

Стратегия диверсификации Г. Марковица

Решение проблемы оптимального распределения долей капитала между ценными бумагами, сводящего общий риск к \min , и составление оптимального портфеля было предложено в 50-е годы XX века американским ученым Г. Марковицем.

Формализованная модель Г. Марковица позволяет добиваться формирования такого инвестиционного портфеля, который бы отвечал потребностям и целям каждого индивидуального инвестора.

Как любая формализованная модель, данная модель имеет ряд допущений:

- рынок эффективен, т.е. на таком рынке вся имеющаяся информация трансформируется в изменение котировок ценных бумаг. Это рынок, который практически мгновенно реагирует на появление новой информации.

значения доходности ценных бумаг являются случайными величинами, распределенными по нормальному (Гауссовскому) закону.

Поэтому инвестор формируя свой портфель, оценивает лишь два показателя – ожидаемую доходность и стандартное отклонение как меру риска (только эти два показателя определяют плотность вероятности случайных чисел при нормальном распределении). Следовательно, инвестор должен оценить доходность и риск каждого портфеля и выбрать тот, который соответствует его оценке на основании соотношения «доходность-риск».

Любой инвестор выберет из всего бесконечного набора портфелей портфель, который:

- 1. Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность при требуемом уровне риска.**
- 2. Обеспечивает минимальный риск для требуемой ожидаемой доходности.**

Набор портфелей, которые минимизируют уровень риска при каждой величине ожидаемой доходности, образуют так называемую границу эффективности. Эффективный портфель – это портфель, который обеспечивает минимальный риск при заданной величине доходности и максимальную отдачу при заданном уровне риска.

Метод нахождения эффективной границы был предложен Г. Марковцем в статье «Portfolio Selection». Он представил графическую иллюстрацию метода для портфелей, состоящих из трех активов. Рассуждения Г.Марковца:

Ожидаемая доходность портфеля из трех активов равна:

$$R(p) = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot r_i$$

Риск портфеля составляет:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i b_j \text{cov}_{ij}$$

Сумма всех удельных весов равна единице.

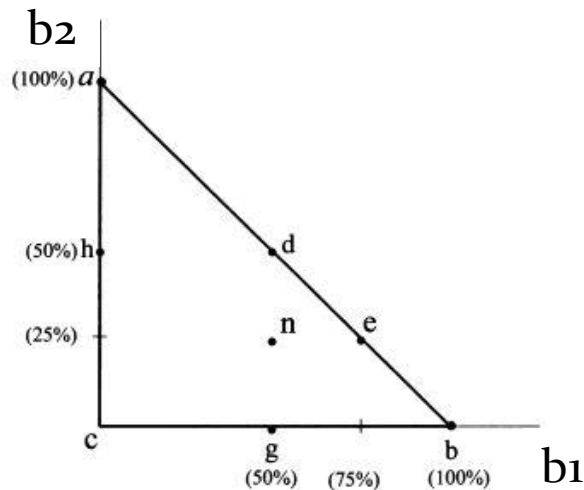
Выразив уд. вес третьего актива и подставив его в формулу доходности портфеля, получим:

$$R(p) = b_1 \cdot r_1 + b_2 \cdot r_2 + (1 - b_1 - b_2) \cdot r_3$$

Или $R(p) = r_3 + b_1 \cdot (r_1 - r_3) + b_2 \cdot (r_2 - r_3)$

Таким образом, ожидаемая доходность портфеля является функцией двух переменных - b_1 и b_2 .

Риск портфеля также будет функцией двух переменных b_1 и b_2 . Поэтому графически решение задачи определения эффективной границы можно представить в двумерном пространстве.



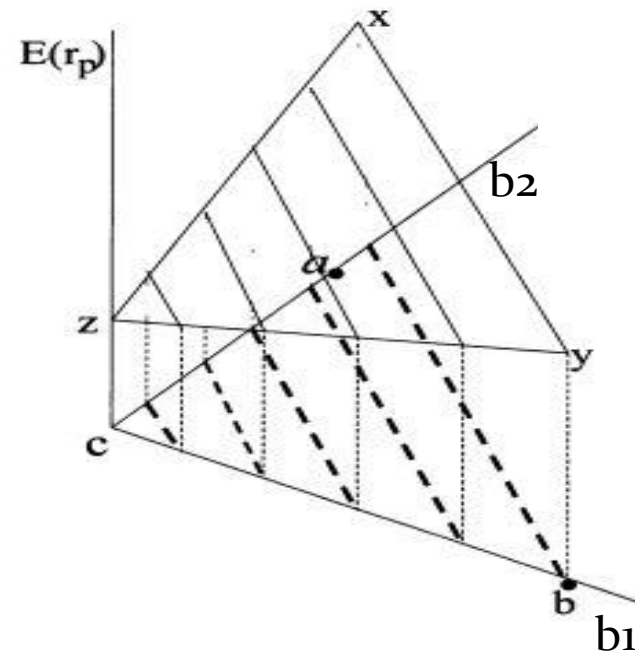
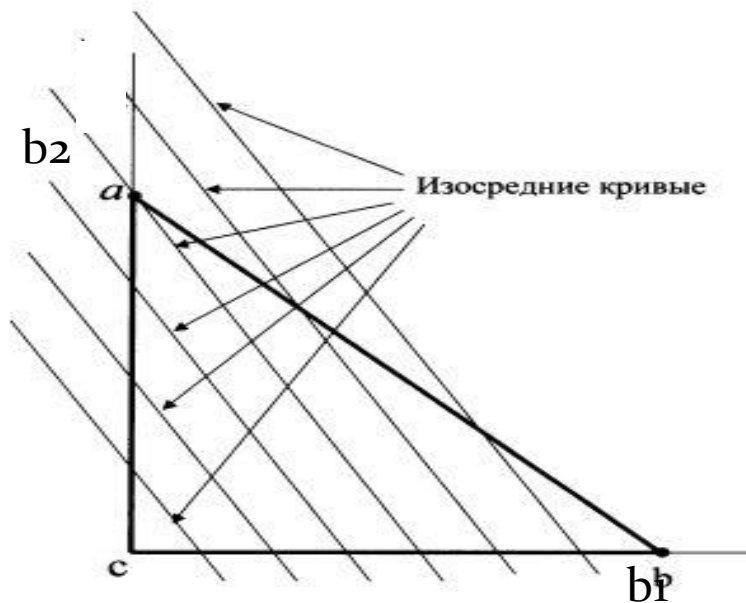
Все возможные комбинации портфелей располагаются в рамках треугольника abc.

Кривую, на которой расположены портфели с одинаковой ожидаемой доходностью, Г.Марковец называет изосредней кривой доходности. Кривую для портфелей с одинаковой дисперсией - линией изодисперсии. Графически изосредние кривые представляют собой набор параллельных прямых линий.

Данный вывод можно получить на основе последнего уравнения выразив из данного уравнения уд. вес второй бумаги

$$b_2 = \frac{R_p - r_3}{r_2 - r_3} - \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} \cdot b_1$$

или $b_2 = a_0 - k \cdot b_1$



Тогда

$$a_0 = \frac{R_p - r_3}{r_2 - r_3} \quad k = \frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3}$$

Карта изосредних кривых

где a_0 - точка, в которой график функции пересекает горизонтальную ось; k - угловой коэффициент наклона графика функции к горизонтальной оси.

Угол наклона функции есть величина постоянная. Поэтому, если изменять ожидаемую доходность портфеля R_p , то график функции будет смещаться параллельно вверх или вниз. В результате получим карту изосредних кривых.

Пример Ожидаемая доходность первой бумаги равна 10%, второй - 16%, третьей 22%. Инвестор хотел бы сформировать портфель с ожидаемой доходностью 19%. Угол наклона изосредней линии равен:

$$k = \frac{10 - 22}{16 - 22} = 2$$

$$a_0 = \frac{19 - 22}{16 - 22} = 0,5$$

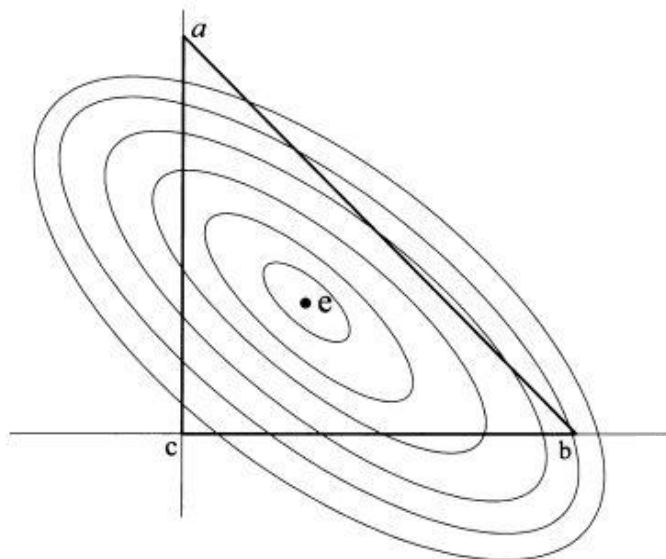
Формула изосредней линии для портфеля с ожидаемой доходностью 19% имеет вид:

Портфель с доходностью 19% можно получить, придав разные уд. веса активам. Пусть первую бумагу инвестор включает в портфель в уд. весе 10%. Тогда $a_1 = 0,5 - 2 \cdot 0,1 = 0,3$ А уд. вес третьей будет

равен $b_2 = 0,5 - 2 \cdot 0,1 = 0,3$

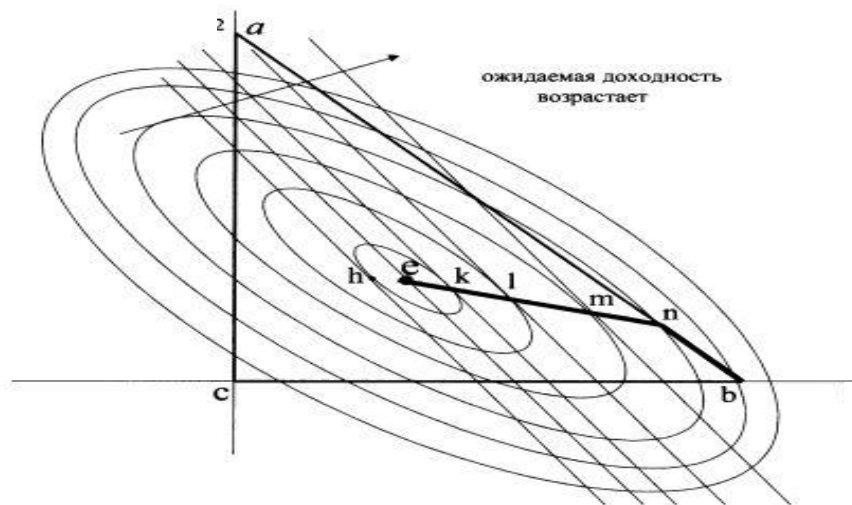
Портфель с доходностью 19% можно получить и на основе других сочетаний уд. весов.

Кривая изодисперсии представляет собой эллипс.



На данной кривой расположены все портфели с одинаковой дисперсией. Соответственно портфели с разными дисперсиями образуют семейство эллипсов. В точке e расположен портфель с минимальной дисперсией. Чем дальше расположен эллипс от точки, тем большей дисперсией он характеризуется.

Чтобы определить эффективную границу, необходимо на одном графике совместить изосредние кривые и эллипсы изодисперсии.



Для каждого данного уровня ожидаемой доходности портфели с минимальной дисперсией должны располагаться в точках касания соответствующей изосредней кривой и эллипса изодисперсии. Эффективные портфели расположены на линии en . Г. Марковец назвал ее критической линией. Точка n лежит на границе ab . Поскольку уд. веса активов в портфеле не могут быть отрицательными, то оставшаяся часть эффективной границы представляет собой отрезок nb . Таким образом, на рис. эффективная граница представлена ломаной enb .

Модели и методы оценки активов

1. Модель оценки капитальных активов CAPM

С 1964 г. появляются новые работы, открывшие следующий этап в развитии инвестиционной теории. Учеником Г. Марковица У. Шарпом была разработана модель рынка капиталов, который разделил риск портфеля ЦБ на две части: первая – систематический (или рыночный) риск, вторая - несистематический.

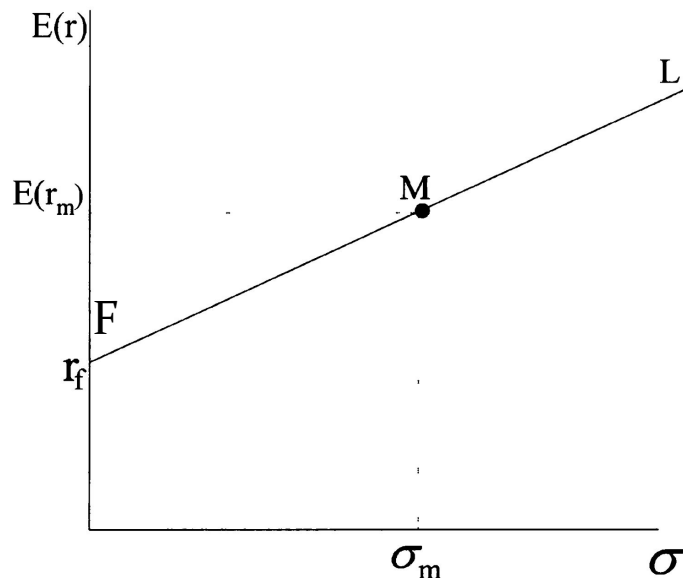
Основным результатом CAPM стало установление соотношения между доходностью и риском активов для равновесного рынка. При выборе оптимального портфеля инвестор должен учитывать не весь риск, связанный с активами (риск по Г. Марковицу), а только его часть, названную систематическим, то есть не диверсифицированным, риском. Эта часть риска активов тесно связана с общим риском рынка в целом и количественно представлена коэффициентом «бета», введенным У. Шарпом в его модели.

Другая его часть (диверсифицированный риск) снижается путем выбора соответствующего (оптимального) портфеля. Связь между доходностью и риском носит линейный характер, и соответствует правилу: чем выше доходность, тем выше риск.

Как и всякая теория, модель CAPM базируется на ряде допущений:

- рынок является конкурентным;**
- активы ликвидны;**
- отсутствуют налоги, транзакционные издержки, банкротства;**
- все инвесторы рациональны, имеют одинаковые ожидания;**
- рассматривается один временной период;**
- доходность является функцией риска;**
- изменения цен активов не зависят от существовавших в прошлом уровней цен.**

В модели CAPM зависимость между риском и ожидаемой доходностью описывается с помощью линии рынка капитала (CML – Capital Market Line).



M – это рыночный портфель, r_f – актив без риска; FL – линия рынка капитала; σ_m – ожидаемый риск рыночного портфеля; $E(r_m)$ – ожидаемая доходность рыночного портфеля. Все оптимальные (или эффективные) портфели, включающие в себя рыночный портфель M , расположены на линии FL , которая является линией SML .

Прочие портфели, в которые не выходит рыночный портфель, располагаются ниже линии FL . Прочие портфели, в которые не выходит рыночный портфель, располагаются ниже линии FL .

СМЛ имеет положительный наклон, что означает, что при выборе более доходного портфеля возрастает и риск. Если инвестор приобретает актив без риска, он обеспечивает себе доходность на уровне ставки без риска r_f . При стремлении получить более высокую ожидаемую доходность, инвестор должен мириться с соответствующим увеличением риска. Ставка без риска (r_f) является вознаграждением за время, т.е. деньги во времени имеют ценность. Дополнительная доходность, получаемая инвестором сверх ставки без риска, есть вознаграждение за риск. Уравнение прямой СМЛ имеет вид: $y = a + bx$

где a – точка пересечения линии СМЛ с ординатой, она соответствует ставке без риска r_f ; b – угол наклона линии СМЛ.

Угол наклона равен:

$$\beta = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}$$

Ожидаемая доходность (y) является функцией риска (x), поэтому уравнение СМЛ имеет вид:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_i$$

где σ_i – риск i -го портфеля; $E(r_i)$ – ожидаемая доходность i -го портфеля. Перепишем уравнение следующим образом:

$$E(r_i) = r_f + \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \cdot (E(r_m) - r_f)$$

Таким образом, ожидаемая доходность портфеля равна ставке без риска плюс произведение отношения риска портфеля к риску рыночного портфеля и разности между ожидаемой доходностью рыночного портфеля и ставкой без риска.

Широко диверсифицированный портфель включает в себе практически только рыночный риск. Слабо диверсифицированный портфель обладает как рыночным, так и нерыночным рисками. В рамках модели CAPM предполагается, что нерыночный риск не подлежит вознаграждению, поскольку его легко можно устранить за счет диверсификации. Поэтому вознаграждению подлежит только систематический риск, для оценки которого используется бета коэффициент.

Коэффициент систематического риска

Величина бета показывает зависимость между доходностью актива и доходностью рынка. Доходность рынка - это доходность рыночного портфеля, в качестве которого принимается какой-либо индекс с широкой базой. Величина бета представляет собой угловой коэффициент наклона линии регрессии доходности актива на доходность индекса. Коэффициент бета рассчитывается по формуле:

$$\beta = \frac{\text{COV}_{im}}{\sigma_m^2}$$

или

$$\beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \cdot \text{corr}_{im}$$

где β - бета i -го актива; cov_{im} - ковариация доходности i -го актива (портфеля) с доходностью рыночного портфеля; corr_{im} - корреляция доходности i -го актива (портфеля) с доходностью рыночного портфеля. Поскольку величина бета определяется по отношению к рыночному портфелю, то бета самого рыночного портфеля равна единице, так как ковариация доходности рыночного портфеля с самим собой есть его дисперсия.

Бета актива без риска равна нулю, потому что нулю равна ковариация доходности актива без риска с доходностью рыночного портфеля.

Величина бета актива говорит о том, насколько его риск больше или меньше риска рыночного портфеля. Активы с бетой больше единицы обладают большим риском, чем рыночный портфель, а активы с бетой меньше единицы - менее рискованны, чем рыночный портфель. Относительно величины бета активы делят на агрессивные и защитные. Бета агрессивных активов больше единицы, защитных - меньше единицы.

Бета может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Положительное значение беты говорит о том, что доходности актива и рынка при изменении конъюнктуры изменяются в одном направлении. Отрицательная бета показывает, что доходности актива и рынка меняются в противоположных направлениях. Бета актива показывает, в какой степени доходность актива (и соответственно его цена) будет реагировать на действие рыночных сил.

Бета портфеля - это средневзвешенное значение величин бета активов, входящих в портфель, где весами выступают их удельные веса в портфеле:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \beta_i$$

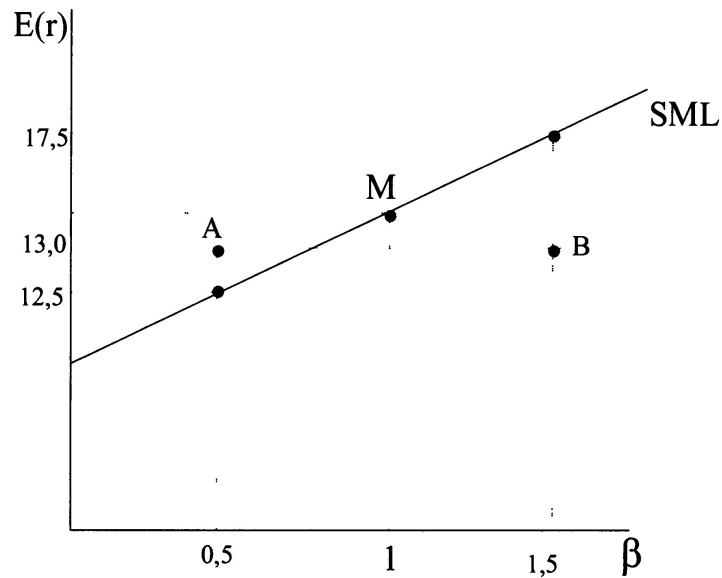
где β - бета портфеля; β_i - бета i -го актива; b_i - уд. вес i -го актива; n - количество активов в портфеле.

Альфа коэффициент

Согласно CAPM цены активов будут изменяться до тех пор, пока не наступит равновесие на рынке. На практике имеются активы, которые неверно оценены рынком относительно ожидаемых доходностей. Если эта оценка не соответствует реальному качеству актива, то в следующий момент рынок изменит свое мнение в направлении более объективной оценки. В результате мнение рынка будет стремиться к некоторому равновесному уровню оценки. Если актив переоценен рынком, то уровень его ожидаемой доходности ниже, чем активов с аналогичной характеристикой риска, если недооценен, то выше. Показатель, который говорит о величине неверной оценки актива рынком, называется альфой. Альфа представляет собой разность между действительной ожидаемой доходностью актива и равновесной ожидаемой доходностью, т. е. доходностью, которую требует рынок для данного уровня риска. Альфа определяется по формуле:

$$\alpha_i = r_i - E(r_i)$$

где α - альфа i -го актива; $E(r_i)$ - равновесная ожидаемая доходность i -го актива; r_f - средняя ожидаемая доходность i -го



На рис. представлены два актива, которые неверно оценены рынком по отношению к уровню их риска. Актив A недооценен, B - переоценен. Согласно SML доходность A в условиях равновесия должна составлять 12,5%, фактическая оценка - 13%, т. е. актив предлагает 0,5% дополнительной доходности, поэтому его альфа равна +0,5.

Противоположная ситуация представлена для актива В. Его равновесная ожидаемая доходность согласно SML составляет 17,5%, фактически он предлагает 13%, т. е. его альфа равна -4,5. Таким образом, актив недооценен рынком, если его альфа положительна, и переоценен, если альфа отрицательна. Для равновесной ожидаемой доходности альфа равна нулю. Инвесторы, желающие получить более высокие доходы, должны стремиться приобретать активы с положительной альфой. Через некоторое время рынок заметит недооценку, и цена их повысится. Одновременно инвесторам следует продавать активы с отрицательной альфой, так как в последующем их цена понизится. Доходность портфеля - это средневзвешенная величина доходностей входящих в него активов. Поэтому альфа портфеля также является средневзвешенной величиной и определяется по формуле:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \alpha_i$$

где α - альфа портфеля; b_i - уд. вес i -го актива в портфеле; α_i - альфа i -го актива.

Версия CAPM для облигаций

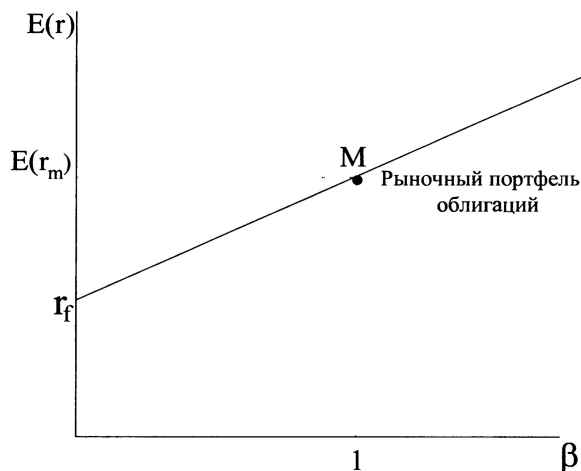
Основная версия модели CAPM подходит также для облигаций.

Уравнение имеет вид:

$$E(r_i) = r_f + \beta \cdot (E(r_m) - r_f)$$

где, $E(r_i)$ – ожидаемая доходность i -ой облигации, r_f – актив без риска, $E(r_m)$ – ожидаемая доходность рыночного портфеля облигаций, β – бета i -ой облигации, которая определяется по формуле:

$$\beta_i = \frac{D_i}{D_m} \quad \text{где, } D_i \text{ – дюрация } i\text{-ой облигации,} \\ D_m \text{ – дюрация портфеля облигаций.}$$



Формула говорит о том, что если доходность рыночного портфеля облигаций вырастет на 1 %, то доходность i -ой облигации вырастет на величину β_i .

Модель арбитражного ценообразования С.Росса

В 1976 г. С.Росс предложил модель оценки доходности активов, которая получила название «Арбитражная теория оценки стоимости» (Arbitrage pricing theory - ART).

С.Росс предположил, что доходности активов определяются линейной моделью с факторами риска.

В отличие от CAPM, в ART не делается акцент на какой-либо особый портфель, не учитывается положение об эффективности рыночного портфеля, не делаются особые предположения о функции полезности инвестора, а лишь предполагается ее монотонность и выпуклость. Т.е. преимуществом ART является меньшее число предположений о поведении инвестора на рынке по сравнению с CAPM.

Если есть безрисковый вариант займа и инвестирования (этот вариант обеспечивает доходность в размере r_f), то:

- 1) за больший риск инвесторы требуют большую доходность;**
- 2) получение повышенной доходности означает наличие факторов риска.**

Инвесторы на рынке стремятся увеличить доходность портфелей без увеличения риска. Такая возможность может быть реализована через арбитражный портфель, т.е. формирование портфеля путем одновременной продажи акций по относительно высокой цене и покупки этих же акций в другом месте по относительно низкой цене. Данная операция позволит инвестору, не вкладывая средства, получить безрисковый доход. Арбитражные возможности появляются, если по активам или портфелям с одинаковой чувствительностью к факторам ожидается различная доходность. Инвесторы устремляются к получению безрискового дохода, и возможность арбитража исчерпывается. Таким образом, в равновесии акции и портфели с одинаковой чувствительностью к факторам имеют одинаковые значения ожидаемой доходности (с поправкой на специфический риск).

Предполагается, что фактическая (наблюдаемая) доходность любой акции i является линейной функцией z факторов:

$$r_i = E(r_i) + \sum_{j=1}^z \beta_{ij} \cdot I_j + \varepsilon_i$$

где r_i - доходность i - го актива; $E(r_i)$ - ожидаемая доходность актива в условиях, когда значения всех факторов риска равны нулю; I_j - j -й фактор риска, от которого зависит доходность активов, со средним значением равным нулю; β_{ij} - коэффициент чувствительности i -го актива к j -му фактору риска; ε_i - нерыночный риск i -го актива.

В модели предполагается, что количество активов на рынке намного больше количества факторов z , влияющих на доходность активов.

Определенным недостатком модели является то, что в ней не выделены конкретные риски, которые необходимо учитывать. Р. Ролл и С.Росс провели проверку модели на основе ежедневных данных для акций, обращающихся на Нью-Йоркской и Американской фондовых биржах за период с 1962 по 1972 года.

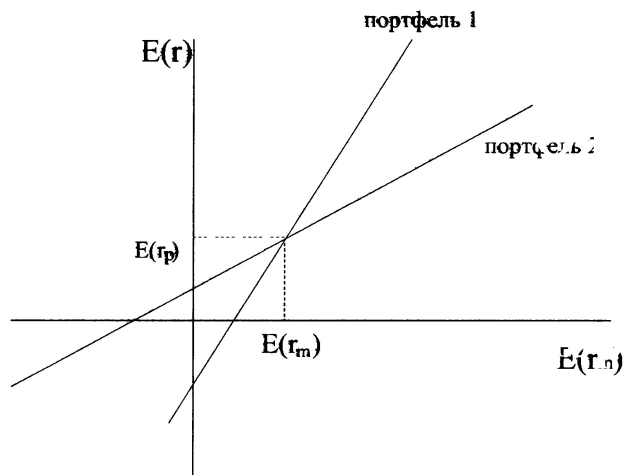
Акции были объединены в алфавитном порядке в группы из 30 штук. Всего было образовано 42 группы. Они определили, что большая часть совместного изменения доходностей акций определяется четырьмя или пятью факторами риска.

Обобщенно можно выделить три группы факторов, обязательно включаемых в арбитражную модель: 1) показатели общей экономической активности (это может быть темп роста промышленного производства, темп роста ВВП); 2) показатели, отражающие инфляцию; 3) показатели процентной ставки (разница между долгосрочной и краткосрочной ставками, ставка доходности фондового (рыночного) индекса).

Показатели эффективности управления портфелем

Одним из самых традиционных подходов определения эффективности портфельного управления является сравнение доходности портфеля с доходностью рынка. При этом эффективным будет считаться то управление, которое демонстрирует доходность портфеля выше доходности рынка.

Однако сравнивать портфели только на основе абсолютных показателей доходности и риска не вполне корректно.



Поэтому его доходность сильнее изменяется при изменении конъюнктуры рынка. Так, в случае экономического подъема он принесет доходность выше доходности второго портфеля.

При экономическом спаде его доходность окажется ниже доходности второго портфеля. Поэтому для оценки эффективности управления портфелем используются относительные показатели, учитывающие как его доходность, так и риск.

К ним относятся коэффициенты Шарпа и Трейнора

$$K_{\text{Ш}} = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\sigma_p}$$

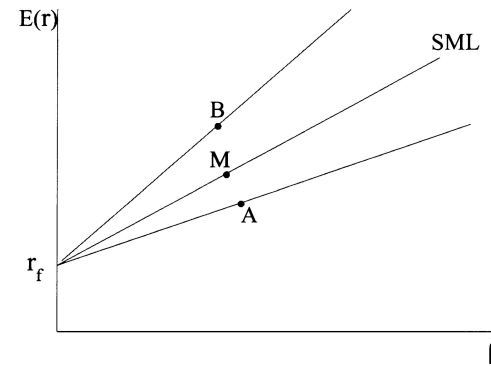
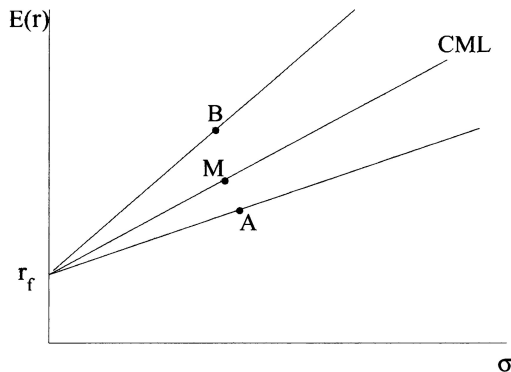
$$K_{\text{Т}} = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\beta_p}$$

где \bar{r}_p - средняя доходность портфеля; \bar{r}_f - средняя безрисковая доходность за рассматриваемый период;

σ_p - ср. квадр. отклонение портфеля; β_p - бета коэффициент портфеля.

Коэффициент Шарпа используется для определения того, насколько хорошо доходность актива компенсирует принимаемый инвестором риск (как систематический, так и не систематический).

На рисунках представлена графическая иллюстрация коэффициентов Шарпа (CML) и Трейнора (SML) соответственно для портфелей А и В. По сравнению с рыночным портфелем М, расположенном на CML или SML, портфель В управлялся более эффективно, а портфель А - менее эффективно.



Уравнения CML и SML можно переписать следующим образом:

$$\frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\sigma_p} = \frac{\bar{r}_m - \bar{r}_f}{\sigma_m}$$

$$\frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\beta_p} = \frac{\bar{r}_m - \bar{r}_f}{1}$$

где левая часть равенства - это коэффициенты Шарпа и Трейнора оцениваемого портфеля, правая часть - коэффициенты Шарпа и Трейнора рыночного портфеля.

При сравнении двух активов с одинаковым ожидаемым доходом, вложение в актив с более высоким коэффициентом Шарпа будет менее рискованным. Его следует использовать инвестору, портфель которого не является широко диверсифицируемым.

Коэффициент Трейнора оценивает единицу доходности на единицу общерыночного риска. Данный коэффициент следует применять инвесторам с широко диверсифицируемым портфелем. Чем выше значения коэффициентов, тем лучше результаты управления.

Коэффициент эффективности для портфеля облигаций. В качестве меры риска используется относительная дюрация.

$$K_D = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{D_p / D_m}$$

D_p / D_m — отношение дюрации портфеля облигаций к дюрации рыночного портфеля облигаций.

Оценка портфеля на основе значения альфы (Индекс Дженсена).

Для определения α - коэффициента может быть использована модель Шарпа.

$$E(r_p) = r_f + \beta_p \cdot (r_m - r_f)$$

$E(r_p)$ - ожидаемая доходность портфеля; β_p - бета коэффициент портфеля; r_m - ожидаемая доходность рынка.

Тогда
$$\alpha = r_p - E(r_p)$$

r_p - фактическая доходность портфеля.

Альфу, полученную на основе SML, называют индексом Дженсена .

Обозначим индекс Дженсена через J_p .

Тогда

$$J_p = r_p - E(r_p)$$

Индекс Дженсена положителен для портфелей, показывающих лучшие результаты, чем предполагается рынком для соответствующего уровня риска, и отрицателен для портфелей с худшими результатами, чем предполагается рынком для их уровня риска. С помощью индекса Дженсена можно сравнивать эффективность управления разными портфелями, но только в этом случае они должны характеризоваться одинаковой бетой. Соответственно, чем больше альфа портфеля, тем лучше управляется портфель.