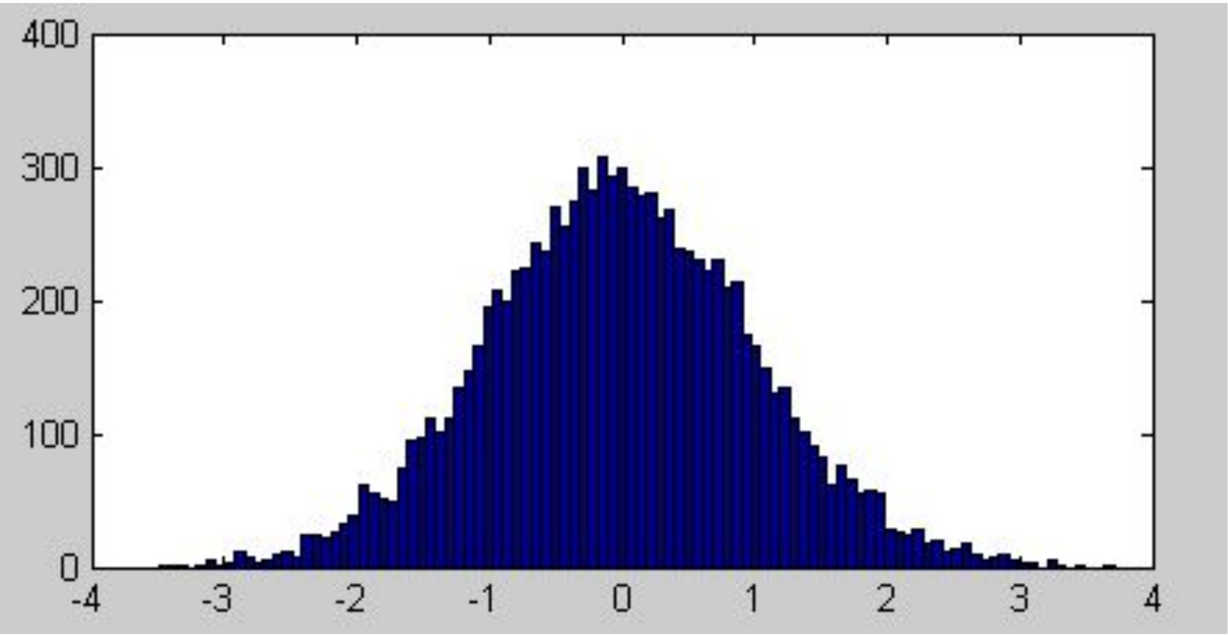
Линейные регрессионные модели с гетероскедастичными и автокоррелированными остатками

1. Предпосылки метода наименьших квадратов
2. Гетероскедостичность, выявление и устранение
3. Автокорреляция, выявление и устранение
4. Мультиколлениарность, выявление и устранение

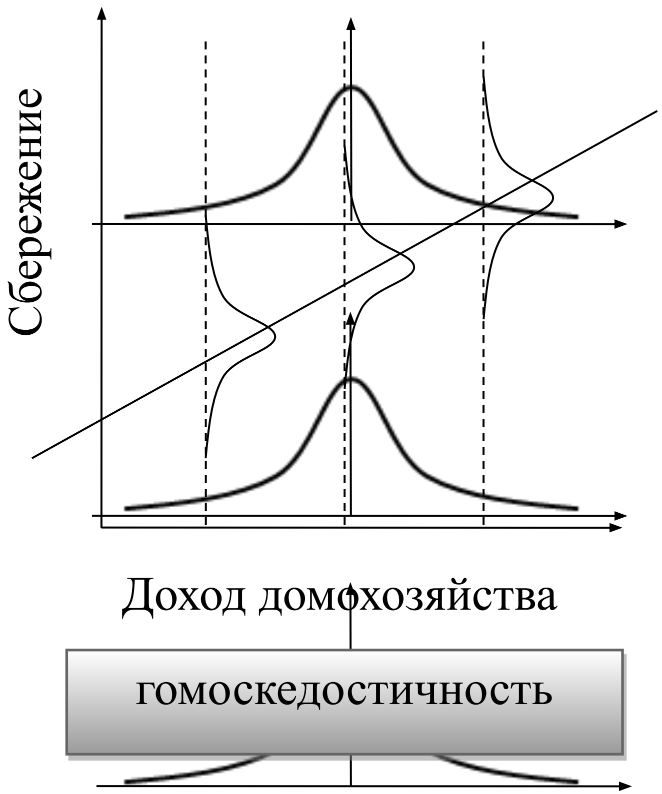
Предпосылки метода наименьших квадратов

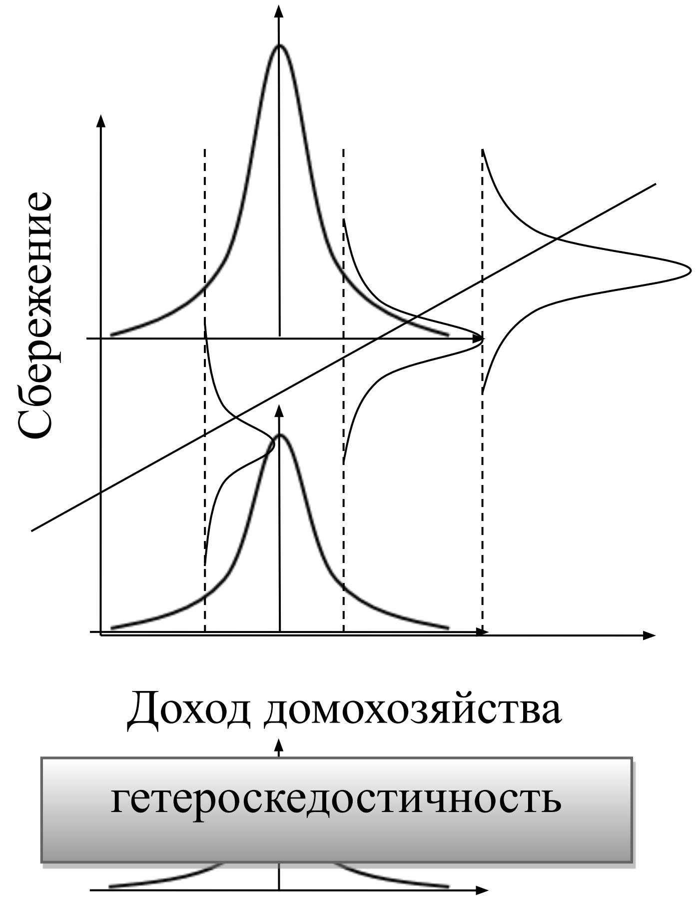
Условия Гаусса-Маркова

1. условие $M(\varepsilon_i) = 0$
2. условие $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$
3. условие $M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0 \ (i \neq j)$
4. условие



Гетероскедостичность, выявление и устранение



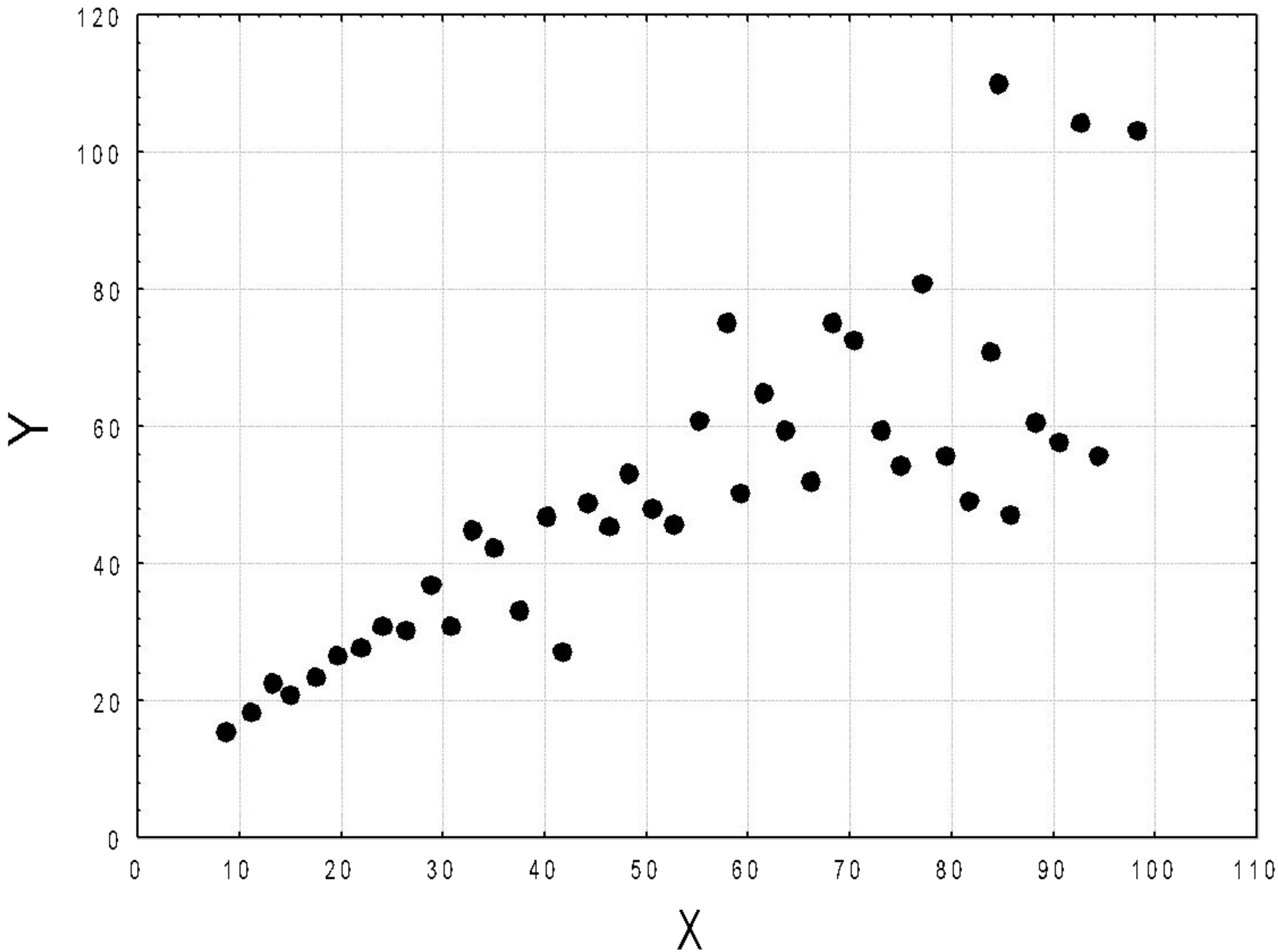


гомоскедостичность

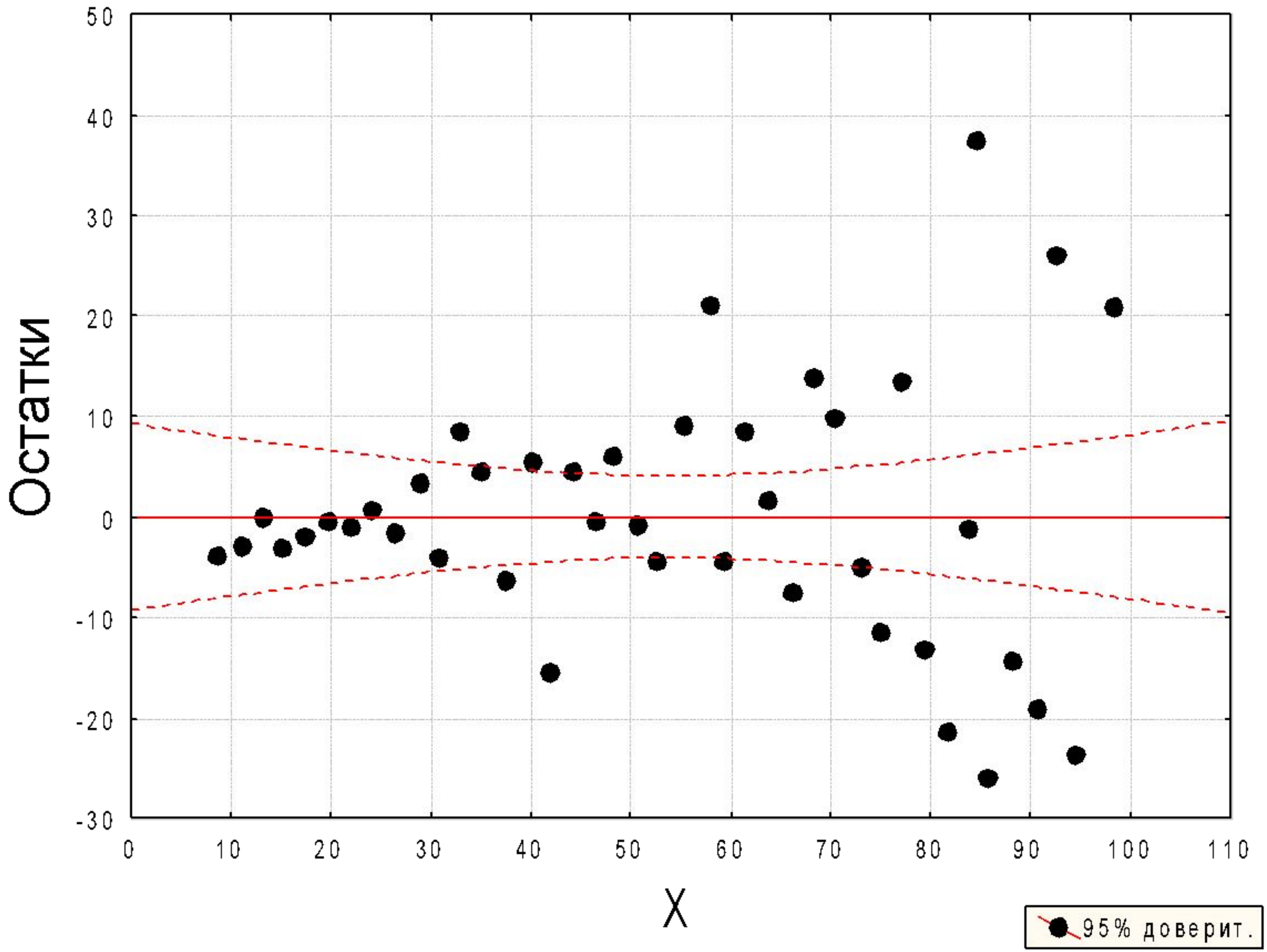
гетероскедостичность

Пример гетероскедостичности в пространственных данных: эффект масштаба

X – стоимость основных производственных фондов (млн. руб.)
Y – прибыль предприятия (млн. руб.).



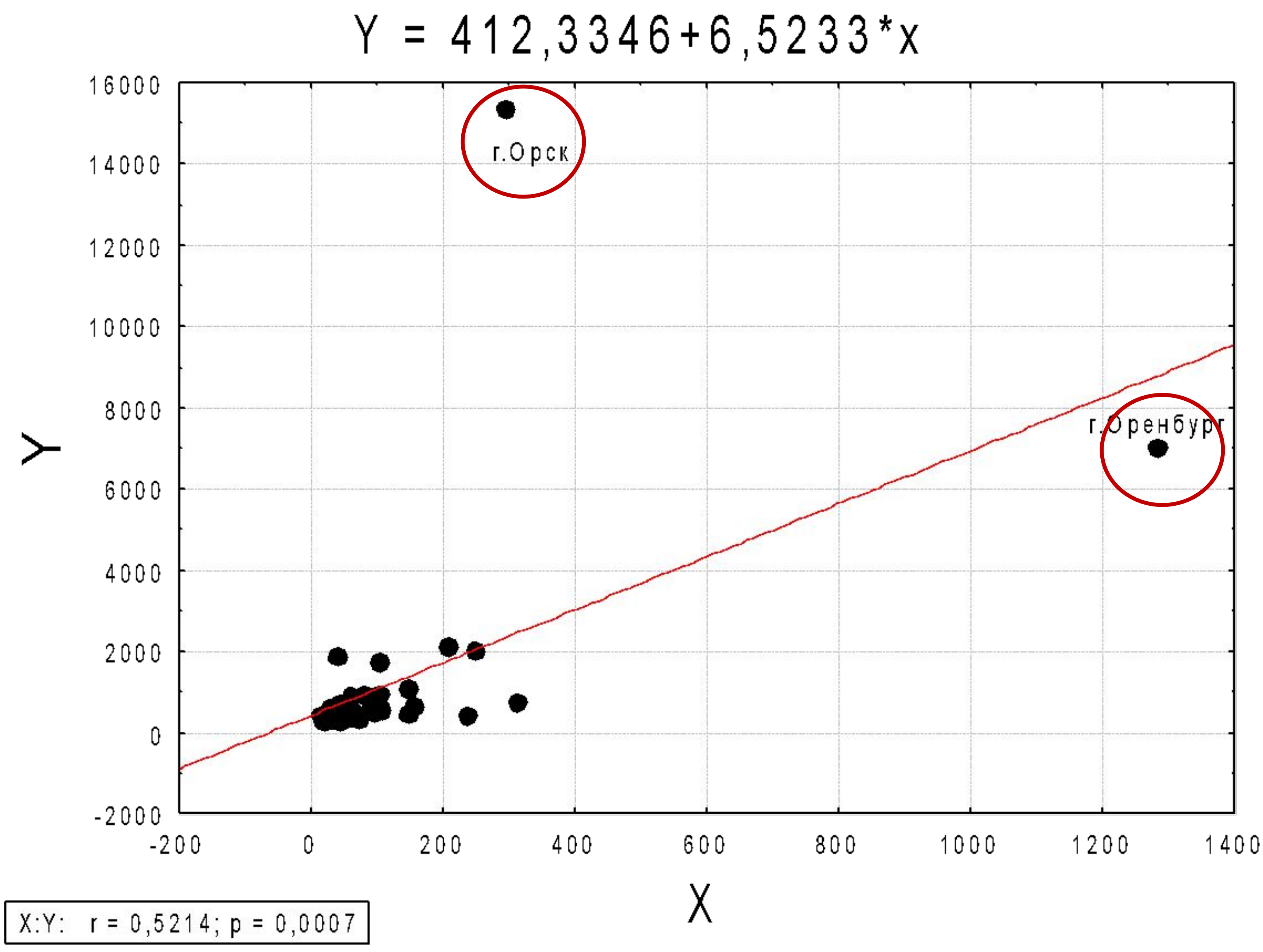
120
100
80
60
40
20
0
Y
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
X

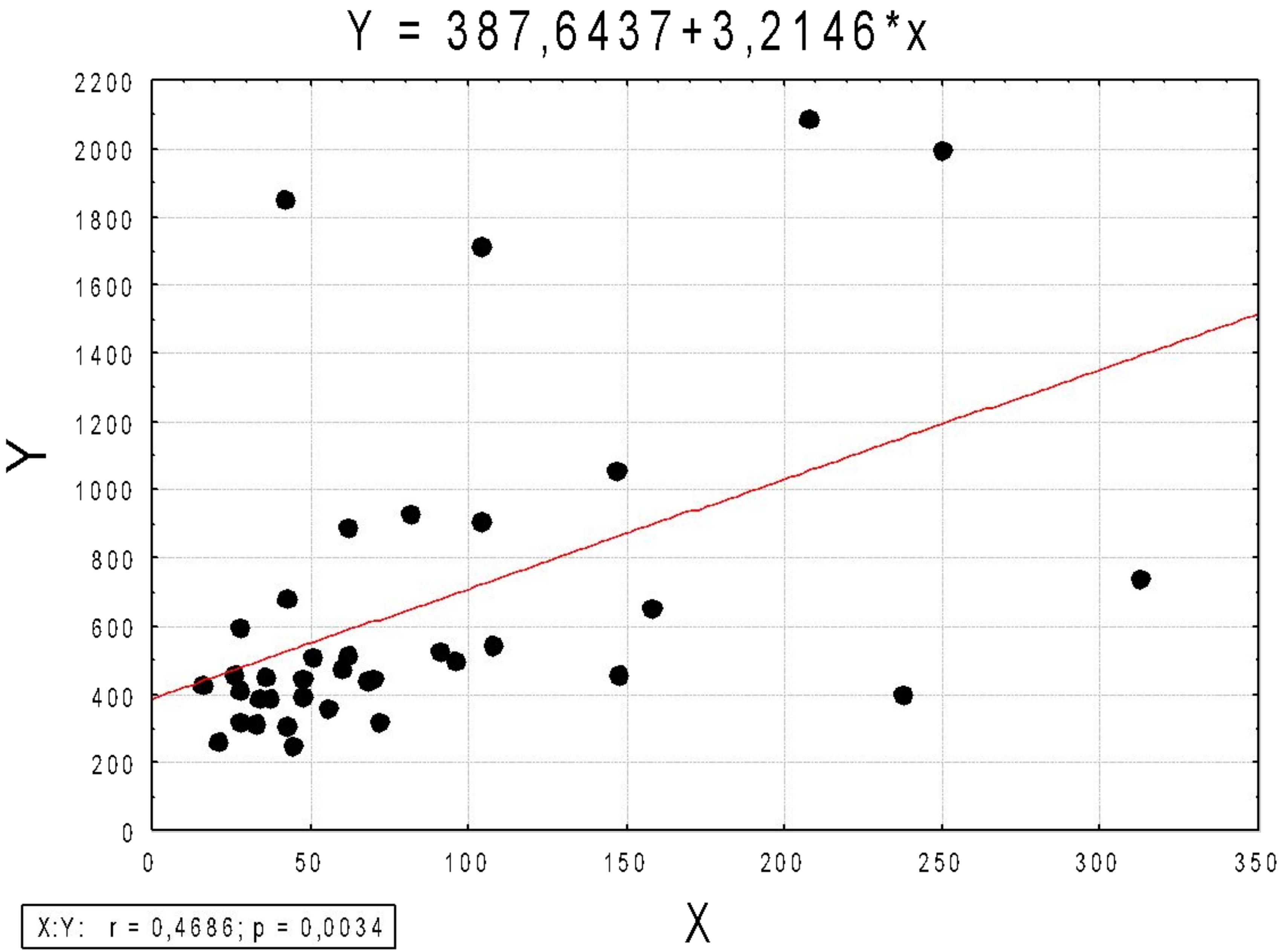

Остатки
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
X
95% доверит.

Пример гетероскедостичности в пространственных данных: эффект выбросов

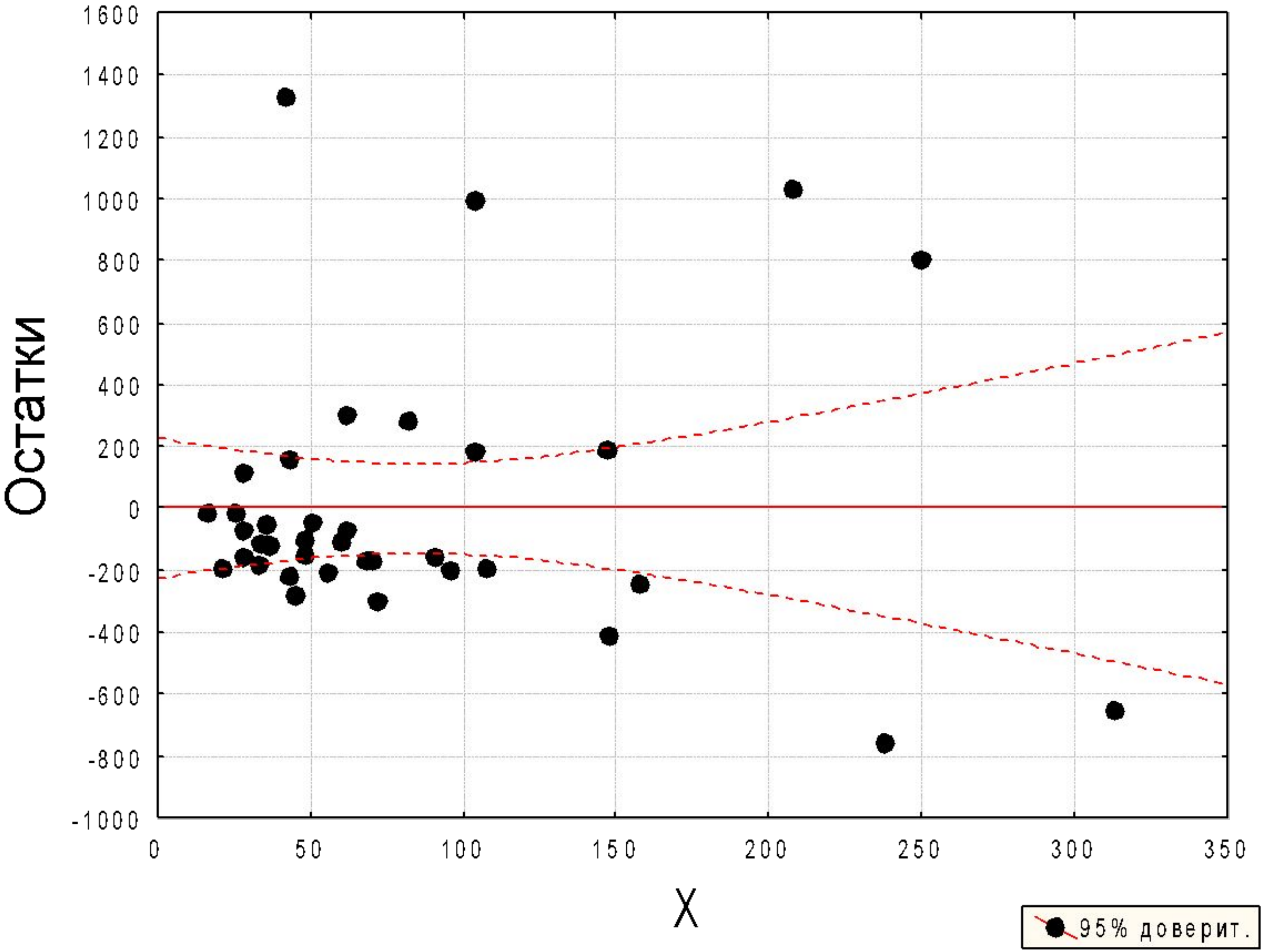
X - численность официально зарегистрированных безработных (чел.)

Y - число зарегистрированных преступлений (ед.).


Y = 412,3346+6,5233*x
г.Орск
г.Оренбург
Y
X
X:Y: r = 0,5214; p = 0,0007



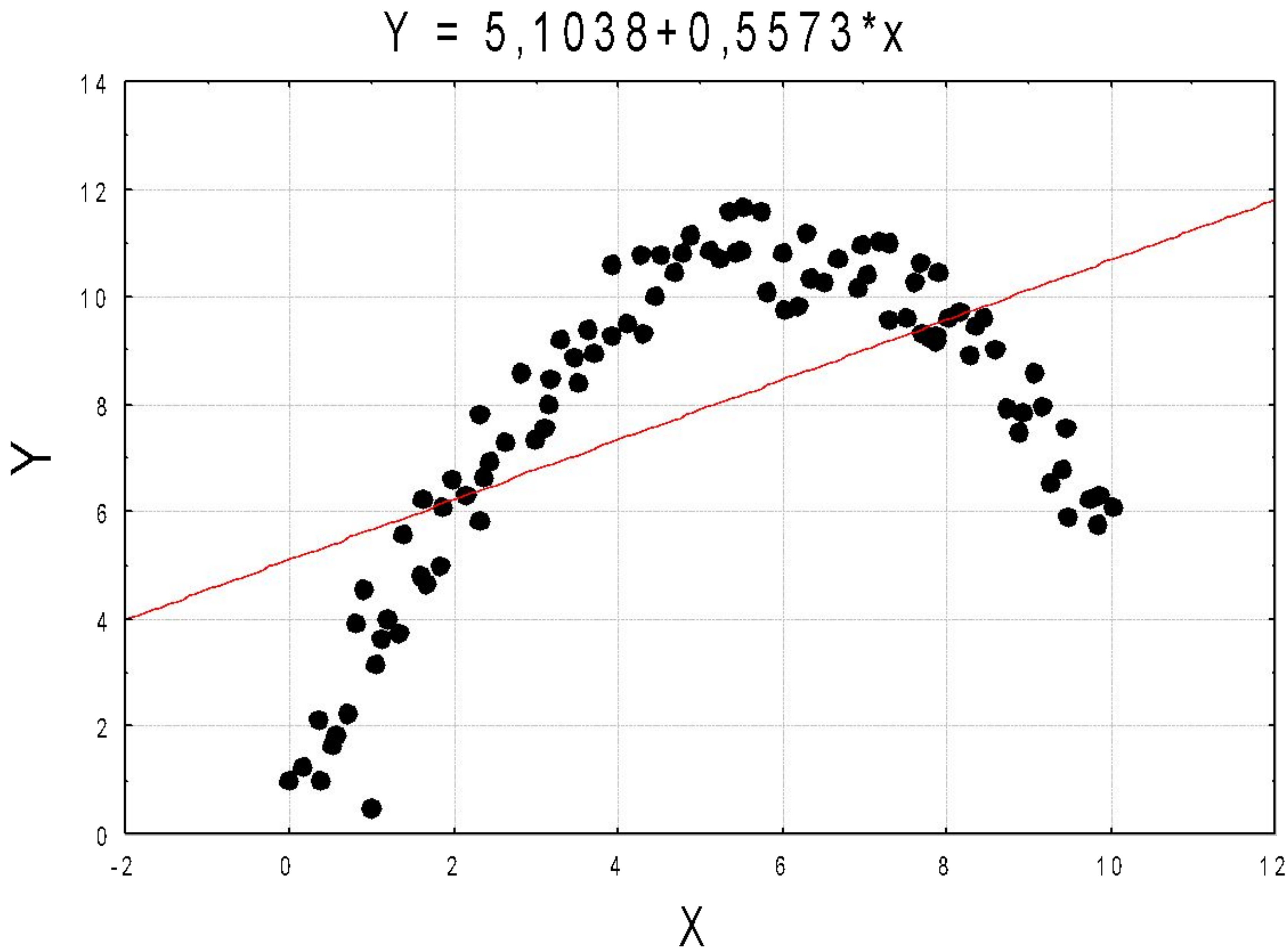
Y = 387,6437+3,2146*x
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
Y
0
50
100
150
200
250
300
350
X
X:Y: r = 0,4686; p = 0,0034

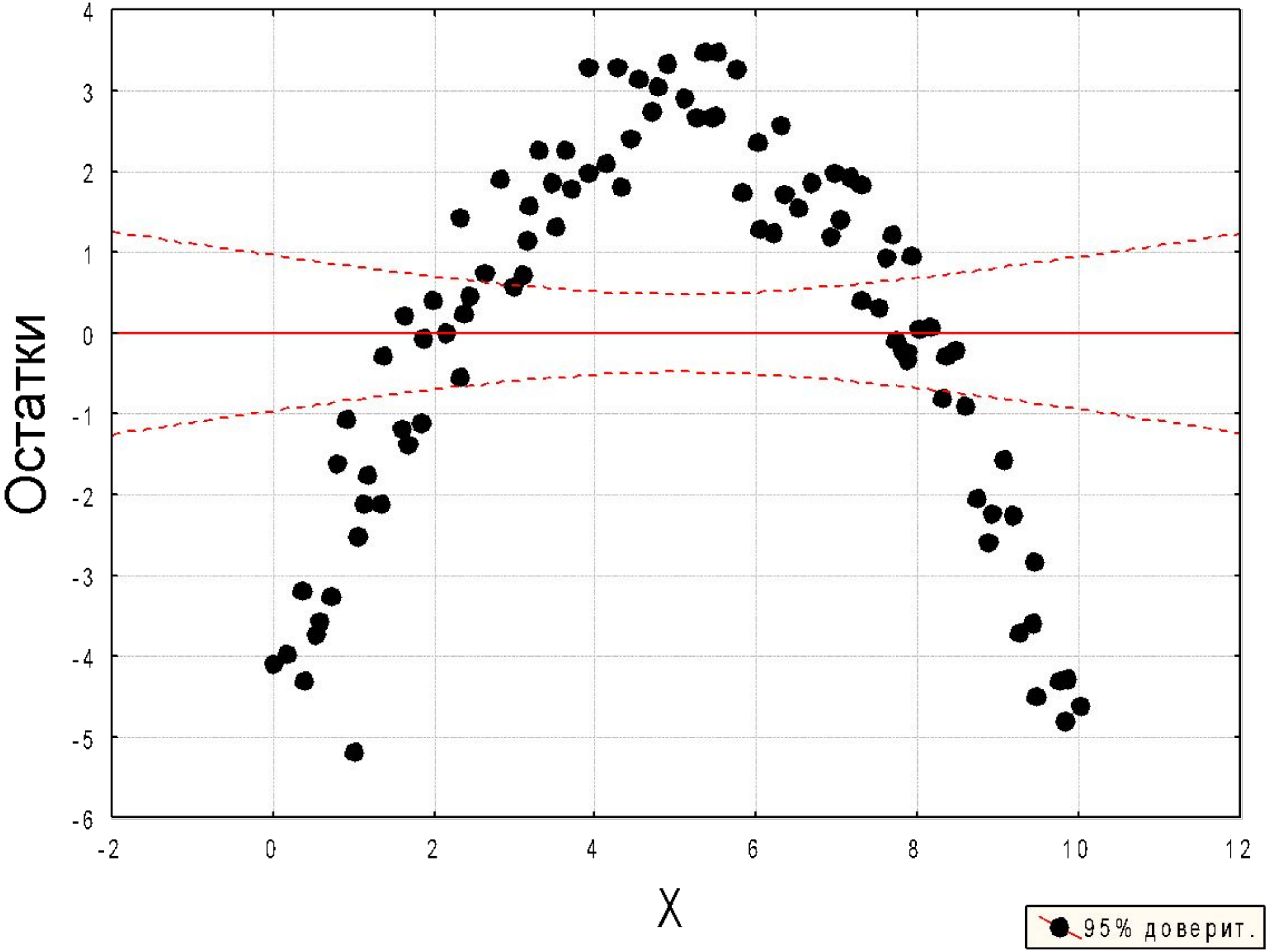


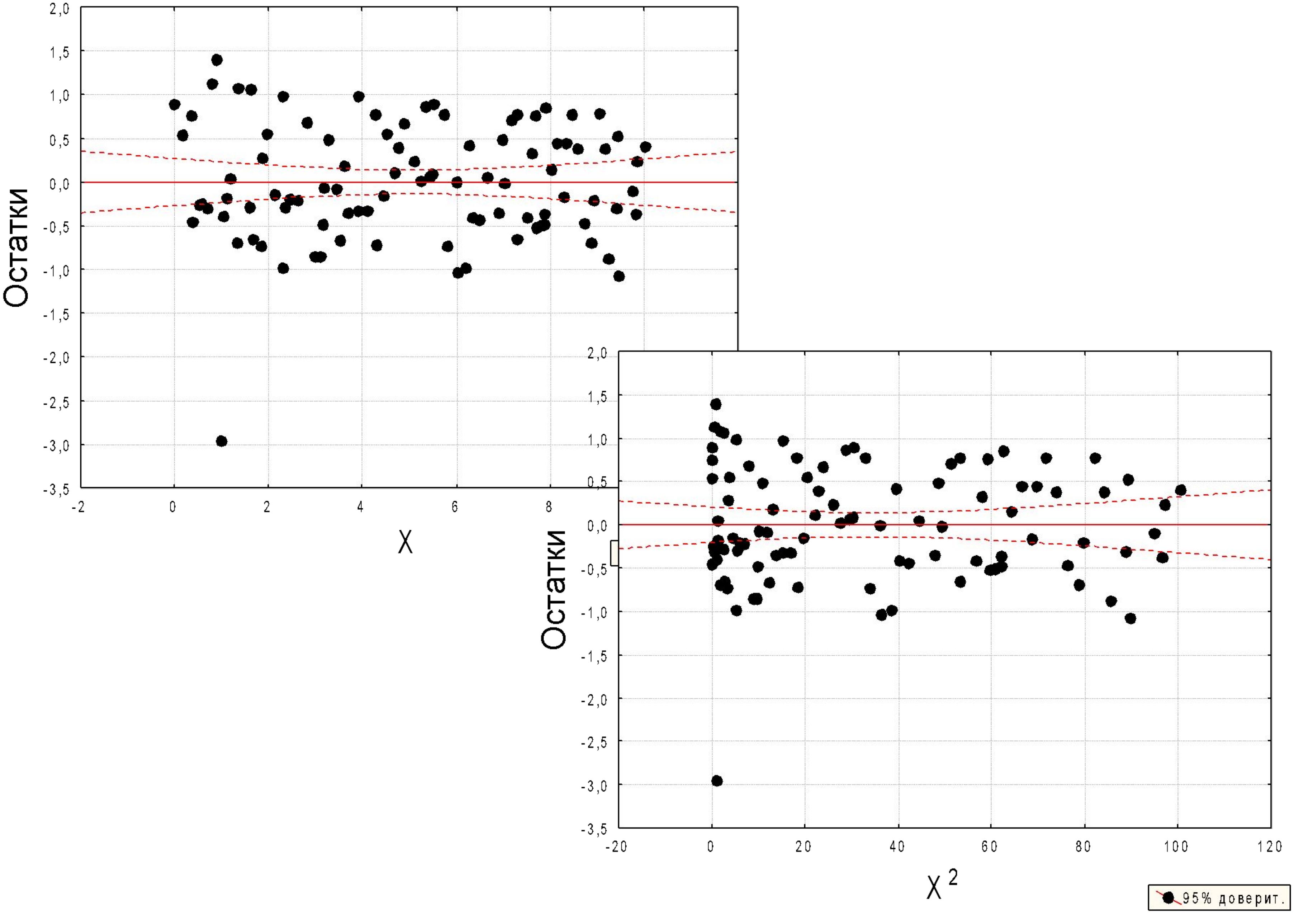
Остатки
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
0
50
100
150
200
250
300
350
X
95% доверит.

Пример гетероскедостичности в пространственных данных: неверная спецификация

X – затраты на рекламу
Y – прибыль предприятия


Y = 5,1038+0,5573*x
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
Y
X


Остатки
X
95% доверит.
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-2
0
2
4
6
8
10
12

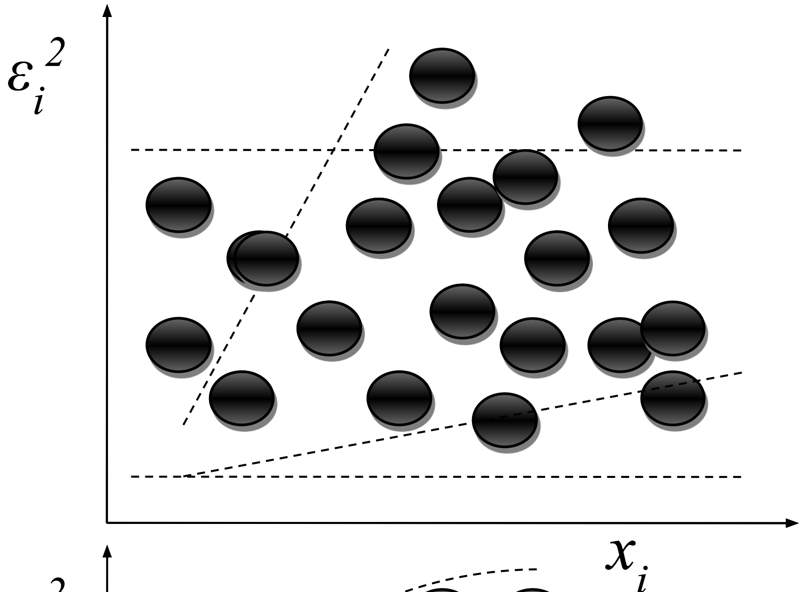


Остатки
X
Остатки
X 2
95% доверит.

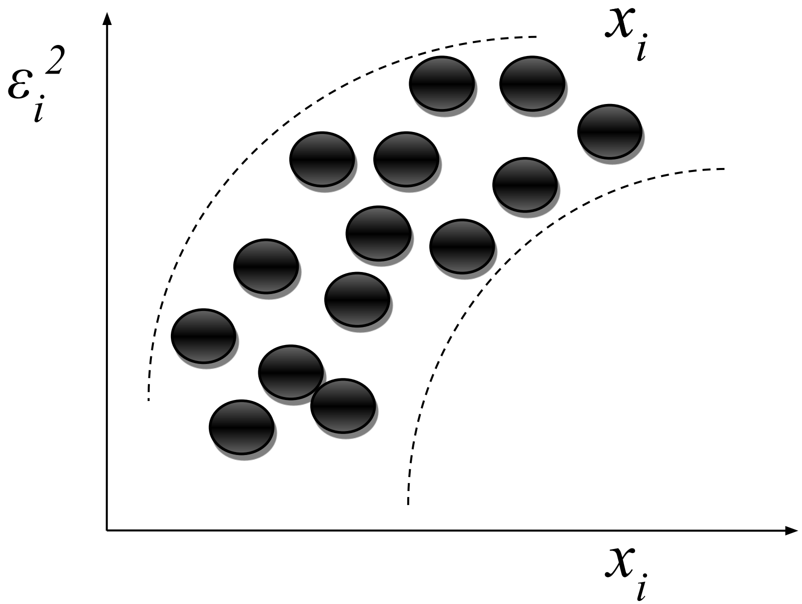
Методы обнаружения гетероскедастичности

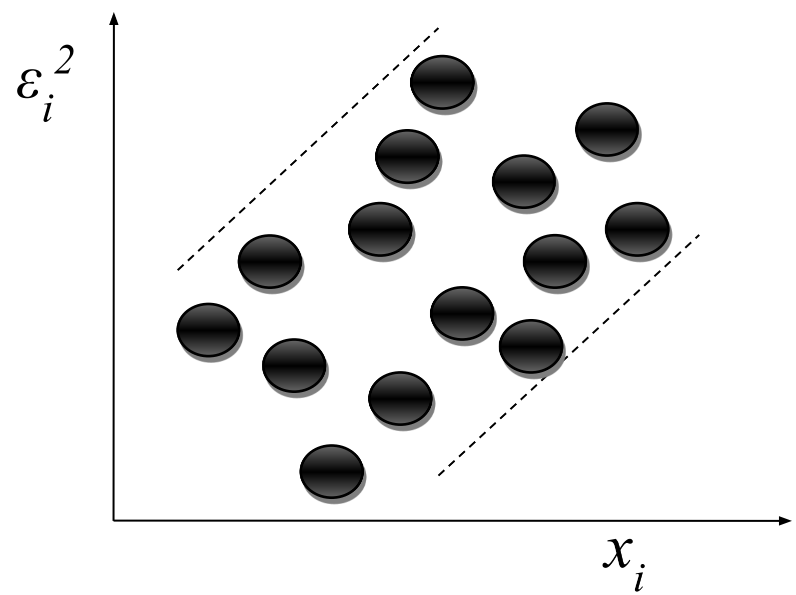
- ✔графический анализ отклонений
- ✔тест ранговой корреляции Спирмена
- ✔тест Парка
- ✔тест Глейзера
- ✔тест Голдфреда-Квандта
- ✔тест Уайта

Графический анализ отклонений



гетероскедостичность





Тест ранговой корреляции Спирмена

1 этап. Значения x_i и ε_i ранжируются. Затем определяется коэффициент по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \times \sum_{i=1}^{n}(R_i^X - R_i^\varepsilon)^2}{n(n^2-1)}$$

R_i^X, R_i^ε - ранги по независимой переменной и случайным отклонениям;

n – объем изучаемой совокупности.

2 этап. Находится t-фактическое по формуле:

$$t_{\text{факт}} = \frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

3 этап. $t_{\text{факт}}$ сравнивается $t_{\text{табл}}$ ($\alpha/2$; $v=n$-2). Если $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$ то необходимо отклонить гипотезу об отсутствии гетероскедостичности

Тест Парка

1 этап. Строится уравнение регрессии:

$$\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$$

2 этап. Для каждого наблюдения определяется:

$$\ln\varepsilon_i^2 = ln(y_i - \tilde{y}_i)^2$$

3 этап. Строится регрессионное уравнение:

$$\ln\varepsilon_i^2 = \alpha + \beta ln x_i + u_i$$

4 этап. Проверяется статистическая значимость коэффициента β на основе *t*-статистики.

Если коэффициент β значим, то это означает наличие связи между $\ln\varepsilon_i^2$ и lnx_i.

гетероскедостичности в статистических данных присутствует

Тест Глейзера

1 этап. Строится уравнение: $\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$

2 этап. Находят: $|\varepsilon_i| = |y_i - \tilde{y}_i|$

3 этап. Строится регрессия: $|\varepsilon_i| = \alpha + \beta x_i^k + u_i$

4 этап. С помощью *t*-критерия Стьюдента проверяют значимость коэффициента β, и если он значим *t*факт > *t*табл то:

гетероскедостичности в статистических данных присутствует

Тест Гольфельда-Квандта

1 этап. Все *n* наблюдений упорядочиваются по величине *X*.

2 этап. Вся упорядоченная выборка после этого разбивается на три подвыборки размером *k*, (*n-2k*), *k* соответственно.

3 этап. Оцениваются отдельные регрессии для первой подвыборки (*k* первых наблюдений) и для третьей подвыборки (*k* последних наблюдений).

4 этап. Для сравнения соответствующих дисперсий строится *F*- стати

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2 \big/ k-m-1}{\sum_{i=n-k-1}^{n} \varepsilon_i^2 \big/ k-m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2}{\sum_{i=n-k-1}^{n} \varepsilon_i^2}$$

где: *m* - число объясняющих переменных в уравнении регрессии.

5 этап. Если $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$ $(\alpha,\ v_1=v_2=k\text{-}m\text{-}1)$, то гипотеза об отсутствии гетероскедостичности отклоняется.

Метод взвешенных наименьших квадратов

$\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$ разделим обе части уравнения на: $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$

$$\frac{\tilde{y}_i}{\sigma_i} = a_0 \frac{1}{\sigma_i} + a_1 \frac{x_i}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

$$\frac{\tilde{y}_i}{\sigma_i} = \tilde{y}_i^* \quad \frac{1}{\sigma_i} = z_i \quad \frac{x_i}{\sigma_i} = x_i^* \quad \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = u_i^*$$

$$\tilde{y}_i^* = a_0 z_i + a_1 x_i^* + u_i$$

При этом для u_i выполняется условие гомоскедастичности.

Дисперсии пропорциональны x_i

$\sqrt{x_i}$

$$\frac{\tilde{y}_i}{\sqrt{x_i}} = a_0 \frac{1}{\sqrt{x_i}} + a_1 \frac{x_i}{\sqrt{x_i}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_i}}$$

$$\frac{\tilde{y}_i}{\sqrt{x_i}} = a_0 \frac{1}{\sqrt{x_i}} + a_1 \sqrt{x_i} + u_i$$

Дисперсии пропорциональны x_i^2

x_i

$$\frac{\tilde{y}_i}{x_i} = a_0 \frac{1}{x_i} + a_1 + \frac{\varepsilon_i}{x_i}$$

$$\frac{\tilde{y}_i}{x_i} = a_0 \frac{1}{x_i} + a_1 + u_i$$

В ряде случаев для устранения гетероскедастичности необходимо изменить спецификацию модели (например, линейную на лог-линейную, мультипликативную на аддитивную и т. п.).