применяются:

- ***вероятностные аналитические модели***

  (влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов. Это приводит к усложнению вычислительной задачи и ограничивает применение данных моделей сравнительно простыми системами);

- ***имитационные модели***

  (введение случайных возмущений не вносит принципиальных усложнений, что делает их наиболее часто применяемыми).

Исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационного моделирования принято называть ***статистическим моделированием***.

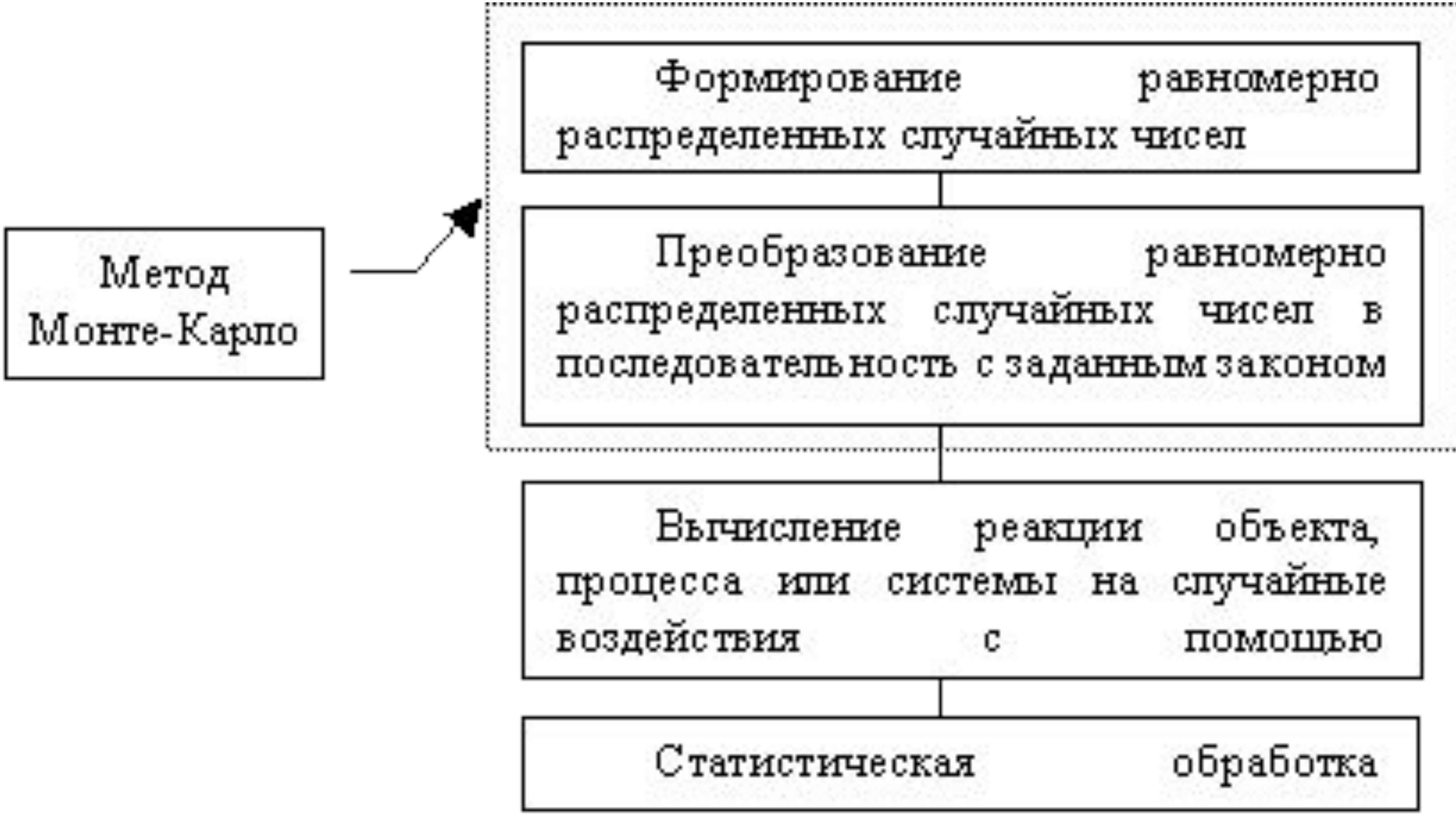
Статистическая модель случайного процесса - это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям, причем полагается, что взаимодействие элементов системы носит вероятностный характер.

Оценка параметров модели осуществляется с помощью статистических методов: метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов.

Этапы методики статистического моделирования:

1. Моделирование на компьютере псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих случайные значения параметров при каждом испытании.
2. Преобразование полученных числовых последовательностей на имитационных математических моделях в генеральную совокупность.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.

Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний



Две области применения метода статистического моделирования:

- для изучения стохастических систем;
- для решения детерминированных задач.

В детерминированных системах предсказываемые значения могут быть вычислены точно, а в стохастических – лишь с некоторой долей вероятности.

Основная идея *для решения детерминированных задач*: замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи.

Достоинства:

- уменьшение погрешности с ростом числа испытаний (статистическая устойчивость результатов);
- возможность получения сведений о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени.

Основная сложность - учет стохастических воздействий:

- точность получаемых оценок зависит от размера совокупности случайных чисел, генерируемых системой, что приводит к *росту вычислительных затрат*, обусловленных созданием данной совокупности;
- качество получаемых на основе статистических моделей результатов, их точность и достоверность определяются исходными (базовыми) последовательностями случайных чисел. Это приводит к *необходимости разработки простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел* требуемого качества.

2 Методы генерирования случайной величины

Методы, используемые для получения случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками, ***различаются видом распределения*** случайной величины на заданном интервале (a,b):

- ***равномерным*** $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$;

- ***нормальным***;

- ***распределением Бернулли*** (случайная величина принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью 1=1-p ;

- ***биномальным*** $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ (n – общее число испытаний; m – число успешных опытов);

- ***Пуассона*** (вероятность реализации случайной величины со значением m и параметром распределения λ:

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda)$$

Численный метод, моделирующий случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0,1), получил название "***метод статистических испытаний***" или "***метод Монте-Карло***".

Задачу ***моделирования случайных чисел*** с нормальным законом распределения решают в несколько ***этапов***:

1. Вначале имитируют равномерное распределение и получают последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале (0,1).
2. Затем, используя равномерно распределенную псевдослучайную величину, получают последовательность псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения (чаще всего в нормированном виде, т.е. $M_x = 0,\ \sigma = 1$).

Основные способа формирования последовательности нормально распределенных случайных величин:

1. ***Прямое преобразование*** псевдослучайного числа y являющегося реализацией случайной величины Y, равномерно распределенной на интервале [0,1], с помощью некоторой функции W в число x, которое может рассматриваться как реализация случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения.
2. **Отсеивание псевдослучайных чисел** из первоначальной последовательности Y равномерно распределенной на интервале [0,1], таким образом, чтобы оставшиеся числа были распределены по нормальному закону.
3. ***Моделирование условий***, соответствующих центральной предельной теореме теории вероятности.

Методы моделирования нормально распределенной случайной величины:

- ***полярных координат***

(первый способ получения. Вычисляет две независимые нормально распределенные случайные величины x_1 и x_2 с $M_x = 0$ и $\sigma = 1$ по двум заданным независимым равномерно распределенным случайным числам y_1 и y_2;

- ***метод, основанный на центральной предельной теореме***

(третий способ получения. Основан на приближенном воспроизводстве условий, при которых справедлива центральная предельная теорема теории вероятности)

3 Марковские цепи

Под ***марковским процессом*** понимается случайный процесс, эволюция которого после любого заданного значения временного параметра t не зависит от эволюции, предшествовавшей t, при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано.

«Будущее» процесса не зависит от «прошлого» при известном «настоящем».

Понятие введено в 1907г А.А. Марковым.

Направление известно под названием ***теории цепей Маркова или «динамики вероятностей»***.

Основы общей теории марковских процессов с непрерывным временем были заложены Колмогоровым.

По существу марковские цепи аналогичны методу динамического программирования.

Отличие: на каждом шаге учитывается вероятность попадания системы в то или иное состояние. В связи с этим этот метод называют ***стохастическим динамическим программированием***.

Область применения: исследование операций и теория принятия оптимальных решений.

Основаны на понятии случайной функции и относятся к частным случаям случайных процессов.

Если аргументом случайной функции является время или какой-то другой аргумент, то такой ***процесс*** называют ***случайным***.

Случайные процессы могут быть *с дискретным* или *непрерывным состоянием или временем*.

Важное свойство случайных процессов - вероятностная связь между состояниями случайного процесса.

(Если в случайном процессе вероятность перехода системы в каждое последующее состояние зависит только от предыдущего состояния, то такой процесс называется ***процессом без последействия – сложная цепь)***. Обычно применяют так называемый процесс укрупнения состояний путем математических преобразований, объединяя предшествующие состояния в одно.

Марковский процесс удобно задавать графом переходов из состояния в состояние.

Два варианта описания марковских процессов – **с дискретным и непрерывным временем**:

В первом случае переход из одного состояния в другое происходит *в заранее известные моменты времени* – такты (1, 2, 3, 4, …). Переход осуществляется на каждом такте, то есть исследователя интересует только последовательность состояний, которую проходит случайный процесс в своем развитии, и не интересует, когда конкретно происходил каждый из переходов.

Во втором случае исследователя интересует и цепочка меняющих друг друга состояний, и моменты времени, в которые происходили такие переходы.

Если вероятность перехода не зависит от времени, то ***марковскую цепь*** называют ***однородной***.

Рассмотрим *численный пример*, в котором имитируется стрельба из пушки по цели.

Определим следующие три состояния: S_0 — цель не повреждена; S_1 — цель повреждена; S_2 — цель разрушена.

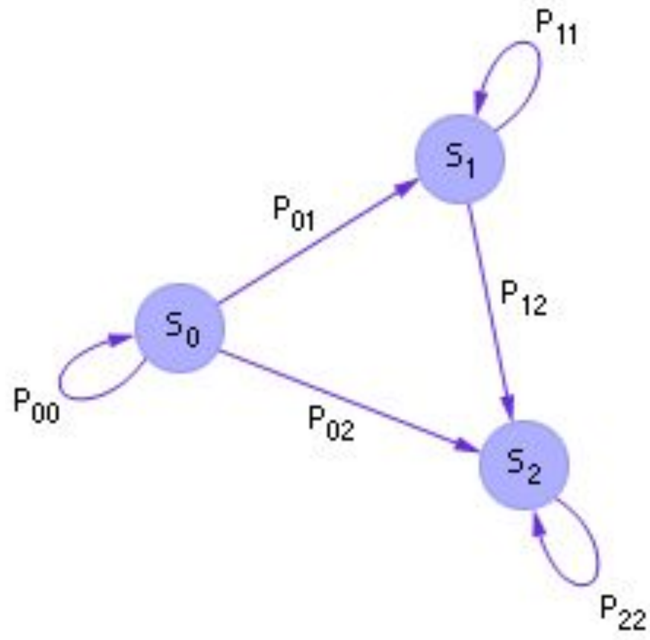
Таблица 2 – Вектор начальных вероятностей

	S_0	S_1	S_2
P_0	0,8	0,2	0

Таблица 3 – Матрица вероятностей перехода дискретного марковского процесса

	В S_0	В S_1	В S_2	Сумма вероятностей переходов
Из S_0	0.45	0.40	0.15	0.45+0.40+0.15=1
Из S_1	0	0.45	0.55	0+0.45+0.55=1
Из S_2	0	0	1	0+0+1=1

Представление процесса в виде марковской цепи



Проимитируем, используя таблицу случайных чисел, процесс стрельбы.

Пусть начальное состояние будет S_0. Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, ….

Проимитируем, используя таблицу случайных чисел, процесс стрельбы.

Пусть начальное состояние будет S_0. Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, ….

0.31: цель находится в состоянии S_0 и остается в состоянии S_0, так как $0 < \mathbf{0.31} < 0.45$; **0.53**: цель находится в состоянии S_0 и переходит в состояние S_1, так как $0.45 < \mathbf{0.53} < 0.45 + 0.40$;

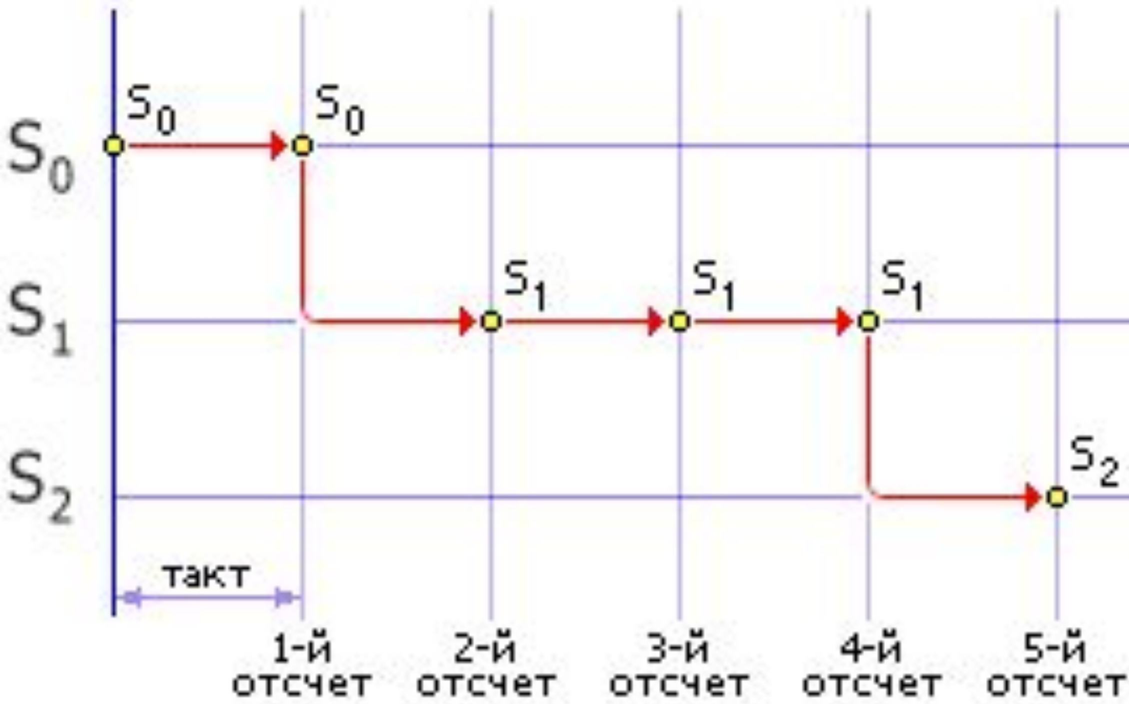
0.23: цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1, так как $0 < \mathbf{0.23} < 0.45$;

0.42: цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1, так как $0 < \mathbf{0.42} < 0.45$;

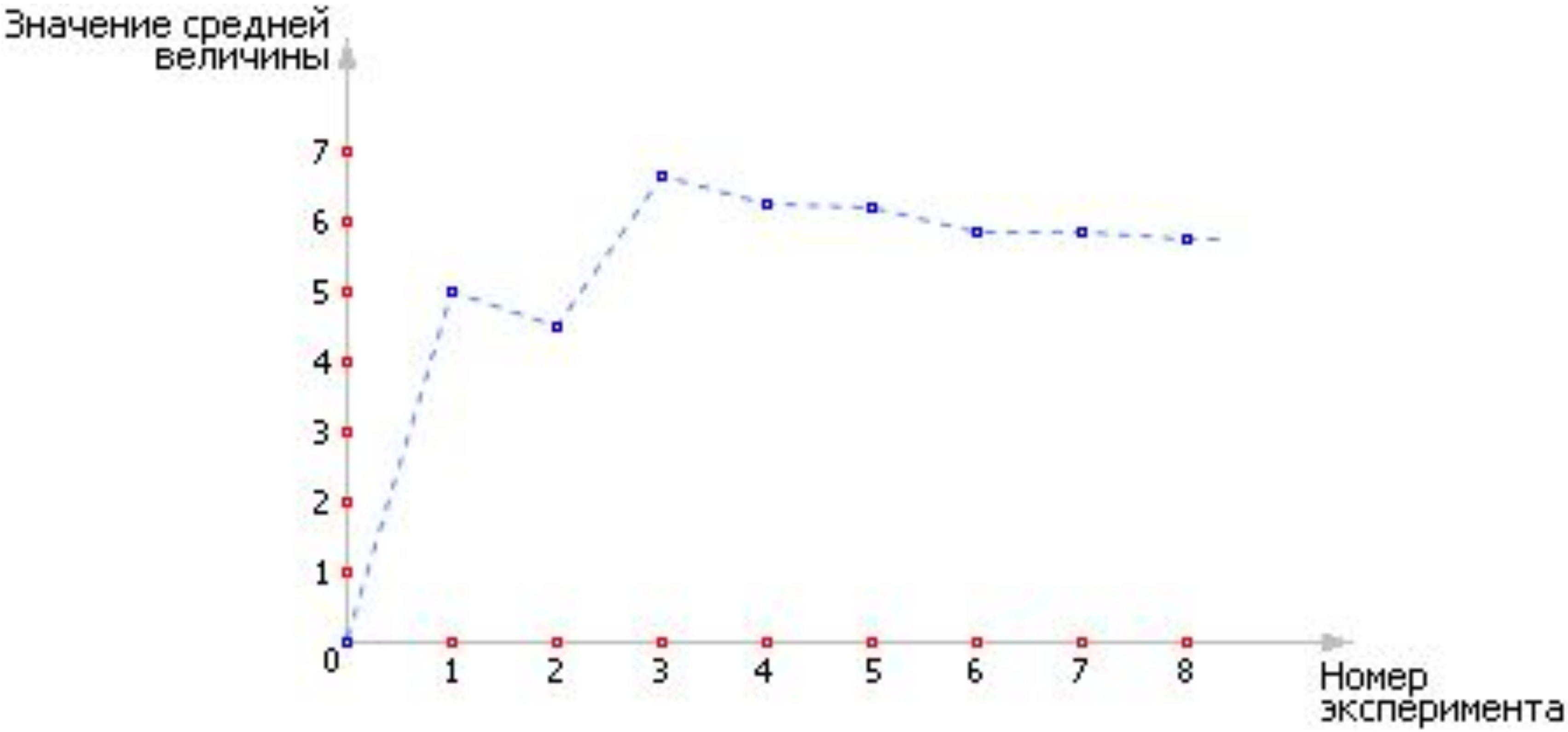
0.63: цель находится в состоянии S_1 и переходит в состояние S_2, так как $0.45 < \mathbf{0.63} < 0.45 + 0.55$.

Так как достигнуто состояние S_2 (далее цель переходит из S_2 в состояние S_2 с вероятностью 1), то цель поражена. Для этого в данном эксперименте потребовалось ***5 снарядов***.

Временная диаграмма, получаемая во время процесса моделирования



Повторяя циклы моделирования случайных процессов, получаем статистику:



Ряд сходится к некоторой величине, которая и является ответом. В нашем случае – это 6. Именно столько снарядов в среднем рекомендуется иметь в боевом запасе пушки для уничтожения цели при таких вероятностях попаданий.