

Логика высказываний

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

2016 г.

Из истории логики



Это было обусловлено прежде всего проникновением в нее математических методов.

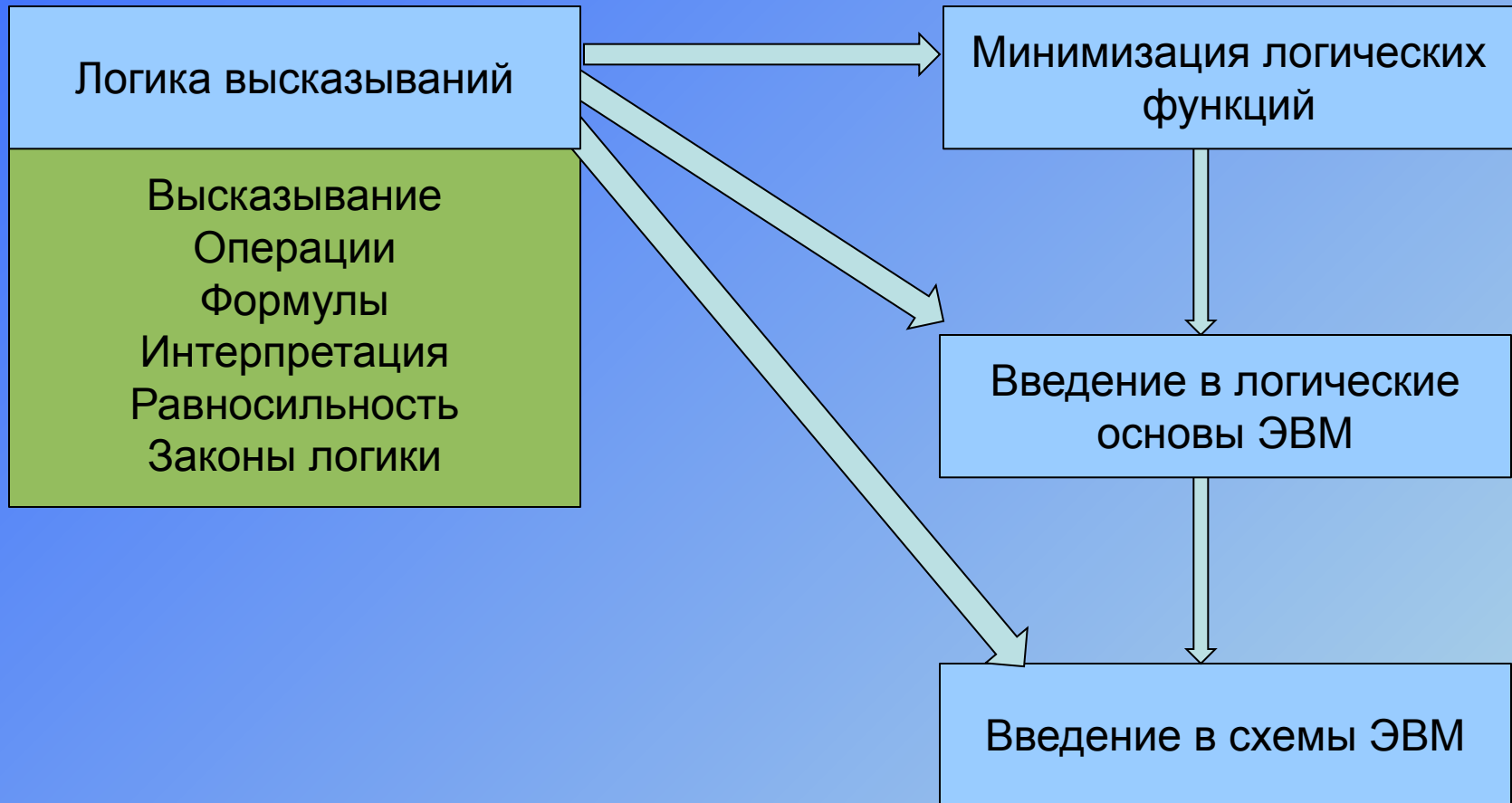
Место логики высказывания

Дискретная математика лежит в основе всей компьютерной логики и принципов организации ЭВМ.



Логика высказываний

Место логики высказывания



Логика высказываний

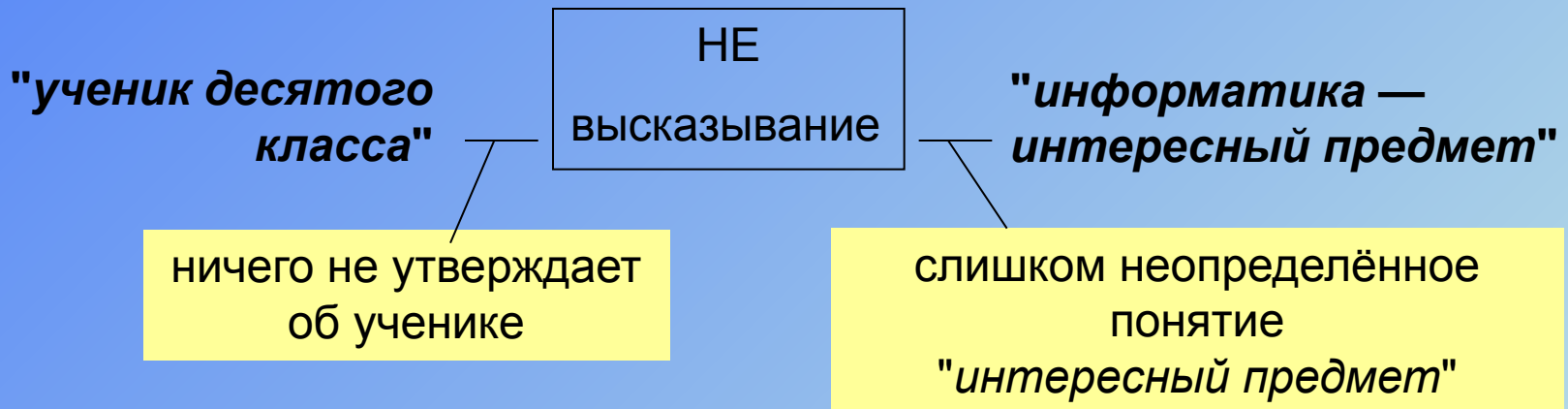
- Логика высказывания:
- Простейшая логика
 - Близка к человеческой логике неформальных рассуждений

Основной объект логики высказывания:

логическое высказывание

Высказывание

Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.



Представление Истины и Лжи

ИСТИНА	И	True	T	1
ЛОЖЬ	Л	False	F	0

позволяет использовать логику высказываний в логических основах ЭВМ

Операции

А. «Число 1 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	ЛОЖЬ	Ф	простое	
В. «Если число 1 является положительным, то число 2 также является положительным»	ИСТИНА	Т	составное	Если А, то Г
Г. «число 2 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	

Операции

Операции - способы построения одних высказываний из других

Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывания:

- 1) « X и Y » называется конъюнкцией высказываний X и Y ;
- 2) « X или Y » называется дизъюнкцией высказываний X и Y ;
- 3) «не X » называется отрицанием высказывания X ;
- 4) «если X , то Y » называется импликацией высказываний X и Y ;
- 5) « X тогда и только тогда, когда Y » называется эквиваленцией высказываний X и Y .

Конъюнкция	$\&$ \wedge	Может не указываться, по аналогии со знаком умножения *
Дизъюнкция	\vee	
Отрицание	\neg	Черточка над высказыванием \bar{A}
Импликация	\rightarrow	
Эквиваленция	\leftrightarrow	

Символы $\&$ (\wedge), \vee , \neg , \rightarrow , \leftrightarrow называются связками.

Операции

Таблица истинности связок:

Случай	p	q	$p \wedge q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	F

Случай	p	q	$p \vee q$
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

Случай	p	$\sim p$
1	T	F
2	F	T

Пример:

А. «Число 1 является положительным»	A
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	$B = \neg A$
В. «Если число 1 является положительным, то число 1+1 также является положительным»	$B = A \rightarrow E$
Е. «число 1+1 является положительным»	E

Условные высказывания

Таблица истинности для высказывания $p \rightarrow q$

Случай	p	q	$p \rightarrow q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	T
4	F	F	T

Символ \rightarrow называется *импликацией*, или *условной связкой*.

Пример.

Требуется найти таблицу истинности для выражения

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r).$$

Используя таблицу истинности для \rightarrow , приведенную выше, построим сначала таблицы истинности для $(p \rightarrow q)$ и $(q \rightarrow r)$, учитывая, что импликация ложна только в случае, когда $T \rightarrow F$.

Случай	p	q	r	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \rightarrow r)$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	F
3	T	F	T	F	F	T
4	T	F	F	F	F	F
5	F	T	T	T	T	T
6	F	T	F	T	F	F
7	F	F	T	T	T	T
8	F	F	F	T	T	F
				1	2	1

Пример. (продолжение)

Теперь используем таблицу для \wedge , чтобы получить для высказывания

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$$

таблицу истинности

Случай	p	q	r	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \rightarrow r)$
1	T	T	T	T	\mathbf{T}	T
2	T	T	F	T	\mathbf{F}	F
3	T	F	T	T	\mathbf{F}	T
4	T	F	F	T	\mathbf{F}	T
5	F	T	T	F	\mathbf{T}	T
6	F	T	F	F	\mathbf{F}	F
7	F	F	T	F	\mathbf{T}	T
8	F	F	F	F	\mathbf{T}	F
				1	*	1

Высказывание вида $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ обозначается через $p \leftrightarrow q$. Символ \leftrightarrow называется *эквиваленцией*. Очевидно, таблица истинности для $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ определяет таблицу истинности для $p \leftrightarrow q$.

Случай	p	q	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$(q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	T	F
3	F	T	T	F	F	F
4	F	F	T	T	T	T
				*		*

Непосредственно из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда p и q имеют одинаковые истинностные значения.

Эквивалентные высказывания

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания называются **логически эквивалентными**. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Например, пусть p и q обозначают высказывания

p : *Сегодня шел дождь.*

q : *Сегодня шел снег.*

Рассмотрим сложные высказывания:

Неверно, что сегодня шел дождь или снег,

Или символически

$$\sim(p \vee q),$$

И

Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег.

Или символически

$$\sim p \wedge \sim q.$$

Построим таблицы истинности для обоих высказываний.

Случай	p	q	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
1	T	T	F	F
2	T	F	F	F
3	F	T	F	F
4	F	F	T	T
			*	#

Итак, во всех четырех строках истинностные значения для $\sim(p \vee q)$ (обозначенные *) и для $\sim p \wedge \sim q$ (обозначенные #) совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны, т.е.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.$$

Эквивалентность — очень полезное свойство; используя его, можно строить отрицание высказываний с “или”, осуществляя отрицание каждой из его частей и меняя “или” на “и”.

С условным высказыванием — импликацией $p \rightarrow q$ — связаны еще три типа высказываний: **конверсия**, **инверсия** и **контрапозиция** высказывания $p \rightarrow q$. Они определяются следующим образом:

$p \rightarrow q$	импликация
$q \rightarrow p$	конверсия высказывания $p \rightarrow q$
$\sim p \rightarrow \sim q$	инверсия высказывания $p \rightarrow q$
$\sim q \rightarrow \sim p$	контрапозиция высказывания $p \rightarrow q$

Пусть дано высказывание-импликация *Если он играет в футбол, то он популярен*. Для этой импликации имеем:

конверсия:	<i>Если он популярен, то он играет в футбол</i>
инверсия:	<i>Если он не играет в футбол, то он не популярен</i>
контрапозиция:	<i>Если он не популярен, то он не играет в футбол</i>

Формулы

Как можно абстрагироваться от высказываний на естественном языке?

Как можно применить математический аппарат для высказываний?

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой**.

Формулы

Атомарными формулами логики высказываний называются буквы U, V, W, X, Y, Z с индексами и без них, а также символы истины 1 и лжи 0.

Формулами логики высказываний называются

- 1) атомарные формулы;
- 2) выражения вида $(F) \& (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \rightarrow (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$, где F и G – формулы логики высказываний.

"если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог"

"если Игорь знает английский или японский язык, то он получит место переводчика"

$(A \vee B) \rightarrow C$

Формула

Формулы

Использование операция в записи формул:

Приоритет связок-операций: (аналогично с арифметическими операциями)

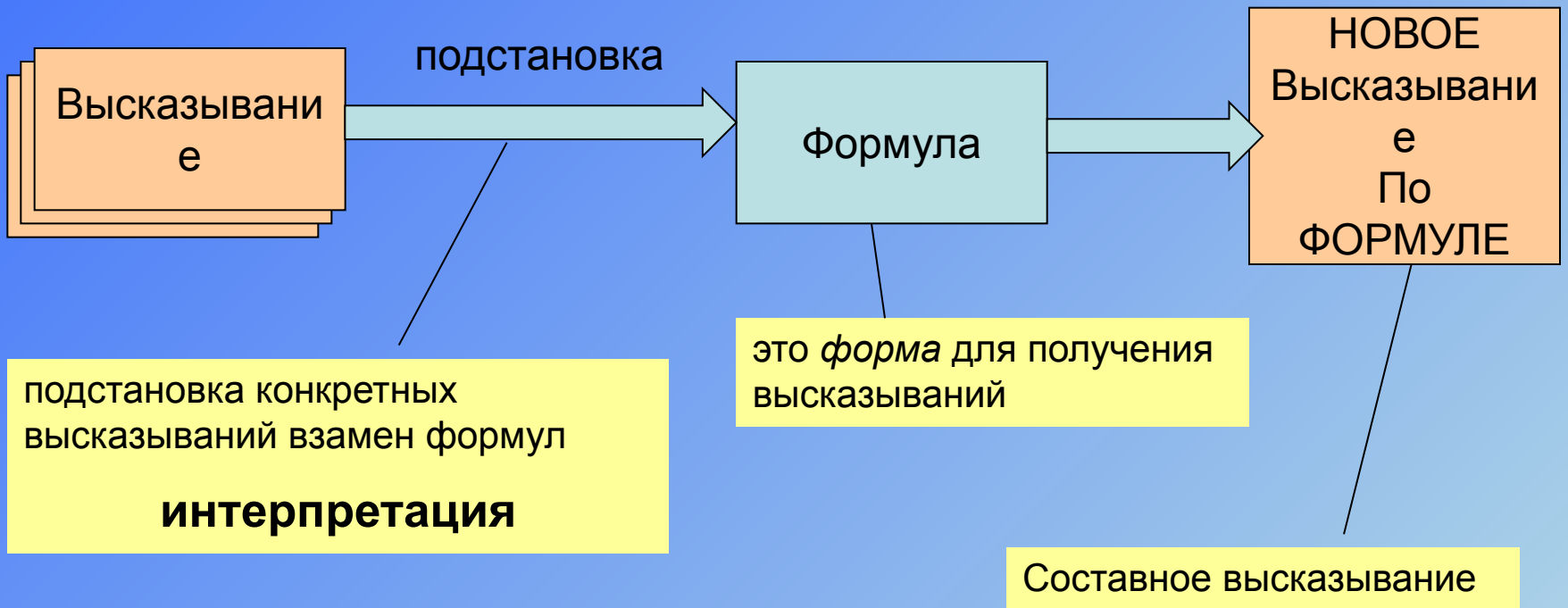
1	наивысший	\neg	Отрицание
2	высокий	$\&$	Конъюнкция
3	средний	\vee	Дизъюнкция
4	низкий	\rightarrow \leftrightarrow	Импликация Эквиваленция

- * / + - ()

Примеры:

$(X \& Y) \vee Z$	$X \& Y \vee Z$
$(\neg X) \& Y$	$\neg X \& Y$
$X \vee (\neg Y)$	$X \vee \neg Y$
$(X \vee Y) \& Z$	$(X \vee Y) \& Z$
$((X) \& (Y)) \rightarrow (Z)$	$X \& Y \rightarrow Z$
$(X \vee Y) \leftrightarrow (K \& L)$	$X \vee Y \leftrightarrow K \& L$

Интерпретация



Интерпретация

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть функцию

$$I: F \rightarrow P$$

где F - множество всех формул логики высказывания

P - множество всех высказываний

такую, что $I(0)$ =ложь, $I(1)$ =истина

Некая функция интерпретации I ставит в соответствие формуле (из области определения функции) значение — высказывание (которое является значением функции).

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

$I_1(X) = \text{«1 - положительное число»}$

$I_2(Y) = \text{«2 - четное число»}$

$F = X \ \& \ Y$

$$I_1(F) = I_1(X) \ \& \ I_1(Y) =$$

= «1 – положительное число» & «2 — четное число» =

= «1 – положительное число И 2 — четное число»

Интерпретация

На самом деле от высказываний $I(F)$ нам, в основном, будут нужны только их истинные значения 1 и 0.

Интерпретацией в узком смысле мы будем называть функцию

$$I: F \rightarrow \{0,1\}$$

где F - множество всех формул логики высказывания
такую, что $I(0)=0$ - ложь, $I(1)=1$ - истина

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

$$I_1(X) = 1$$

$$I_2(Y) = 1$$

$$F = X \& Y$$

$$\begin{aligned} I_1(F) &= I_1(X) \& I_1(Y) = \\ &= 1 \& 1 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Равносильность

Формулы, которые выражают одно и то же, например, формулы $X \vee Y$ и $Y \vee X$, будем называть *равносильными*.

Формулы F и G называются *равносильными*, если для любой интерпретации I выполняется равенство $I(F)=I(G)$

обозначается символом "=" или символом " \equiv "

Формула F называется *тождественно истинной* если для любой интерпретации j выполняется равенство $I(F)=1$

Законы логики

1	$F \& 1 = F$	
2	$F \vee 1 = 1$	
3	$F \& 0 = 0$	
4	$F \vee 0 = F$	
5	$F \& F = F$	идемпотентность
6	$F \vee F = F$	
7	$F \& G = G \& F$	коммутативность
8	$F \vee G = G \vee F$	
9	$F \& (G \& H) = (F \& G) \& H$	Ассоциативность конъюнкции. Ассоциативность конъюнкции означает, что в конъюнкции трех формул скобки можно ставить как угодно, а, следовательно, вообще не ставить.
10	$F \vee (G \vee H) = (F \vee G) \vee H$	Ассоциативность дизъюнкции. Скобки можно ставить как угодно, а соответственно, вообще не ставить.
11	$F \& (G \vee H) = (F \& G) \vee (F \& H)$	Дистрибутивность - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
12	$F \vee (G \& H) = (F \vee G) \& (F \vee H)$	Дистрибутивность - дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

Законы логики

13	$F \& (F \vee G) = F$	закон поглощения
14	$F \vee (F \& G) = F$	
15	$F \& \neg F = 0$	закон противоречия
16	$F \vee \neg F = 1$	закон исключенного третьего
17	$\neg(F \& G) = \neg F \vee \neg G$	законы де Моргана, в честь известного французского математика и логика
18	$\neg(F \vee G) = \neg F \& \neg G$	
19	$\neg\neg F = F$	закон снятия двойного отрицания
20	$F \rightarrow G = \neg F \vee G$	
21	$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F)$	

Теорема.

а) Законы идемпотентности

$$p \wedge p \equiv p;$$

$$p \vee p \equiv p.$$

б) Закон двойного отрицания

$$\sim(\sim p) \equiv p.$$

в) Законы де Моргана

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q;$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

г) Свойства коммутативности

$$p \wedge q \equiv q \wedge p;$$

$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

д) Свойства ассоциативности

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

Теорема (продолжение)

д) Свойства ассоциативности

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

е) Свойства дистрибутивности

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

ж) Закон контрапозиции

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p.$$

з) Другие полезные свойства

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q;$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывание, истинное во всех случаях, называется **логически истинным**, или тавтологией; высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется **логически ложным**, или **противоречием**. Теоремы в математике являются примерами тавтологий.

Рассмотрим высказывание вида

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Ему соответствует таблица истинности

Случай	p	q	$(p \wedge (p \rightarrow q))$		\rightarrow	q
1	T	T	T	T	T	T
2	T	F	T	F	F	F
3	F	T	F	F	T	T
4	F	F	F	F	T	F
					*	

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Имея логически истинное высказывание - тавтологии, легко построить логически ложное высказывание - противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание

$$\sim((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$$

логически ложно.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются

$$p \rightarrow q.$$

Примеры таких конструкций:

Если p , то q .

p достаточно для q .

p является достаточным условием для q .

q необходимо для p .

q является необходимым условием для p .

p , только если q (или: только если q , то p).

Таблица для $p \rightarrow q$ показывает, что если $p \rightarrow q$ истинно и p истинно, тогда q должно быть истинным, т.е. истинность p достаточна для истинности q . Поэтому *p достаточно для q* имеет тот же смысл, что и $p \rightarrow q$. Таким образом, если q ложно и q необходимо для p , тогда p должно быть ложно. Поэтому, если $\sim q$ истинно, тогда $\sim p$ должно быть истинно и $\sim q \rightarrow \sim p$. Но последнее выражение — контрапозиция для $p \rightarrow q$; следовательно, *q необходимо для p* имеет то же значение, что и $p \rightarrow q$.



Законы логики

Модус поненс и модус толленс

Модус поненс и модус толленс

«Модусом» в логике называется разновидность некоторой общей формы рассуждения. Далее будут перечислены четыре близких друг другу модуса, известных еще средневековым логикам.

Модус поненс, называемый иногда *гипотетическим силлогизмом*, позволяет от утверждения условного высказывания и утверждения его

основания перейти к утверждению следствия этого высказывания:

Если А, то В; А

В

Здесь высказывания «если А, то В» и «А» — посылки, высказывание «В» — заключение.

Горизонтальная черта стоит вместо слова «следовательно».

Другая запись:

Если А, то В. А. Следовательно, В.



Законы логики

Модус поненс и модус толленс

Модусом толленсом называется следующая схема рассуждения:

Если А. то В; неверно В

Неверно А

Здесь высказывания «если А, то В» и «неверно В» являются посылками, а высказывание «неверно А» — заключением. Другая запись:

Если А, то В. Не-В. Следовательно, не-А.

Посредством этой схемы от утверждения условного высказывания и отрицания его следствия осуществляется переход к отрицанию основания.

Например: «Если гелий — металл, он электропроводен.

Гелий неэлектропроводен. Следовательно, гелий — не металл».

По схеме модус толленс идет процесс *фальсификации*, установления ложности теории или гипотезы в результате ее эмпирической проверки.

Из проверяемой теории Т выводится некоторое эмпирическое утверждение А, то есть устанавливается условное высказывание «если Т, то А».

Посредством эмпирических методов познания (наблюдения, измерения или эксперимента) предложение А сопоставляется с реальным положением дел.

Выясняется, что А ложно и истинно предложение не-А.

Из посылок «если Т, то А» и «не-А» следует «не-Т», то есть ложность теории Т.

Проверка на равносильность

Способы проверки на равносильность:

1

С использованием
таблицы истинности

2

С использованием
логического
преобразования

Проверка на равносильность

Способ 1: Построение таблицы истинности.

Для того, чтобы доказать эквивалентность двух формул алгебры логики, достаточно показать, что они принимают одни и те же значения на одинаковых наборах значений своих переменных.

Докажем справедливость первого закона де Моргана:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Формулы $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$ принимают одинаковые значения на одинаковых наборах значений своих аргументов, значит эти две формулы эквивалентны.

Проверка на равносильность

С использованием таблицы истинности

Проверим на равносильность формулы:

$$F = X \rightarrow Y$$

$$G = \neg X \vee Y$$

X	Y	$F = X \rightarrow Y$	$\neg X$	$G = \neg X \vee Y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

при всевозможных интерпретациях X и Y интерпретации F и G имеют равные значения.

Значит $F = G$, то есть F и G равносильны.

Проверка на равносильность

Способ 2: Если конечная цепочка тождественных преобразований переводит одну формулу к другой, формулы также являются эквивалентными.

Докажем справедливость второго закона де Моргана при условии, что первый закон де Моргана выполняется:

$$\overline{x \wedge y} = \overline{\overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}}} = \left| \begin{array}{l} \text{по 1-му закону} \\ \text{де Моргана} \end{array} \right| = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}$$