



**ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ
И СПОСОБЫ ЕЁ
РЕШЕНИЯ**

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Область математического программирования, изучающая методы решения оптимизационных задач, в которых и целевая функция, и ограничения задачи представлены линейными выражениями.

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

требование неотрицательности переменных.

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n$$

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Актуальность и значимость линейного программирования заключается в его способности решить широкий круг вопросов и проблем экономики по поиску наилучшего решения. В частности линейное программирование используется в таких сферах, как планирование электроснабжения города (района), планирование производства предприятия, оптимальной нагрузки оборудования и так далее.

Использование метода линейного программирования представляет собой важность и ценность - оптимальный вариант выбирается из достаточно значительного количества альтернативных вариантов.

ЗАПИСЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КРАТКОЙ ФОРМЕ

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0; i = 1 \dots m; j = 1 \dots n.$$

Задача линейного программирования задана в **канонической форме**, если:

все ограничения, входящие в систему – уравнения;

на все переменные наложены условия неотрицательности.

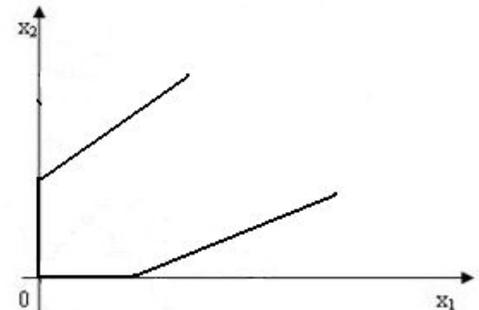
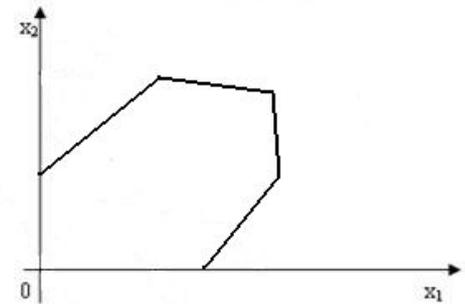
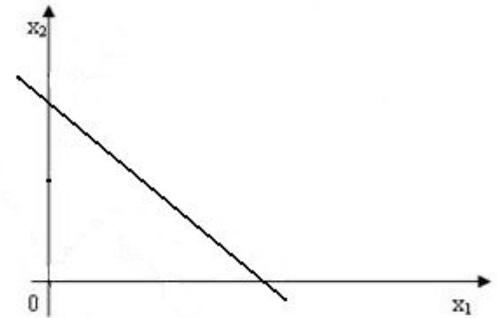
ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если ограничение задано **равенством**, то геометрически оно может быть представлено прямой на плоскости в системе координат, где по осям отложены управляемые переменные. Если ограничение задано **неравенством**, то геометрически оно может быть представлено полуплоскостью.

Множество точек на плоскости, удовлетворяющих **системе ограничений**, составляет выпуклую многоугольную область.

Область допустимых решений имеет вид неограниченного выпуклого многоугольника.

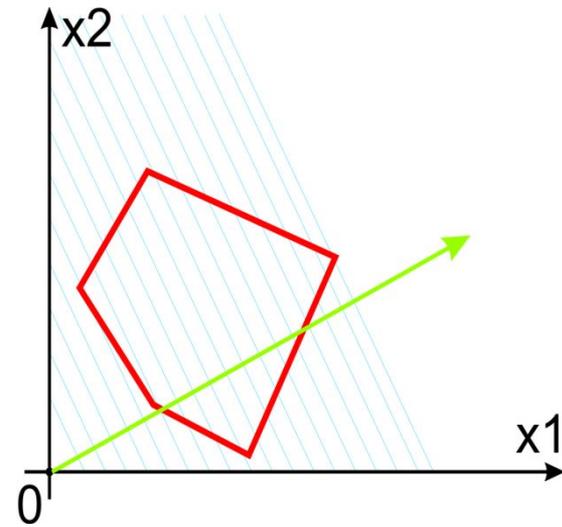
Если неравенства противоречат друг другу, и допустимая область пуста, задача решений не имеет.



Графическая интерпретация целевой функции

Графическим отображением целевой функции являются её линии уровня. Для построения целевой функции используют **вектор-градиент**, который показывает направление наискорейшего изменения целевой функции. Координатами этого вектора являются коэффициенты целевой функции ($c_1; c_2$)

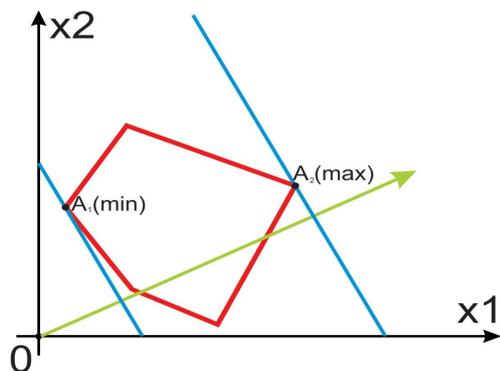
$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$



Линия уровня – линия перпендикулярна **вектору-градиенту**.

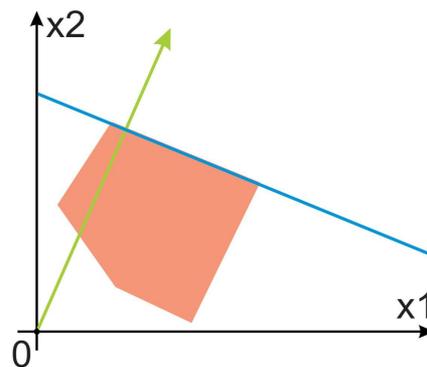
С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на которой достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня целевой функции, она называется опорной прямой

ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ

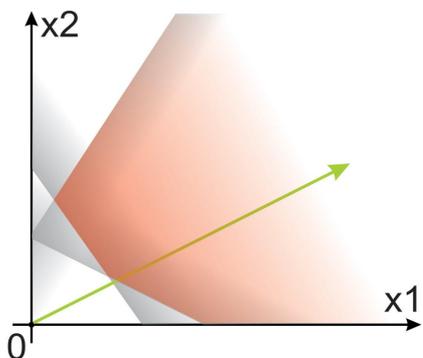


Решение единственно.

Бесконечное множество решений



Целевая функция не ограничена.
Задача не имеет решения.



Если ограничения задачи противоречивы,
задача является неразрешимой.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАМИРОВАНИЯ В EXCEL

Рабочее поле состоит из строк (1, 2, 3, ...) и столбцов (A, B, C, ...). На пересечении строк и столбцов находятся рабочие ячейки. Каждая ячейка таблицы имеет свой адрес, например A1, B4, C7, ...

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

$$Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ВВОД ФОРМУЛ

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Переменные					
x1	x2	x3	x4	x5	
Коэффициенты целевой функции					
1	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	
3	1	0	1	0	
5	2	2	1	3	

Formula bar: `=B6*B3+D6*D3+E6*E3+F6*F3`

Значение

$$Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

ВВОД ФОРМУЛ

Книга1 - Microsoft Excel

МУМНОЖ X ✓ f =B8*B3-C8*C3+D8*D3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1		Переменные													
2		x1	x2	x3	x4	x5									
3															
4															
5		Коэффициенты целевой функции													
6		1	0	1	1	1		Значение							
7															
8		1	1	1	0	0									
9		3	1	0	1	0									
10		5	2	2	1	3									
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															

Значение

0

=B8*B3-C8*C3+D8*D3

$$Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Лист1 / Лист2 / Лист3

Укажите

22:03

ВВОД ФОРМУЛ

Книга1 - Microsoft Excel

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид АБВГ FineReader 11

Буфер обмена Вставить Копировать Формат по образцу

Шрифт Выравнивание

Общий Условное форматирование

Обычный Нейтральный Плохой Хороший Ввод Вывод

Σ Автозаполнение Заполнить Очистить

Сортировка и фильтр Найти и выделить

МУМНОЖ X ✓ ✎ =B9*B3+C9*C3+E9*E3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1		Переменные													
2		x1	x2	x3	x4	x5									
3															
4															
5		Коэффициенты целевой функции						Значение							
6		1	0	1	1	1		0							
7															
8		1	1	1	0	0		0							
9		3	1	0	1	0		=B9*B3+C9*C3+E9*E3							
10		5	2	2	1	3									
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															

$$Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ВВОД

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Книга1 - Microsoft Excel" with the following data:

Переменные					
x1	x2	x3	x4	x5	

Коэффициенты целевой функции						Значение
1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0
5	2	2	1	3		$=B10*B3+C10*C3+D10*D3+E10*E3+F10*F3$

Mathematical model shown on the right:

$$Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \\ x_j \geq 0; (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

ВВОД ЗНАЧЕНИЙ ОГРАНИЧЕНИЙ РАВЕНСТВ

Книга1 - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Переменные					$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$		
2		x1	x2	x3	x4	x5			
3									
4									
5		Коэффициенты целевой функции						Значение	
6		1	0	1	1	1		0	
7									
8		1	1	1	0	0		0	1
9		3	1	0	1	0		0	3
10		5	2	2	1	3		0	17
11									
12									

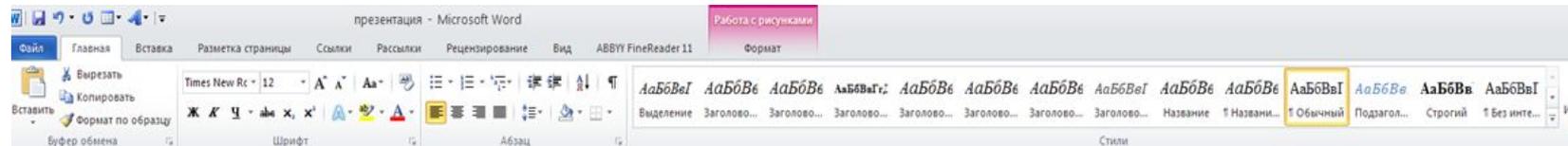
Лист1 Лист2 Лист3

Готово

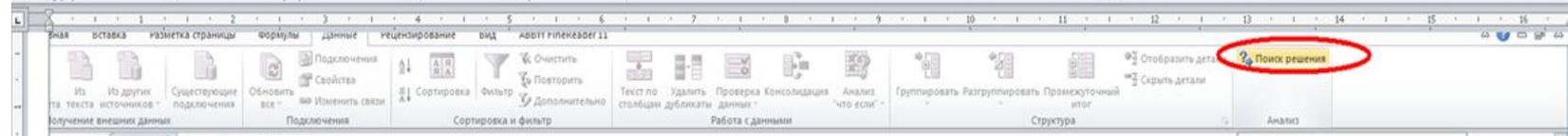
300%

RU 22:10

ВЫБИРАЕМ НАДСТРОЙКУ ПОИСК РЕШЕНИЯ



Microsoft Word ribbon: Файл, Главная, Вставка, Разметка страницы, Ссылки, Рассылки, Рецензирование, Вид, ABBYY FineReader 11, Формат. Вкладка 'Стили' активна.



Microsoft Excel ribbon: Главная, Вставка, Разметка страницы, Формулы, Данные, Рецензирование, Вид, ABBYY FineReader 11. Вкладка 'Анализ' активна, 'Поиск решения' выделено.

Переменные						
x1	x2	x3	x4	x5		
Коэффициенты целевой функции						
1	0	1	1	1		
1	1	1	1	0	0	
3	1	0	0	1	0	
5	2	2	1	1	3	

Значение
0

Панель задач: Поиск решения (выделено), Показать детали, Скрыть детали.

Панель задач: Поиск решения (выделено), Анализ.

Панель задач: Параметры поиска решения (открыта).

Панель задач: Параметры поиска решения (открыта):
Оптимизировать целевую функцию:
До: Максимум Минимум Значения:
Изменяя ячейки переменных:
В соответствии с ограничениями:
Добавить, Изменить, Удалить, Сбросить, Загрузить/сохранить.
Сделать переменные без ограничений неотрицательными.
Выберите метод решения: Поиск решения нелинейных задач методом GRG.
Метод решения: Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом GRG, для линейных задач - поиск решений линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

ЗАПОЛНЯЕМ ДИАЛОГОВОЕ ОКНО

Книга1 - Microsoft Excel

Формулы | Данные | Рецензирование | Вид | ABBYY FineReader 11

Исходные данные: $=B6*B3+D6*D3+E6*E3+F6*F3$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1		Переменные											
2		x1	x2	x3	x4	x5							
3													
4													
5		Коэффициенты целевой функции					Значение						
6		1	0	1	1	1	0						
7													
8		1	1	1	0	0	0				1		
9		3	1	0	1	0	0				3		
10		5	2	2	1	3	0				17		
11													
12													
13													

Диалоговое окно "Добавление ограничения":

Ссылка на ячейки: $=B6:F6$ | Ограничение: $=H6:H10$

Целевая функция: $Z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \min$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

ЗАПОЛНЯЕМ ДИАЛОГОВОЕ ОКНО

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1		Переменные												
2		x1	x2	x3	x4	x5								
3		$x_j \geq 0; (j = 1,2,3,4,5)$												
4		Коэффициенты целевой функции					Значение							
5														
6		1	0	1	1	1	0							
7														
8		1	1	1	0	0	0		1					
9		3	1	0	1	0	0		3					
10		5	2	2	1	3	0		17					
11														
12														
13														
14														

The 'Добавление ограничения' (Add Constraint) dialog box is open, showing the constraint range '\$B\$3:\$F\$3' and the value '0'.

НАХОДИМ РЕШЕНИЕ

Microsoft Word: презентация - Microsoft Word, Работа с рисунками, Формат

Microsoft Excel: Книжа1 - Microsoft Excel

Формула: $=B6*B3+D6*D3+E6*E3+F6*F3$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		Переменные								
2		x1	x2	x3	x4	x5				
3										
4										
5		Коэффициенты целевой функции					Значение			
6		1	0	1	1	1		0		
7										
8		1						0	1	
9		3						0	3	
10		5						0	17	

$x_j \geq 0; (j = 1,2,3,4,5)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17 \end{cases}$$

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: $\$B\$6:\$I\6

До: Максимум Минимум Значения:

Изменить ячейки переменных: $\$B\$3:\$F\3

В соответствии с ограничениями:

$\$B\$3:\$F\$3 \geq 0$
 $\$H\$8:\$I\$10 = \$J\$8:\$J\10

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения нелинейных задач методом ГРАД

Метод решения: Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ГРАД, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Найти решение

СОХРАНЯЕМ НАЙДЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Книга1 - Microsoft Excel

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид ABBYY FineReader 11

Получение внешних данных Подключения Свойства Подключения Сортировка Фильтр Очистить Повторить Дополнительно Работа с данными Структура Поиск решения

Н6 =B6*B3+D6*D3+E6*E3+F6*F3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1		Переменные											
2		x1	x2	x3	x4	x5							
3		0,507558	1,477327	1,96977	0	2,522673							
4													
5		Коэффициенты целевой функции						Значение					
6		1	0	1	1	1		5					
7													
8		1	1	1	0	0		1	1				
9		3	1	0	1	0		3	3				
10		5	2	2	1	3		17	17				
11													
12													
13													

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение

Восстановить исходные значения

Вернуться в диалоговое окно параметров

Отчеты со

Отчеты
Результаты
Устойчивость
Пределы

Отчеты со

ОК Отмена Сохранить сценарий

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены

Если используется модуль ОПГ, то найдено по крайней мере локально оптимальное решение. Если используется модуль поиска решений линейно симплекс-методом, то найдено глобально оптимальное решение.

С помощью задач линейного программирования решаются вопросы экономики по поиску наилучшего решения планирования электроснабжения города (района), планирование производства и определение оптимальной нагрузки оборудования.