Кривые второго порядка

Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

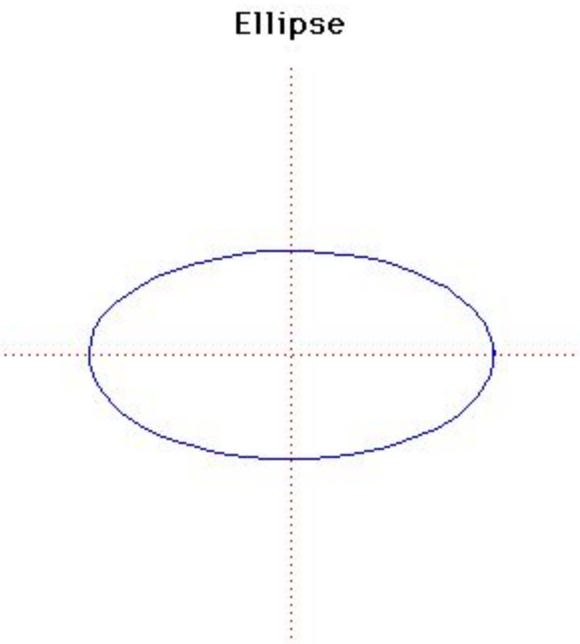
$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ - главная часть уравнения (кв. ф.)

$2Dx + 2Ey + F$ - линейная часть уравнения

Эллипс

Декартово уравнение: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

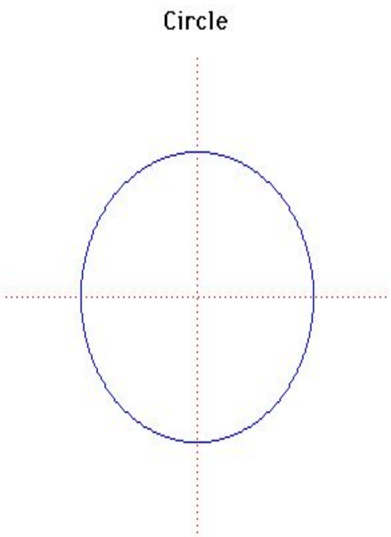
Параметрическое уравнение:
$x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$



Окружность

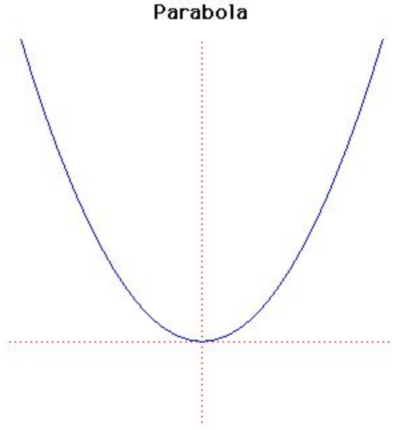
Декартово уравнение: $x^2 + y^2 = a^2$

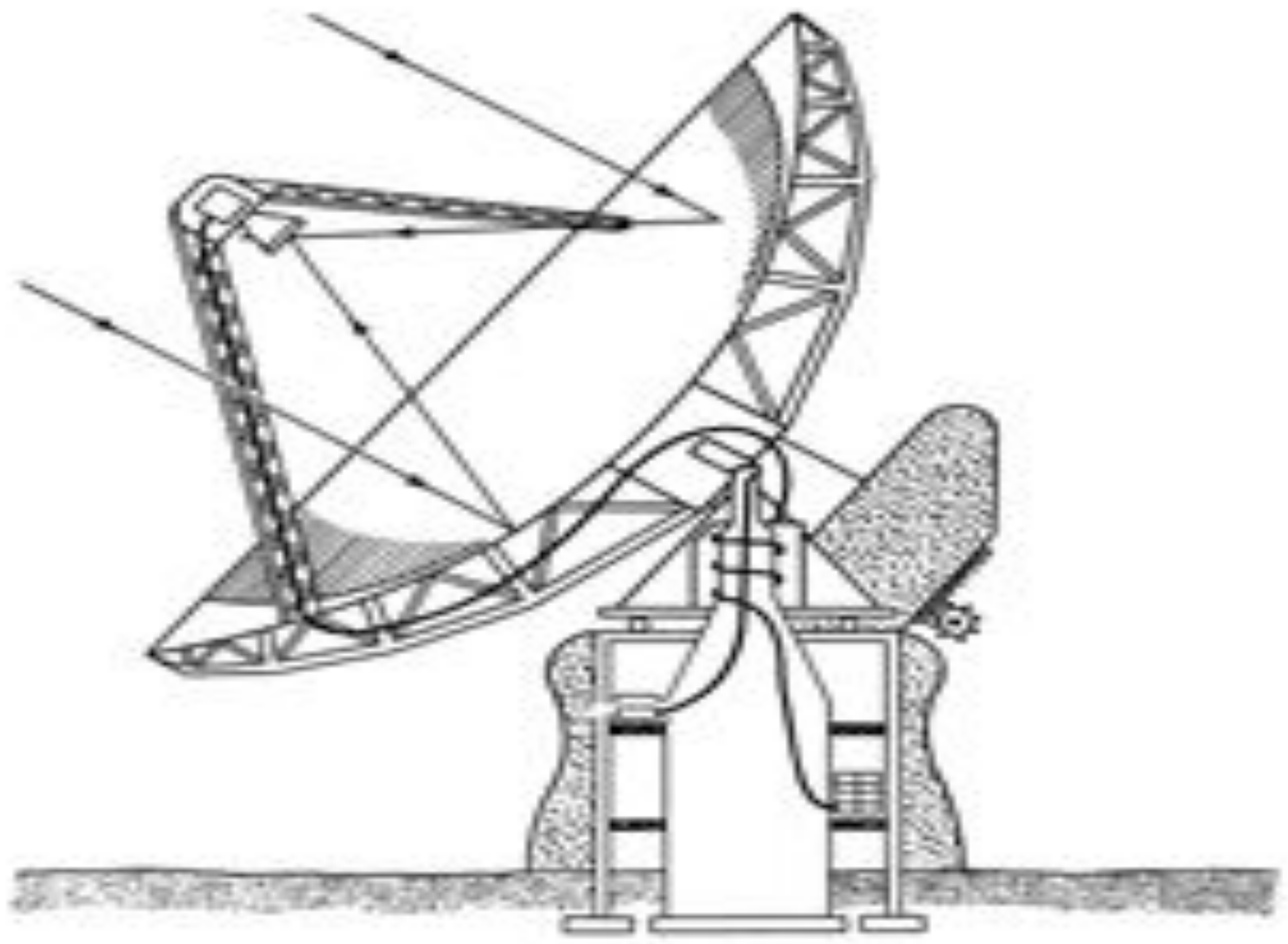
Параметрическое уравнение:
$x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$



Парабола

Декартово уравнение:
$y = ax^2 + bx + c$

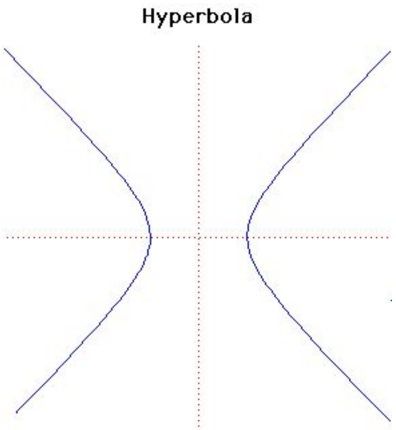




Гипербола

- Декартово уравнение:
  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

- Параметрическое уравнение:
  $x = a \sec(t) = a/\cos(t)$, $y = b \tan(t)$

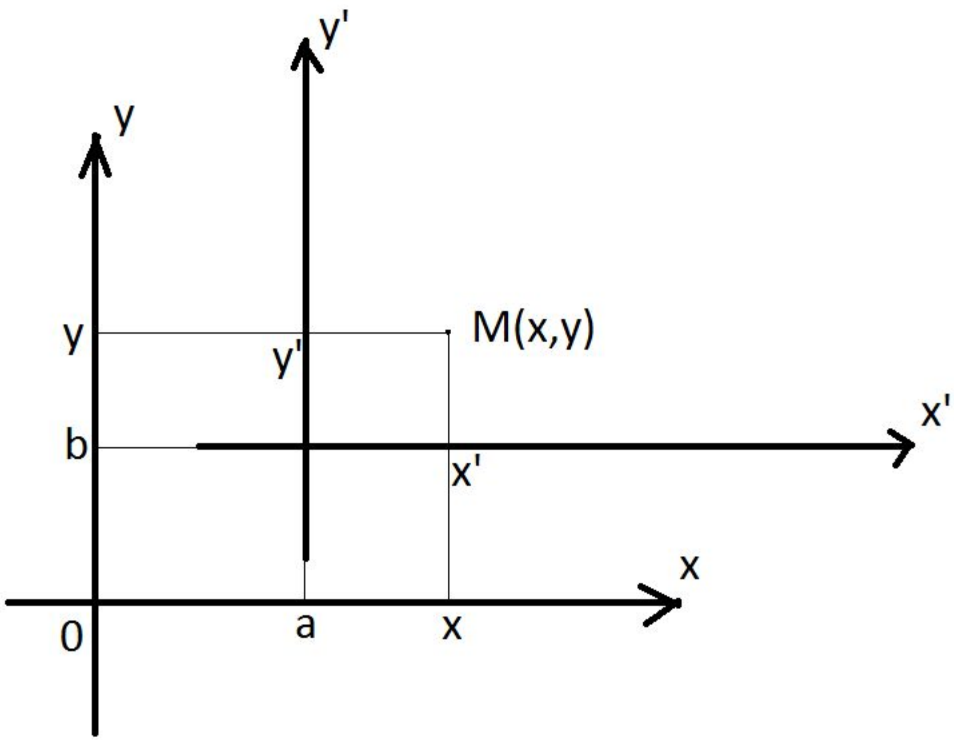


Общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Параллельный перенос системы

Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат: ("старая") и ("новая"), причем как оси абсцисс, так и оси ординат обеих систем параллельны и одинаково направлены. В этом случае говорят, что одна система координат получается из другой "параллельным переносом".



$$x = x' + a$$

$$y = y' + b$$

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \Rightarrow \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Подставляем

$$A(x'+a)^2 + 2B(x'+a)(y'+b) + C(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + 2E(y'+b) + F =$$

$$A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 +$$

$$+2(Aa + Bb + D)x' + 2(Ba + Cb + E)y' + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) = 0$$

Главная часть не меняется, можно упростить только линейную часть

Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе

Подберем *a* и *b*
в

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

так, чтобы коэффициенты при переменных в линейной части
стали равными 0:

$$Aa + Bb + D = 0$$

$$Ba + Cb + E = 0$$

Для нахождения *a* и *b* получили систему уравнений, которая имеет единственное решение при условии

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow AC - B^2 \neq 0.$$

1 случай. Преобразование уравнения кривой при параллельном переносе при $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Преобразованное уравнение:

$$A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) =$$

$$= A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + a(Aa + Bb + D) + b(Ba + Cb + E) + Da + Eb + F =$$

$$= A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + Da + Eb + F = 0$$

Таким образом, в новой системе координат уравнение принимает вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

Для дальнейшего упрощения повернем систему координат.

По часовой стрелке

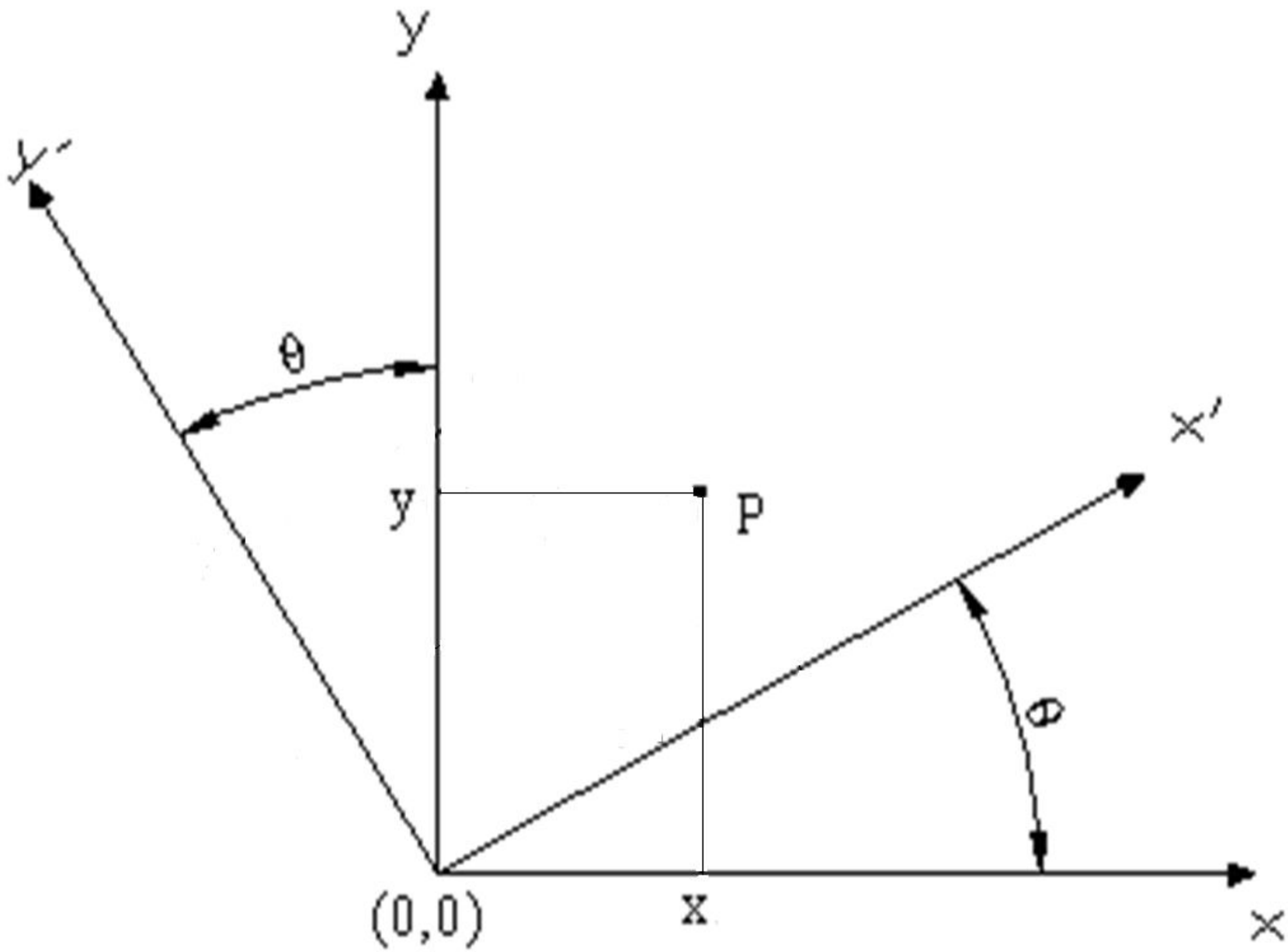




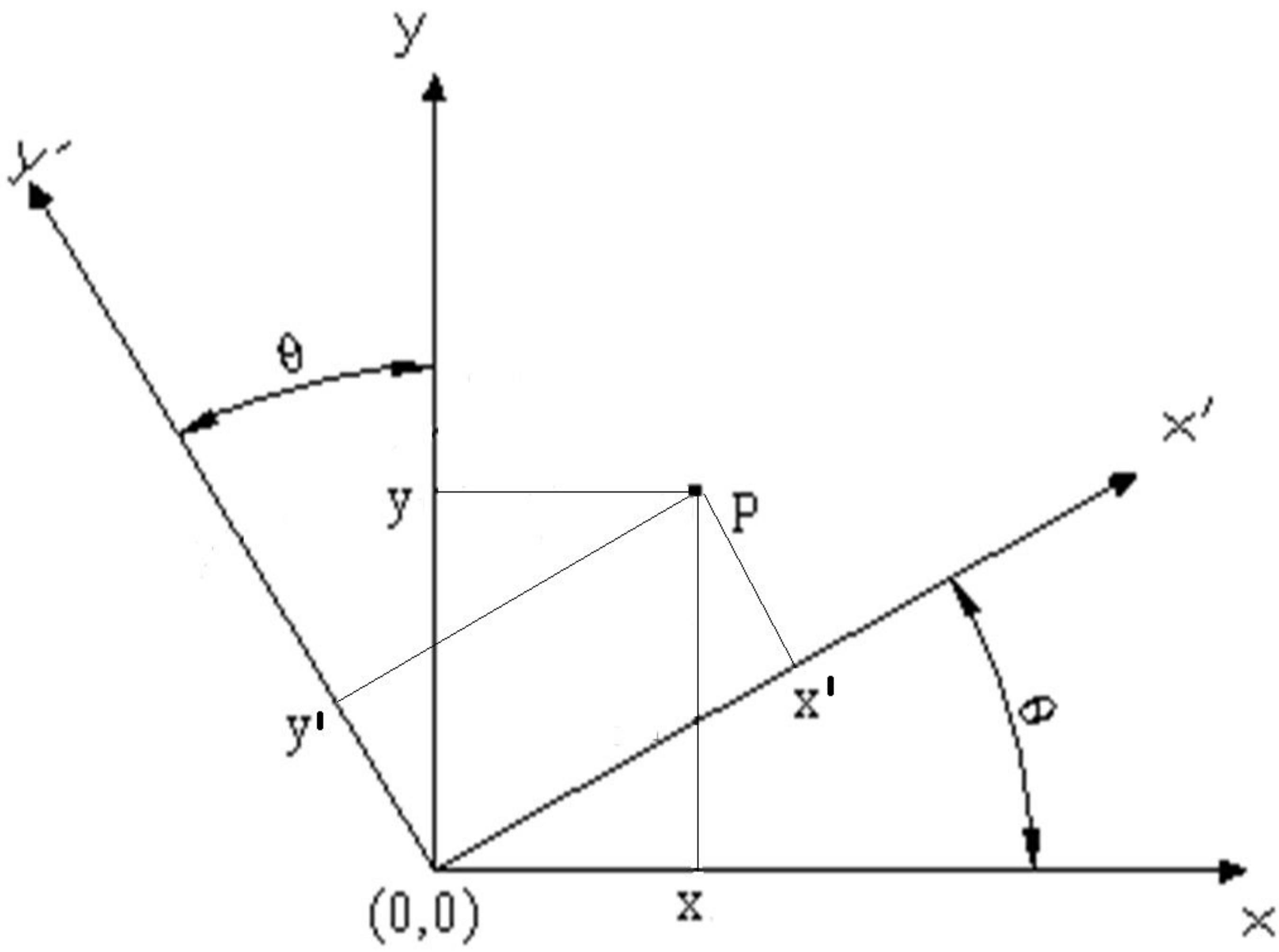



Против часовой стрелки

Поворот системы координат



Поворот системы координат



Поворот системы координат

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$$
$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

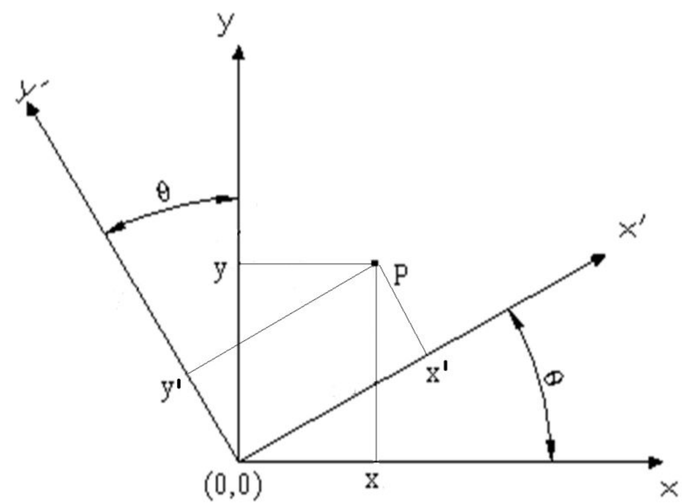
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

есть матрица поворота
(ортогональная матрица)



1 случай. Преобразование уравнения кривой при повороте при $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Преобразованное уравнение:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}'$$

Главная часть уравнения – квадратичная форма,
а преобразование – ортогональное – приведение к главным осям.
Тогда после подстановки в уравнение получаем

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + F = 0$$

Как найти θ

$$ctg\,2\cdot\theta = \frac{A-C}{2B}$$

$$A = C \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 45^0$$

Пример.

$$4x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$$

$$ctg\,2\theta = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

Классификация центральных кривых ($\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$
).

Преобразованное уравнение: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F = 0$

Уравнения для нахождения коэффициентов при квадратах:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(C-\lambda) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 = A + C}$$

$$\boldsymbol{\lambda_1 \lambda_2 = \delta}$$

Классификация центральных кривых ($\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F = 0$).

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

Вырожденные центральные кривые

1. $\lambda_1\lambda_2 > 0, \quad F = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Rightarrow$ *точка*

2. $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad F = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ $\Rightarrow y = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x \Rightarrow$ *пара пересекающихся прямых*

Невырожденные центральные кривые

5. $\lambda_1\lambda_2 > 0, \quad F \neq 0 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{-\dfrac{F}{\lambda_1}} + \dfrac{y^2}{-\dfrac{F}{\lambda_2}} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow$ *действительный или мнимый эллипс*

6. $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad F \neq 0 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{-\dfrac{F}{\lambda_1}} - \dfrac{y^2}{-\dfrac{F}{\lambda_2}} = 1 \quad \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow$ *гипербола*

Преобразование общего уравнения к каноническому виду (пример)

$$16x^2+25y^2-32x+50y-359=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \neq 0 \; (\textit{центр.кривая}) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16a-16=0 \\ 25b+25=0 \end{cases} \Rightarrow a=1,\, b=-1 (\textit{коорд. нового центра}) \quad \Rightarrow$$

$$x'=x-1; \quad y'=y+1 \Rightarrow x=x'+1; \quad y=y'-1 \quad \Rightarrow$$

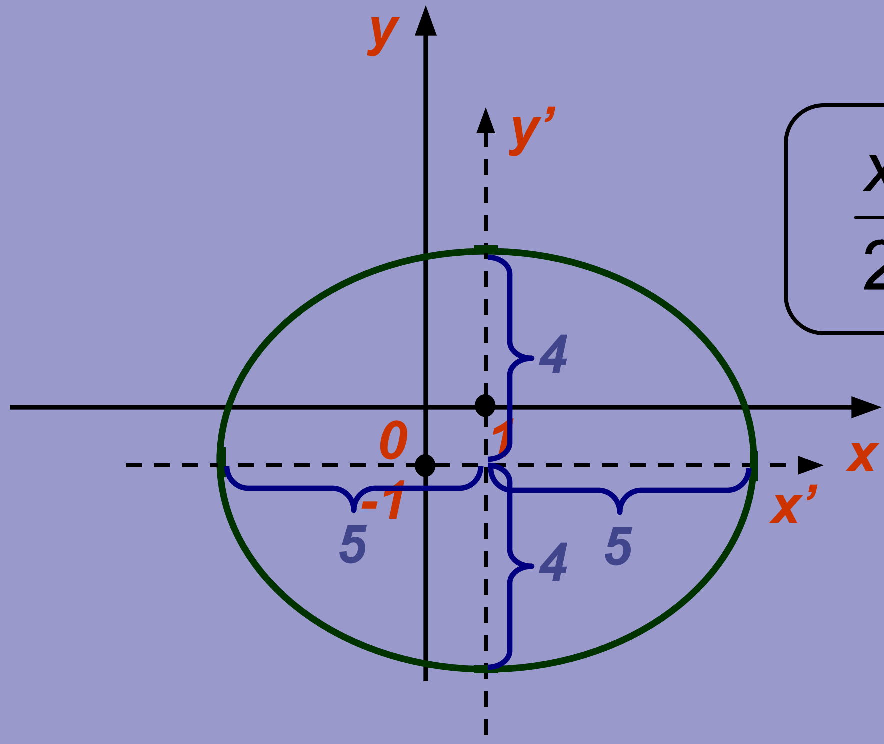
$$16(x'+1)^2+25(y'-1)^2-32(x'+1)+50(y'-1)-359=0 \quad \Rightarrow$$

$$16x'^2+25y'^2=400$$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду (пример)

*Перенесем начало координат в точку **(1; -1)**, получим новую систему координат:*

$$16x'^2 + 25y'^2 = 400$$



$$\boxed{\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1}$$

2 случай. Преобразование уравнения кривой

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ в случае $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$.

Сразу производим поворот $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \ 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0$$

Так как $\lambda_1 \lambda_2 = \delta \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0$, остается только один квадрат, например, для y:

$$\lambda y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Для дальнейшего упрощения (предполагаем *D,F* *ненулевые)*

$$(\lambda x^2 + 2Ey + \frac{E^2}{\lambda}) + 2Dx + F - \frac{E^2}{\lambda} = 0$$

$$\lambda (y + \frac{E}{\lambda})^2 + 2Dx + F - \frac{E^2}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + \frac{E}{\lambda} \end{aligned}$$

Классификация нецентральных кривых ( ). $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$

Преобразованное уравнение: $\lambda y^2 + 2Dx + F = 0$

Вырожденные нецентральные кривые

1. $\lambda_1 \lambda_2 = 0, \quad D = 0, F = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ *пара совпадающих прямых*
2. $\lambda_1 \lambda_2 = 0, \quad D = 0, F \neq 0 \quad \Rightarrow x^2 = a \quad \Rightarrow \quad 2 \|$ *прямые*

действительные или мнимые

Невырожденные нецентральные кривые

3. $D \neq 0 \Rightarrow \quad \lambda y^2 + 2D(x + \frac{F}{2D}) = 0 \Rightarrow \quad \begin{matrix} x' = x + \frac{F}{2D} \\ y' = y \end{matrix} \quad \Rightarrow \lambda y^2 + 2Dx = 0 \Rightarrow$

$$y^2 = 2px - \text{парабола}$$