Презентация к курсу:
«Исследование операций»
Тема:
«Элементы теории игр»

Выполнила:
студентка 5 курса,
факультета Математики, Информатики, Физики
Группы И - 51
Ченцова Е.А.
Научный руководитель:
Астахова Н.А. к. п. н. , доцент

Во многих практических задачах возникают ситуации, когда требуется принять решение, не имея достаточной информации.

Неизвестными могут быть как условия осуществления какой-либо операции, так и сознательные действия лиц, от которых зависит успех этой операции.

Основные определения

- Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух сторон и результат любой операции, осуществляемой одной из сторон, зависит от действий другой стороны, называются ***конфликтными***
- Математическая модель конфликтной ситуации называется ***игрой,*** а математическая теория, помогающая принимать рациональные решения в конфликтной ситуации, - ***теорией игр***
- Конфликтующие стороны называются ***игроками,*** а действия, которые могут выполнять игроки, - ***стратегиями.***

Матричной игрой называется игра, осуществляемая по следующим правилам:

1. В игре участвуют два игрока

2. Каждый из игроков обладает конечным набором стратегий

3. Игра заключается в том, что каждый из игроков, не имея информации о действиях противника, делает один ход (выбирает одну из своих стратегий). Результатом выбора игроками стратегий является выигрыш и проигрыш в игре.

4. И выигрыш, и проигрыш выражаются числами

- Матричная игра называется ***игрой с нулевой суммой,*** если в этой игре *выигрыш* одного игрока *равняется проигрышу* другого игрока
- ***Ход игры*** – этап в развитии игры, а именно выбор одним из участников варианта развития игры в рамках правил данной игры. Ходы могут быть личными и случайными.
- ***Цель игры*** – поиск оптимальной стратегии, т.е. стратегии которые при многократном повторении обеспечит игроку максимально возможный средний выигрыш и минимально возможный средний проигрыш

- Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет ***платежную матрицу***

- Для того чтобы построить эту матрицу, обозначим одного из игроков *символом A,* а другого - *символом B,* и предположим, что $A_1, A_2, \dots, A_m$ – *стратегии,* которые может применять *игрок A, а* $B_1, B_2, \dots, B_n$ - *стратегии,* которые может применять *игрок B*

- Матричная игра, в которой у игрока *A* имеется *m стратегий,* а у игрока *B* - *n стратегий,* называется ***игрой типа mxn***

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица С:
c_{ij} *(i =1,...,m; j =1,...,n)* - выигрыши игрока А (и проигрыши игрока *B)* при применении игроками стратегий A_i и B_j соответственно

C - ***платежная матрица игры***

Игра с монетами

Каждый из двух партнеров, не зная выбора другого, выкладывает монету гербом или цифрой вверх. При совпадении сторон обе монеты первый игрок забирает, в противном случае их забирает второй. Построить матрицу игры.

(Г, Г) (Г, Ц)
(Ц, Г) (Ц, Ц)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Игра «Открывание пальцев»

- Два игрока одновременно из сжатого кулака правой руки открывают по нескольку пальцев.
- Общее количество открытых пальцев является суммой выигрыша, причем, если общее количество открытых пальцев четно, то выигрывает первый игрок, если же общее количество открытых пальцев нечетно, то выигрывает второй игрок.

Необходимо составить платежную матрицу игры

Решение

- Поскольку каждый из игроков может открыть 1, 2, 3, 4 или 5 пальцев, то у каждого из них имеется по 5 соответствующих стратегий:
- Стратегии A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, *у первого игрока, и* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, *- у второго.*
- Таким образом, рассматриваемая игра является матричной игрой типа 5х5, и можно составить таблицу выигрышей, в зависимости от стратегий, применяемых игроками.

Данные представим в таблице

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	3	4	5	6
A_2	3	4	5	6	7
A_3	4	5	6	7	8
A_4	5	6	7	8	9
A_5	6	7	8	9	10

Платежная матрица игры:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Нижняя и верхняя цена игры (принцип минимакса)

- ***Игрок А*** выбирая стратегию ***с номером i*** понимает что ***игрок В*** в свою очередь ответит на нее той из стратегий согласно которой ***выигрыш игрока А будет минимальным***
- Поэтому ***в каждой строке платежной матрицы*** выбирается ***минимум. Из этих минимумов игрок А выберет максимум,*** тем самым определит для себя оптимальную стратегию, полученное число называется ***максиминным или нижней ценой игры.***
- ***Игрок В*** в свою очередь выбирая стратегию понимает, что его проигрыш не превысит максимального числа в фиксированном столбце. Согласно данной логике ***в каждом столбце*** мы выбираем ***максимальный элемент***, а из этих ***максимумов мы выбираем минимум,*** это и будет ***верхняя цена игры.***

Пример

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

В каждой ***строке*** платежной матрицы найдем ***наименьший элемент***, и запишем его ***справа*** от матрицы.

В каждом ***столбце*** платежной матрицы найдем ***наибольший элемент***, и запишем его ***снизу*** от матрицы.

Решение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 10 & 4 & 3 & 10 \end{matrix}$$

Нижняя цена игры:
α= max{1,3,-2}=3

Верхняя цена игры:
B=min{10,4,3,10}=3

Если в задаче ***нижняя цена совпадает с верхней*** , то такую игру называют ***игрой с седловой точкой.***

Если седловой элемент есть, то ***решение игры*** – это упорядоченная тройка чисел.

Первый элемент – оптимальная стратегия игрока А, соответствующая седловому элементу.

Второй – оптимальная стратегия игрока В, соответствующая седловому элементу.

Третья – сам седловой элемент.

Игры со смешанными стратегиями

- Найти оптимальные смешанные стратегии и цену игры, заданной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

- Найдем верхнюю и нижнюю цену игры.
- ***Нижняя цена:*** выбираем в каждой строке min(3,2) из этих минимумов выбираем max=3
- ***Верхняя цена:*** в каждом столбце выбираем max(4,5) из этих максимумов выбираем min=4
- ***Игра без седловой точки***

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \qquad \vec{Y} = (y_1, y_2)$$

Решение (продолжение)

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = \lambda \\ 5x_1 + 2x_2 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 = \lambda \\ 4y_1 + 2y_2 = \lambda \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

Решение (продолжение)

$$x_1 = 1 - x_2$$

$$3 - 3x_2 + 4x_2 = 5 - 5x_2 + 2x_2$$

$$3 + x_2 = 5 - 3x_2$$

$$4x_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = 1 - y_2$$

$$3 - 3y_2 + 5y_2 = 4 - 4y_2 + 2y_2$$

$$4y_2 = 1$$

$$y_2 = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Решение (продолжение)

$$3*\frac{1}{2}+4*\frac{1}{2}=\lambda$$

$$\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\lambda$$

$$\lambda=\frac{7}{2}$$

$$3*\frac{3}{4}+5*\frac{1}{4}=\lambda$$

$$\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=\lambda$$

$$\lambda=\frac{7}{2}$$

Решение (продолжение)

$$5*\frac{1}{2}+2*\frac{1}{2}=\lambda$$

$$\frac{5}{2}+\frac{2}{2}=\lambda$$

$$\lambda=\frac{7}{2}$$

$$4*\frac{3}{4}+2*\frac{1}{4}=\lambda$$

$$\frac{12}{4}+\frac{2}{4}=\lambda$$

$$\lambda=\frac{7}{2}$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{7}{2}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется игрой?
2. Что называется матричной игрой?
3. Что называется матричной игрой типа *mxn* ?
4. Какая игра называется игрой с нулевой суммой?
5. Что называется нижней ценой игры?
6. Что называется верхней ценой игры?
7. Что называется ценой игры?
8. В чем состоит принцип минимакса?
9. Какая игра называется игрой с седловой точкой?
10. Что называется седловой точкой?

Используемая литература:

- Борзунова Т.Л., Барыкин М.П. , Данилов Е.А. Соловьева О.Ю. - Математическое моделирование: учебное пособие/ВолгГТУ, - Волгоград, 2008.
- Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.