Теорема Чевы

Введение

- Джованна Чева сумел доказать теорему Чевы о геометрии треугольника. Основной его заслугой является построение учения о секущих, которое положило начало новой синтетической геометрии.

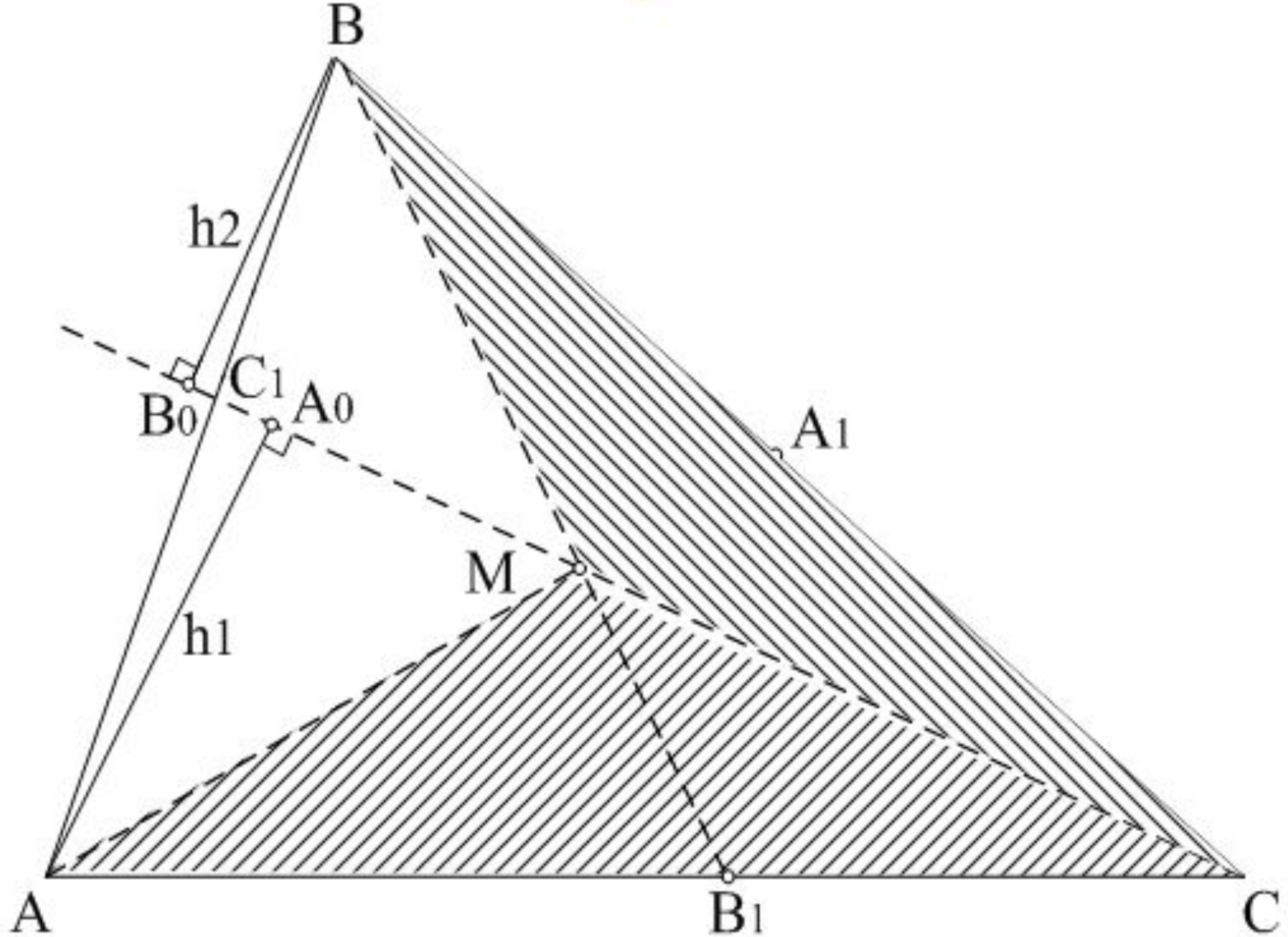
Биография ученого:

- Джованни Чева (1647 - 1734) родился в Италии. Он окончил иезуитский колледж в Милане, после чего стал студентом Университета в Пизе, где позже и стал работать профессором математики. С 1686 года Чева работал в Университете в Мантуе оставаясь на этом посту до самого конца своей жизни. Большую часть жизни Чева изучал геометрию, стараясь возродить греческую геометрию; кроме того, сегодня его помнят и по изысканиям в области механики.

Теорема:

- Теорема о соотношении отрезков нек-рых прямых, пересекающих треугольник. Пусть А $_1$, В $_1$ и С $_1$- три точки, лежащие соответственно на сторонах *BC,* *CA* и *AB* треугольника *ABC.* Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение:
-

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$


B
h2
C1
B0
A0
A1
M
h1
A
B1
C

Доказательство:

- Пусть отрезки , и пересекаются в точке М внутри треугольника АВС. Обозначим через площади треугольников АМС, СМВ и АМВ, а через— расстояния соответственно от точек А и В до прямой МС.

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_1}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}$$

- Аналогично,

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_1}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}$$

- Перемножив полученные пропорции, убеждаемся в справедливости теоремы.

Утверждение, обратное теореме Чевы:

- Пусть точки лежат на сторонах и треугольника соответственно. Пусть выполняется соотношение:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда отрезки и пересекаются в одной точке.

Доказательство:

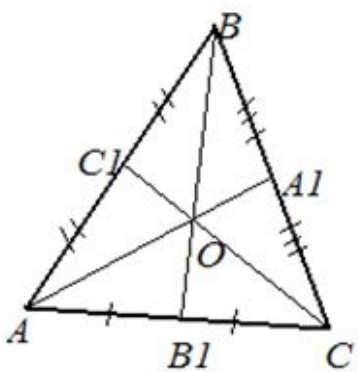
- Пусть – точка пересечения отрезков и и прямая пересекает сторону в некоторой точке. Достаточно доказать, что.
- По теореме Чевы для точек и имеем: $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$
- Но тогда: $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = \frac{AC_1}{C_1B}.$
- Значит, точки C1 и C2 делят отрезок AB в одном и том же отношении. Пусть A1C=x, AC2=y, AB=c. Тогда $\frac{x}{c-x} = \frac{y}{c-y},$

откуда $cx - xy = cy - xy \Leftrightarrow x = y,$

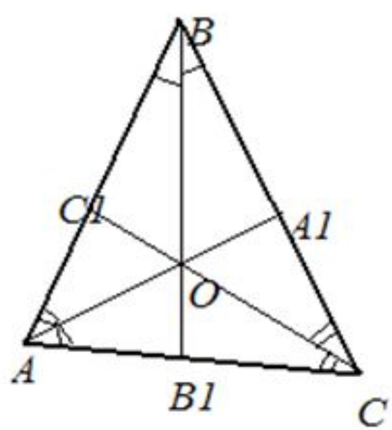
То есть точки C1 и C2 совпадают.

Следствия теоремы:

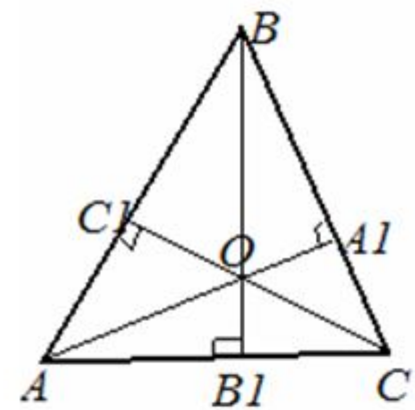
- *1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.*
- *2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*
- *3) Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (ортоцентре треугольника).*
- 1.



2.



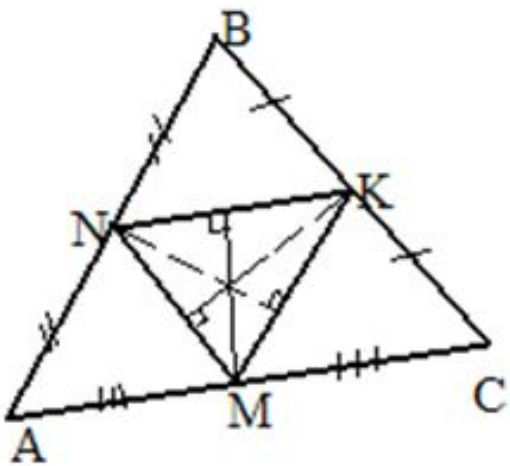
3.



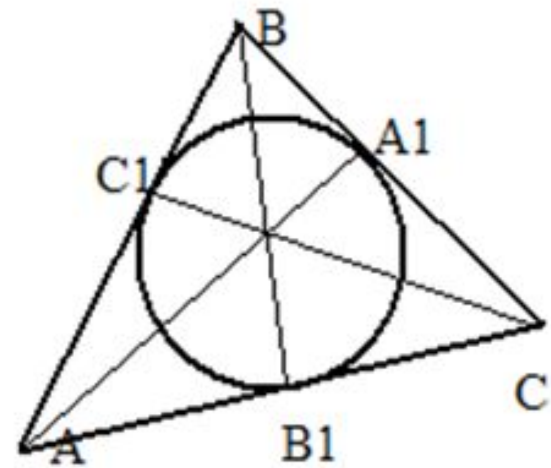
- 4) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

- 5) Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

4.



5.



Заключение

- Теорема Чевы не изучается в основном курсе геометрии 7 –9 классов. Но трудности, связанные с освоением этой теоремы, оправданы ее применением при решении задач. Решение задач с помощью теоремы Чевы более рационально, чем их решение другими способами, требующими дополнительных действий и построений, которые не всегда оказываются очевидными.

Спасибо за внимание!

- Выполнил: Козлов Алексей; 11 «А»