Кинематика гармонических колебаний

Колебания – повторяющийся во времени процесс

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t \\ x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\} \text{– гармонические колебания}$$

$$\left(A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad , \quad \mathrm{tg}\varphi_0 = -A_2/A_1 \right)$$

A – *амплитуда колебаний*

ω – *угловая частота*

$(\omega t + \phi_0)$ – *фаза колебаний*

ϕ_0 – *начальная фаза*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{– период колебаний}$$

Комплексная форма гармонических колебаний

$z = x + iy$ – алгебраическая форма

$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ – тригонометрическая форма

$z = \rho e^{i\alpha}$ – показательная форма

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ – формула Эйлера

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *модуль* комплексного числа

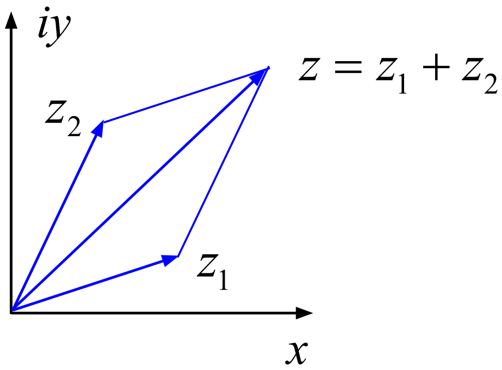
$\mathrm{tg}\alpha = y/x$, α – *фаза* комплексного числа

Комплексная форма гармонических колебаний

Сложение комплексных чисел

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Геометрически сложение производится по правилу параллелограмма



Умножение комплексных чисел

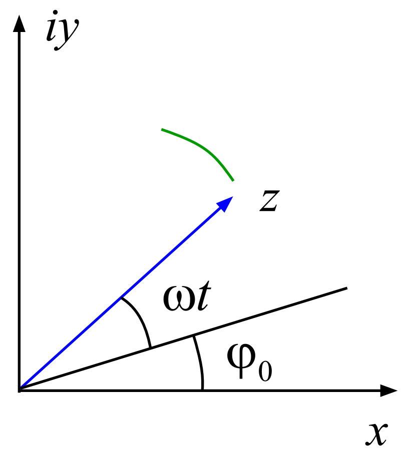
$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Комплексная форма гармонических колебаний

Комплексная форма гармонической функции

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad z = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

График гармонических колебаний



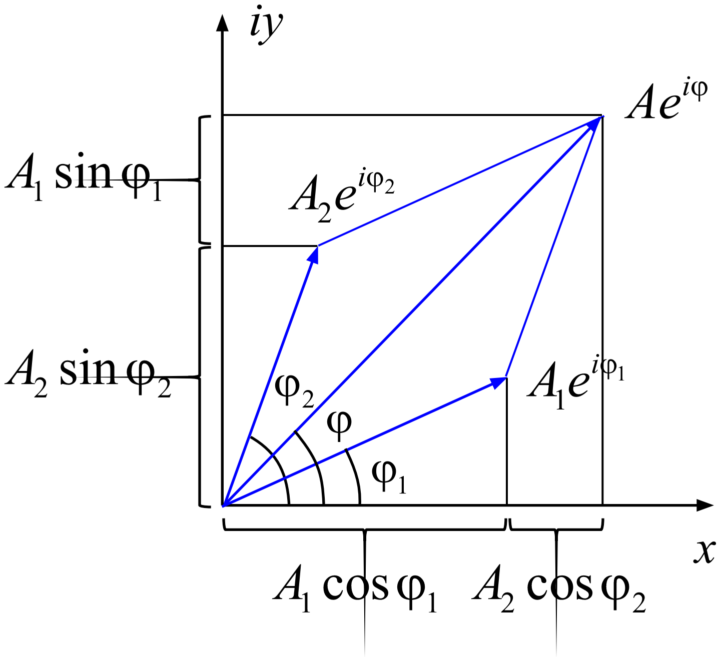
$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y &= \mathrm{Im}(z) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\}$$ — гармонические колебания

Комплексная форма гармонических колебаний

Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$z = z_1 + z_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})e^{i\omega t} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$$



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$z = z_1 + z_2 = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

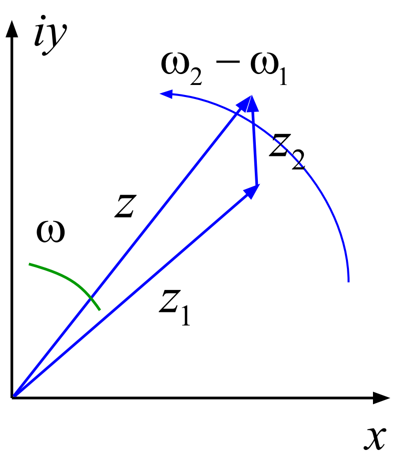
$$x = \mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Комплексная форма гармонических колебаний

Сложение гармонических колебаний близких частот. Биения

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad |\,\omega_2 - \omega_1\,| \ll \omega_1$$

$$A_1 > A_2\,, \quad \omega_2 > \omega_1$$



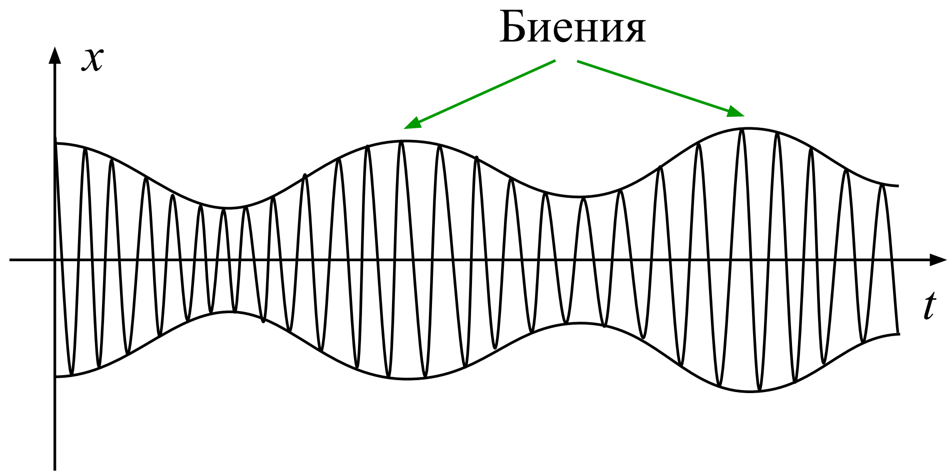
$z = z_1 + z_2$ – квазигармонические колебания с медленно меняющейся амплитудой

$$A:\ (A_1 - A_2) \div (A_1 + A_2)$$

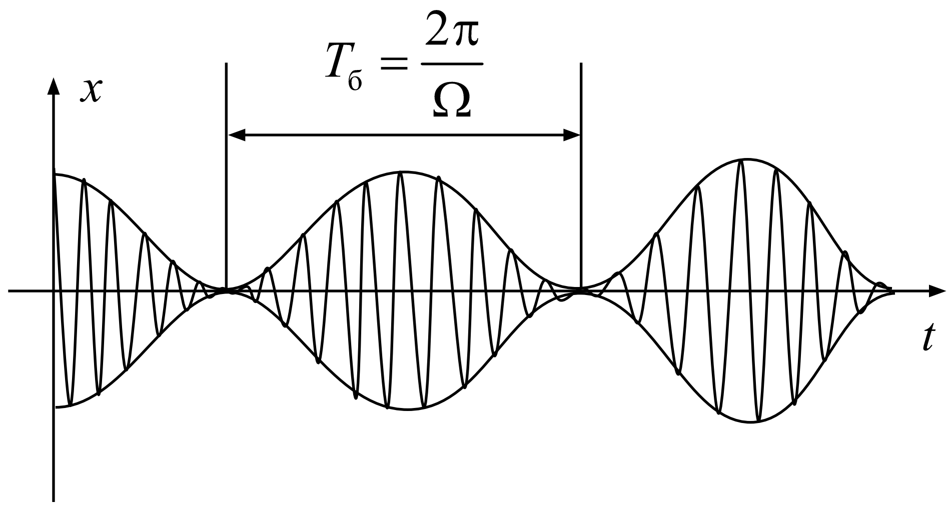
Комплексная форма гармонических колебаний

Биения – колебания амплитуды. Угловая частота биений $\Omega = |\,\omega_2 - \omega_1\,|$

$A_1 \neq A_2$



$A_1 = A_2$



Гармонический осциллятор

Уравнение движения системы, совершающей движение около положения равновесия при малых отклонениях

$$m\ddot{x} = f(x)$$

При малых отклонениях $f(x) = -kx$ $\Rightarrow$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Big| \; :m \quad \Rightarrow \quad \left(\omega^2 = k/m \right)$$

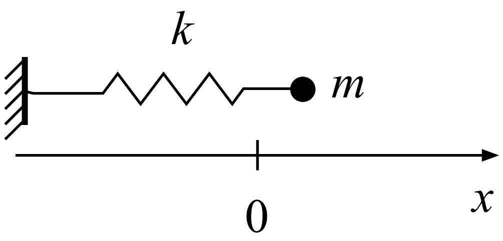
$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$ – *уравнение динамики гармонических колебаний*

Система, совершающая малые колебания, называется *линейным*, или *гармоническим осциллятором*.

Общее решение $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Гармонический осциллятор

Пружинный маятник



$$m\ddot{x} = f(x)$$

$$f(x) = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{и}$$

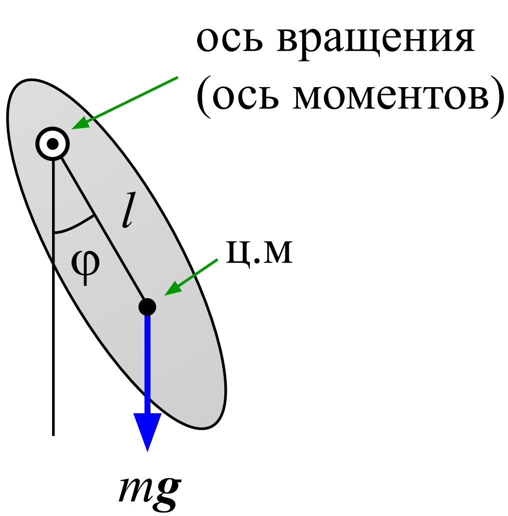
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Гармонический осциллятор

Физический маятник



Физический маятник – это твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси в поле тяжести

Уравнение динамики вращательного движения

$$I\frac{d\omega}{dt} = M^{(e)} = -mgl\sin\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

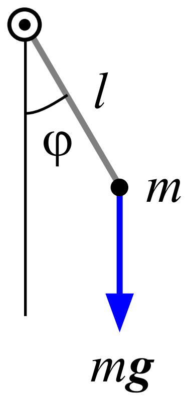
$$\sin\varphi = \varphi \quad \text{(при малых } \phi\text{)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \qquad \left(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Гармонический осциллятор

Математический маятник



Математический маятник – это физический маятник, состоящий из материальной точки, подвешенной на твердом невесомом стержне

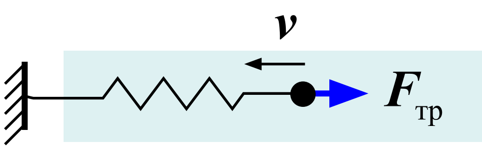
$I = ml^2$ ⇒ (из формул для физического маятника)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Затухающие колебания

Линейный осциллятор при наличии трения



$F_{тр} = -b\dot{x}$ – жидкое трение

Уравнение движения $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \;\Big|\; : m$ $\Longrightarrow$ $\left(\gamma = \dfrac{b}{2m},\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \right)$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

– уравнение динамики затухающих колебаний

Решение ищем в виде $x = A_0 e^{i\beta t}$ $\Longrightarrow$

$$A_0 e^{i\beta t}(-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = 0 \Longrightarrow -\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow$$

Затухающие колебания

Решение квадратного уравнения

$$\beta = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\gamma \pm \omega \qquad \left(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$$

Общее решение $$x = A_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + A_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} = e^{-\gamma t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

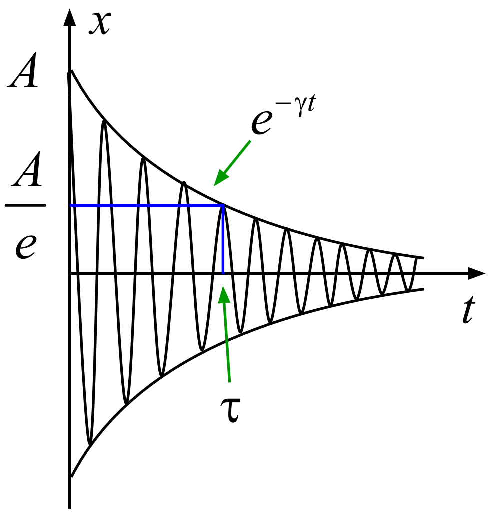
При малом затухании $\left(\gamma < \omega_0 \right)$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$ – уравнение затухающих колебаний

$$\gamma = b/2m$$ – *коэффициент затухания*

$$\tau = 1/\gamma$$ – *время затухания*
(время, за которое амплитуда уменьшается в e раз)

Затухающие колебания



$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{Ae^{-\gamma t}}{Ae^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T}$$ – *декремент затухания*

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T$$ – *логарифмический декремент затухания*

N_e – число периодов, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз $\Rightarrow$

$$\tau = N_e T \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{N_e}$$