4.2. Понятия теории графов

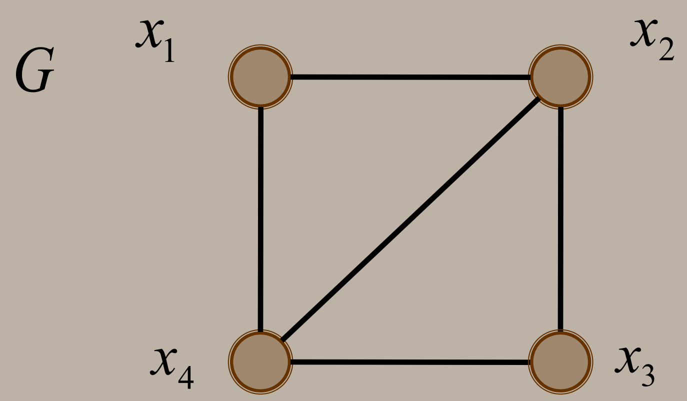
Граф состоит из множества вершин X и рёбер U.
Вершины обозначают кружками, рёбра – прямыми линиями,
граф – буквой G.
Граф, содержащий n вершин и m рёбер, обозначается как

$$G = (X, Y), \quad X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}, \quad |X| = n, \quad U = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}, \quad |U| = m$$

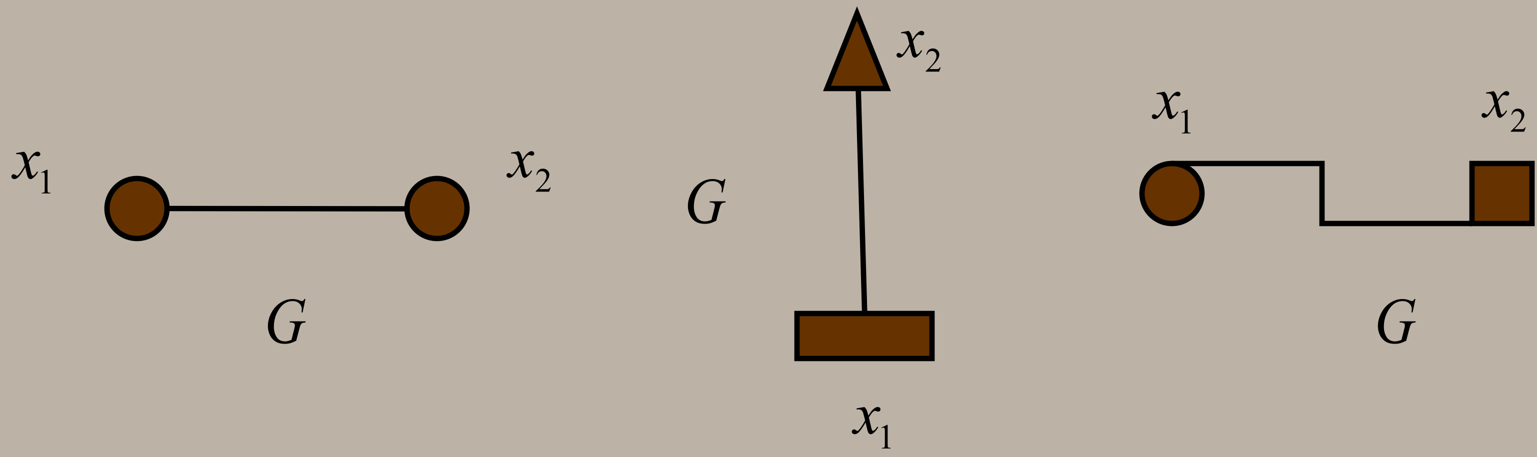
Пример.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad |X| = 4,$$

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_1, x_4)\}, \quad |U| = 5$$



Граф можно изображать по разному:



Ребро графа соединяет две вершины, которые называются смежными. Так, для ребра u_3 смежными будут вершины x_3 и x_4. Ребро u_3 является инцидентным вершинам x_3 и x_4.

Степенью вершины x_i ($\deg x_i$) графа G называется число рёбер, инцидентных x_i, $i = 1, \ldots, n$.

$$\deg x_1 = 2, \quad \deg x_2 = 3, \quad \deg x_3 = 2, \quad \deg x_4 = 3.$$

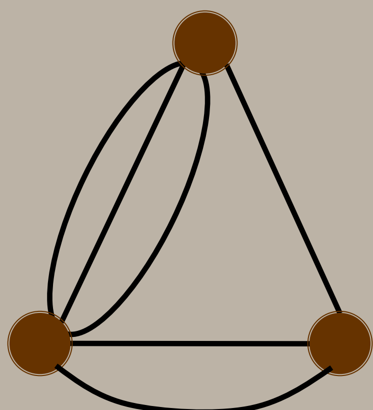
Теорема Эйлера

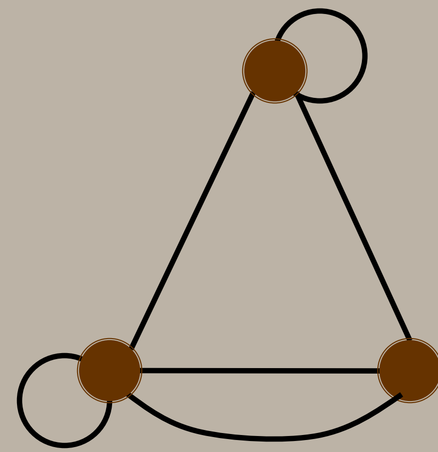
Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его рёбер:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg x_i = 2m$$

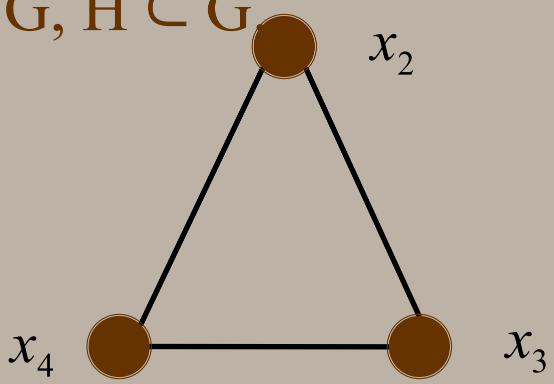
Граф с кратными ребрами называется мультиграфом.

Граф с петлями называется псевдографом.





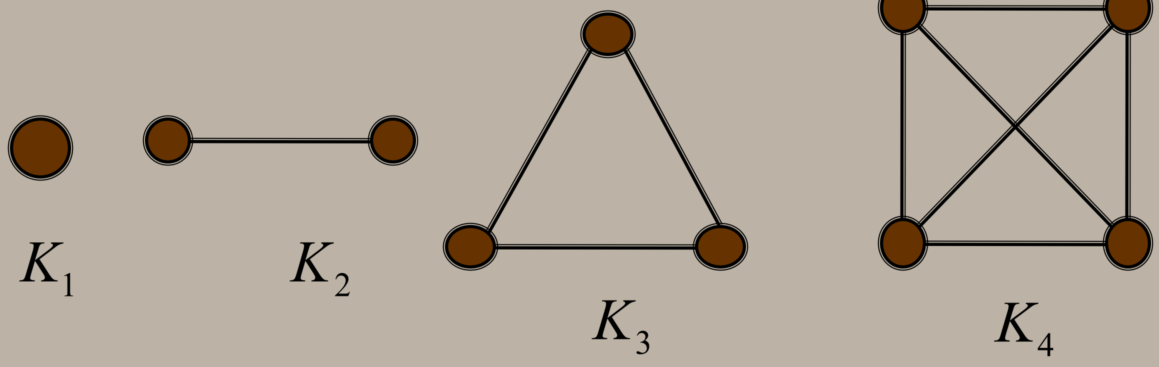
Граф H называется подграфом графа G, если все его вершины и рёбра принадлежат G, $H \subset G$.

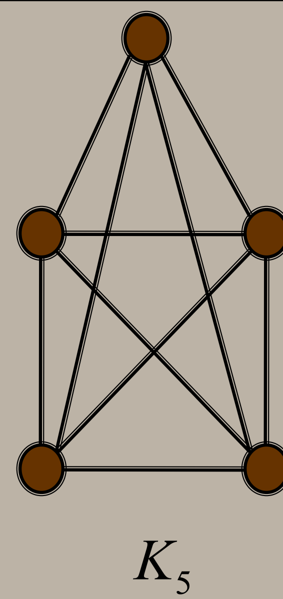


Граф называется полным, если каждая пара его вершин смежна.

Полный граф из n вершин обозначается K_n .

Полные графы для n = 1, 2, 3, 4, 5:

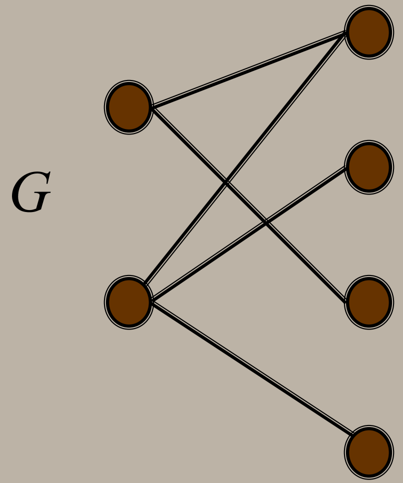


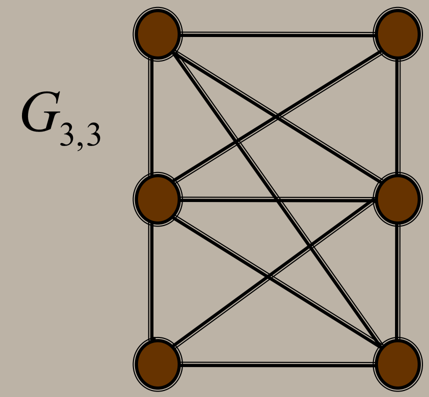


Граф называется двудольным, если множество его вершин X можно разбить на два подмножества X_1 и X_2, такие что

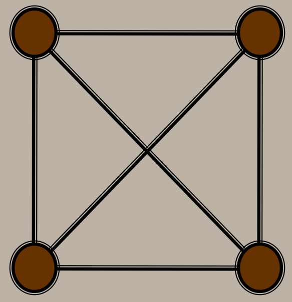
$$\mathbf{X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \varnothing}$$

и каждое ребро графа соединяет вершины из разных множеств.

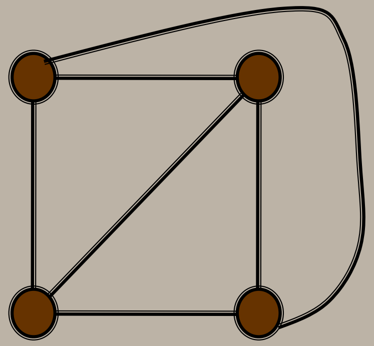




Граф называется планарным, если его можно изобразить без пересечения ребер.



K_4



K_4

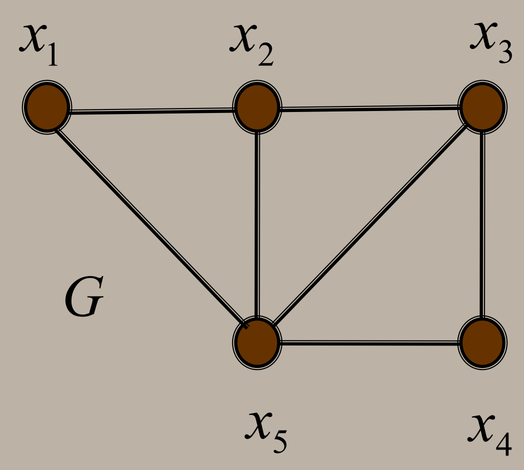
Маршрутом в графе G называется последовательность смежных вершин и рёбер.

Маршрут называется цепью, если все его рёбра различны.

Маршрут называется простой цепью, если все его вершины (а, следовательно, и рёбра) различны.

Если в цепи начальная вершина совпадает с конечной, то она называется циклом.

Если в простой цепи начальная вершина совпадает с конечной, то она называется простым циклом.



$x_1\ x_2\ x_3\ x_2\ x_5$ – маршрут

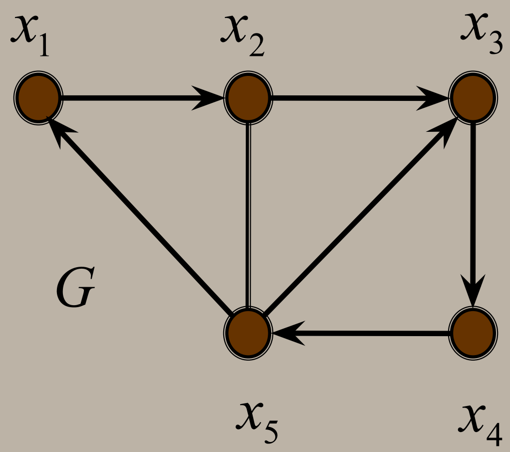
$x_2\ x_5\ x_3\ x_2\ x_1$ – цепь

$x_2\ x_5\ x_3\ x_4$ – простая цепь

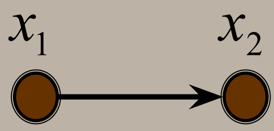
$x_2\ x_5\ x_3\ x_4\ x_5\ x_1\ x_2$ – цикл

$x_2\ x_5\ x_4\ x_3\ x_2$ – простой цикл

Граф называется ориентированным (орграфом), если каждому его ребру приписано направление.



Любая пара смежных вершин называется дугой.



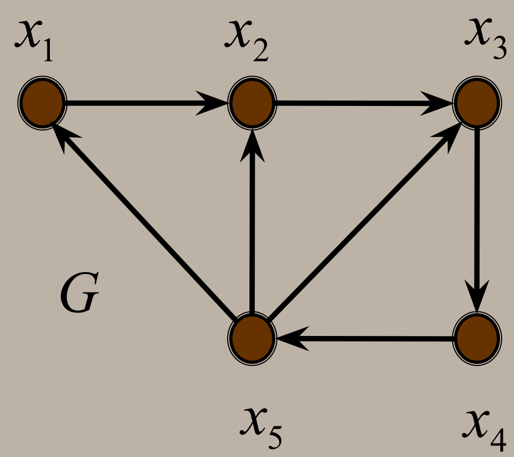
Полустепенью исхода od(x) называется число вершин, смежных из x.

Полустепенью захода id(y) называется число вершин, смежных к y.

Ориентированным маршрутом в орграфе называется чередующаяся последовательность смежных вершин и дуг, которая начинается и оканчивается вершиной.

Маршрут, в котором все вершины различны, называется путём.

Если путь имеет начальную вершину, совпадающую с конечной, то он называется контуром.



$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ – ориентированный маршрут

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ – путь

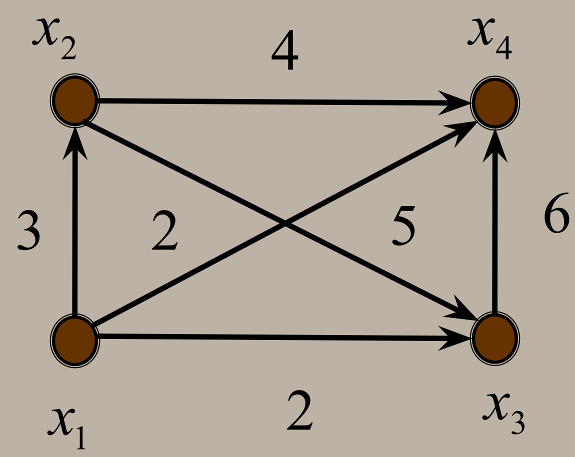
$x_4\ x_2\ x_3\ x_4$ – контур

Длина маршрута (цепи, простой цепи, цикла, простого цикла, ориентированного маршрута, пути, контура) d равна числу входящих в него рёбер (дуг).

$d(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) = 4$
$d(x_4\, x_2\, x_3\, x_4) = 3$

Поставим в соответствие каждому ребру графа G неотрицательное число $w_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

G(X, U, W) – *взвешенный граф*, где $X = \{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$; $U = \{u_j\}$, $j = 1, \ldots, m$; $W = \{w_j\}$, $j = 1, \ldots, m$.



G

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$;

$U=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4)\}$;

$W = \{3, 2, 2, 5, 4, 6\}$.