

# Логика высказываний

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич  
кандидат физико-математических наук, доцент

2016 г.

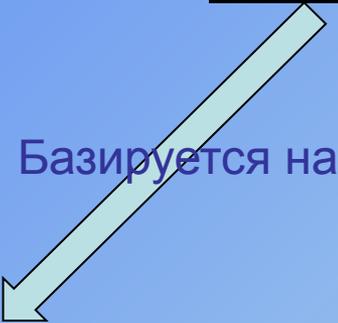
# Из истории логики



Это было обусловлено прежде всего проникновением в нее математических методов.

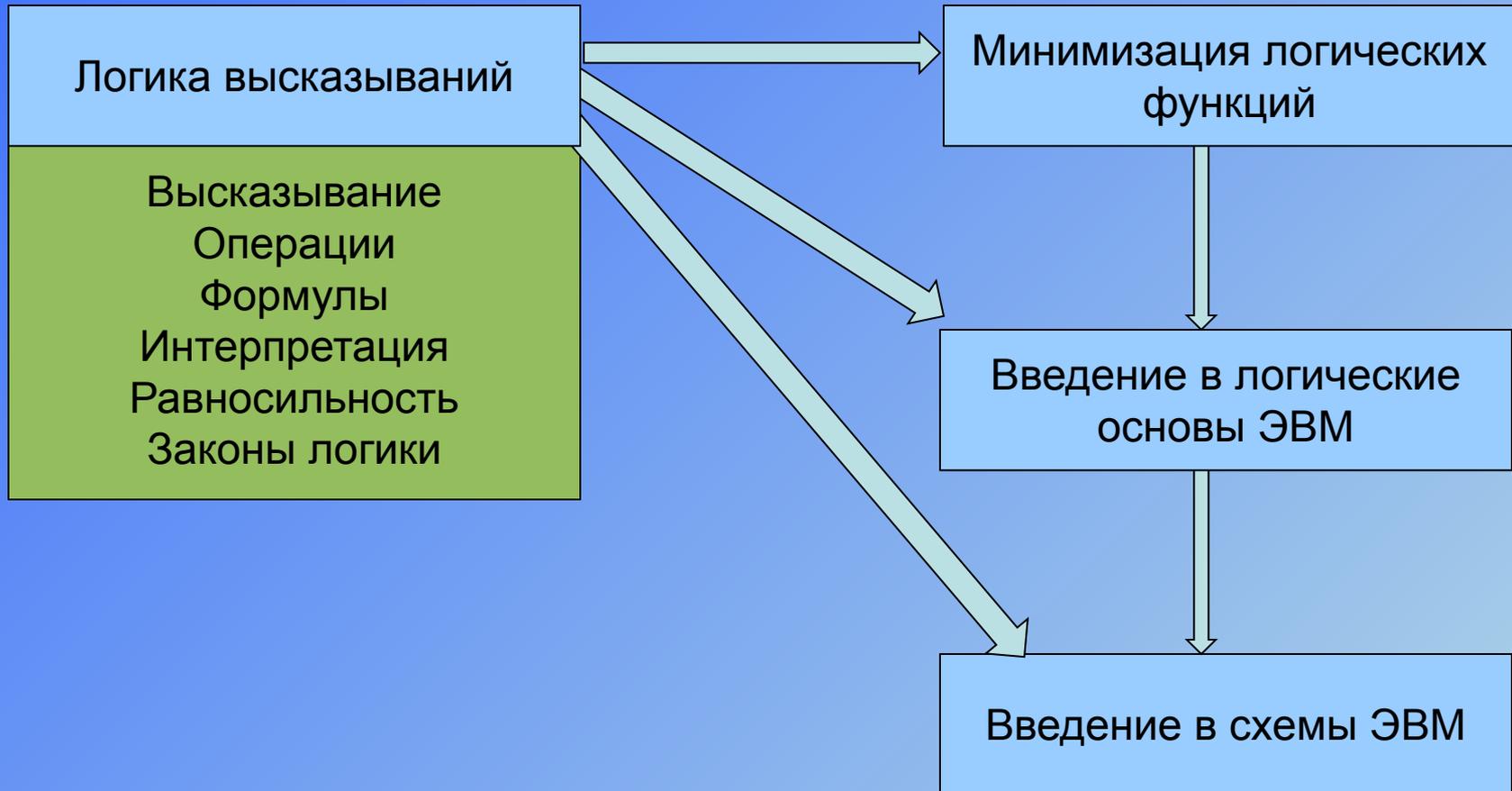
# Место логики высказывания

Дискретная математика лежит в основе всей компьютерной логики и принципов организации ЭВМ.



Логика высказываний

# Место логики высказывания



# Логика высказываний

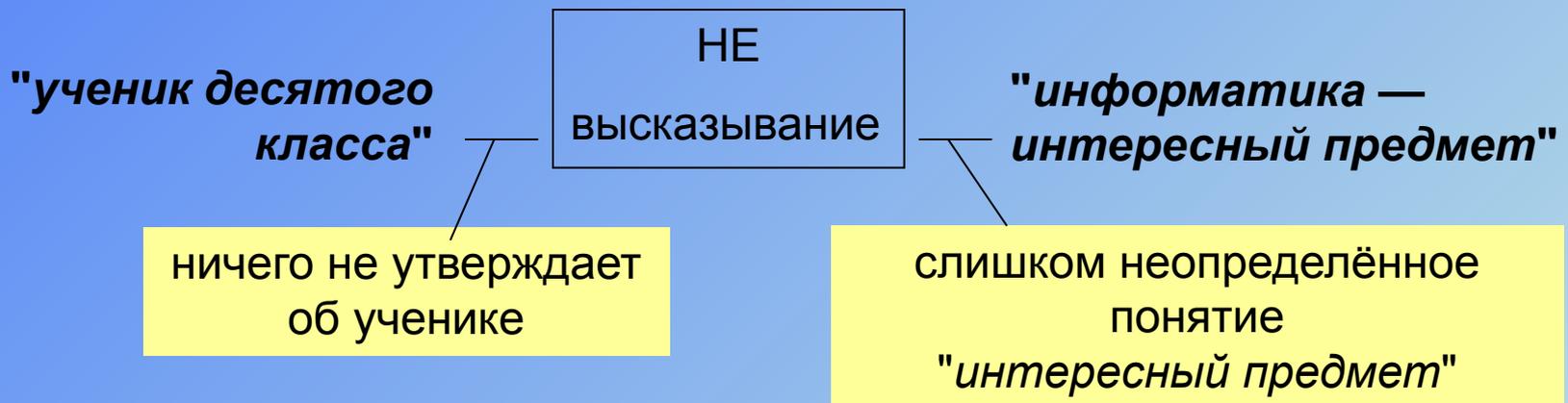
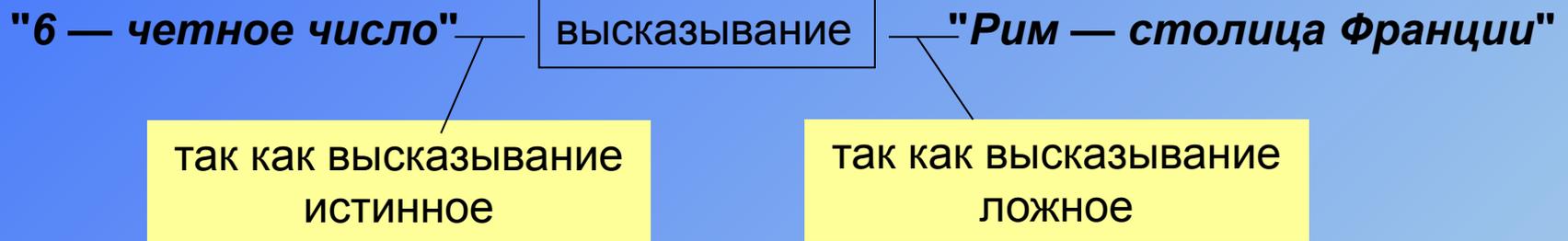
- Логика высказывания:
- Простейшая логика
  - Близка к человеческой логике неформальных рассуждений

Основной объект логики высказывания:

**логическое высказывание**

# Высказывание

*Высказывание* – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.



# Представление Истины и Лжи

ИСТИНА	И	True	T	1
ЛОЖЬ	Л	False	F	0

позволяет использовать логику высказываний в логических основах ЭВМ

# Операции

А. «Число 1 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	ЛОЖЬ	Ф	простое	
В. «Если число 1 является положительным, то число 2 также является положительным»	ИСТИНА	Т	составное	Если А, то Г
Г. «число 2 является положительным»	ИСТИНА	Т	Простое	

# Операции

Операции - способы построения одних высказываний из других

Пусть  $X$  и  $Y$  – некоторые высказывания. Тогда высказывания:

- 1) « $X$  и  $Y$ » называется конъюнкцией высказываний  $X$  и  $Y$ ;
- 2) « $X$  или  $Y$ » называется дизъюнкцией высказываний  $X$  и  $Y$ ;
- 3) «не  $X$ » называется отрицанием высказывания  $X$ ;
- 4) «если  $X$ , то  $Y$ » называется импликацией высказываний  $X$  и  $Y$ ;
- 5) « $X$  тогда и только тогда, когда  $Y$ » называется эквиваленцией высказываний  $X$  и  $Y$ .

Конъюнкция	$\&$ $\wedge$	Может не указываться, по аналогии со знаком умножения *
Дизъюнкция	$\vee$	
Отрицание	$\neg$	Черточка над высказыванием $\bar{A}$
Импликация	$\rightarrow$	
Эквиваленция	$\leftrightarrow$	

Символы  $\&$  ( $\wedge$ ),  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  называются связками.

# Операции

Таблица истинности связок:

Случай	$p$	$q$	$p \wedge q$
1	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$F$	$F$
3	$F$	$T$	$F$
4	$F$	$F$	$F$

Случай	$p$	$q$	$p \vee q$
1	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$F$	$T$
3	$F$	$T$	$T$
4	$F$	$F$	$F$

Случай	$p$	$\sim p$
1	$T$	$F$
2	$F$	$T$

Пример:

А. «Число 1 является положительным»	$A$
Б. «Неверно, что число 1 является положительным»	$B = \neg A$
В. «Если число 1 является положительным, то число 1+1 также является положительным»	$B = A \rightarrow E$
Е. «число 1+1 является положительным»	$E$

# Условные высказывания

Таблица истинности для высказывания  $p \rightarrow q$

Случай	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$F$	$F$
3	$F$	$T$	$T$
4	$F$	$F$	$T$

Символ  $\rightarrow$  называется *импликацией*, или *условной связкой*.

## Пример.

Требуется найти таблицу истинности для выражения

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r).$$

Используя таблицу истинности для  $\rightarrow$ , приведенную выше, построим сначала таблицы истинности для  $(p \rightarrow q)$  и  $(q \rightarrow r)$ , учитывая, что импликация ложна только в случае, когда  $T \rightarrow F$ .

Случай	$p$	$q$	$r$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)$
1	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$
3	$T$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$
4	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$
5	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
6	$F$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$
7	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$
8	$F$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$

## Пример. (продолжение)

Теперь используем таблицу для  $\wedge$ , чтобы получить для высказывания

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$$

таблицу истинности

Случай	$p$	$q$	$r$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)$
1	$T$	$T$	$T$	$T$	$\mathbf{T}$	$T$
2	$T$	$T$	$F$	$T$	$\mathbf{F}$	$F$
3	$T$	$F$	$T$	$T$	$\mathbf{F}$	$T$
4	$T$	$F$	$F$	$T$	$\mathbf{F}$	$T$
5	$F$	$T$	$T$	$F$	$\mathbf{T}$	$T$
6	$F$	$T$	$F$	$F$	$\mathbf{F}$	$F$
7	$F$	$F$	$T$	$F$	$\mathbf{T}$	$T$
8	$F$	$F$	$F$	$F$	$\mathbf{T}$	$T$
				1	*	1

Высказывание вида  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  обозначается через  $p \leftrightarrow q$ . Символ  $\leftrightarrow$  называется *эквиваленцией*. Очевидно, таблица истинности для  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  определяет таблицу истинности для  $p \leftrightarrow q$ .

Случай	$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
1	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$
3	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$F$
4	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$
				*		*

Непосредственно из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда  $p$  и  $q$  имеют одинаковые истинностные значения.

## Эквивалентные высказывания

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания называются **логически эквивалентными**. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Например, пусть  $p$  и  $q$  обозначают высказывания

$p$ : *Сегодня шел дождь.*

$q$ : *Сегодня шел снег.*

Рассмотрим сложные высказывания:

*Неверно, что сегодня шел дождь или снег,*

Или символически

$$\sim(p \vee q),$$

И

*Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег.*

Или символически

$$\sim p \wedge \sim q.$$

Построим таблицы истинности для обоих высказываний.

Случай	$p$	$q$	$\sim$	$(p \vee q)$	$\sim p$	$\wedge$	$\sim q$
1	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$F$
2	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$
3	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$
4	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$
			*			#	

Итак, во всех четырех строках истинностные значения для  $\sim(p \vee q)$  (обозначенные \*) и для  $\sim p \wedge \sim q$  (обозначенные #) совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны, т.е.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.$$

Эквивалентность — очень полезное свойство; используя его, можно строить отрицание высказываний с “или”, осуществляя отрицание каждой из его частей и меняя “или” на “и”.

С условным высказыванием — импликацией  $p \rightarrow q$  — связаны еще три типа высказываний: **конверсия**, **инверсия** и **контрапозиция** высказывания  $p \rightarrow q$ . Они определяются следующим образом:

$p \rightarrow q$	импликация
$q \rightarrow p$	конверсия высказывания $p \rightarrow q$
$\sim p \rightarrow \sim q$	инверсия высказывания $p \rightarrow q$
$\sim q \rightarrow \sim p$	контрапозиция высказывания $p \rightarrow q$

Пусть дано высказывание-импликация *Если он играет в футбол, то он популярен*. Для этой импликации имеем:

конверсия:	<i>Если он популярен, то он играет в футбол</i>
инверсия:	<i>Если он не играет в футбол, то он не популярен</i>
контрапозиция:	<i>Если он не популярен, то он не играет в футбол</i>

# Формулы

Как можно абстрагироваться от высказываний на естественном языке?

Как можно применить математический аппарат для высказываний?

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой**.

# Формулы

*Атомарными формулами логики высказываний* называются буквы  $U, V, W, X, Y, Z$  с индексами и без них, а также символы истины 1 и лжи 0.

*Формулами логики высказываний* называются

- 1) атомарные формулы;
- 2) выражения вида  $(F) \& (G)$ ,  $(F) \vee (G)$ ,  $\neg(F)$ ,  $(F) \rightarrow (G)$ ,  $(F) \leftrightarrow (G)$ , где  $F$  и  $G$  – формулы логики высказываний.

"если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог"

"если Игорь знает английский или японский язык, то он получит место переводчика"

$(A \vee B) \rightarrow C$

Формула

# Формулы

Использование операция в записи формул:

Приоритет связок-операций: (аналогично с арифметическими операциями)

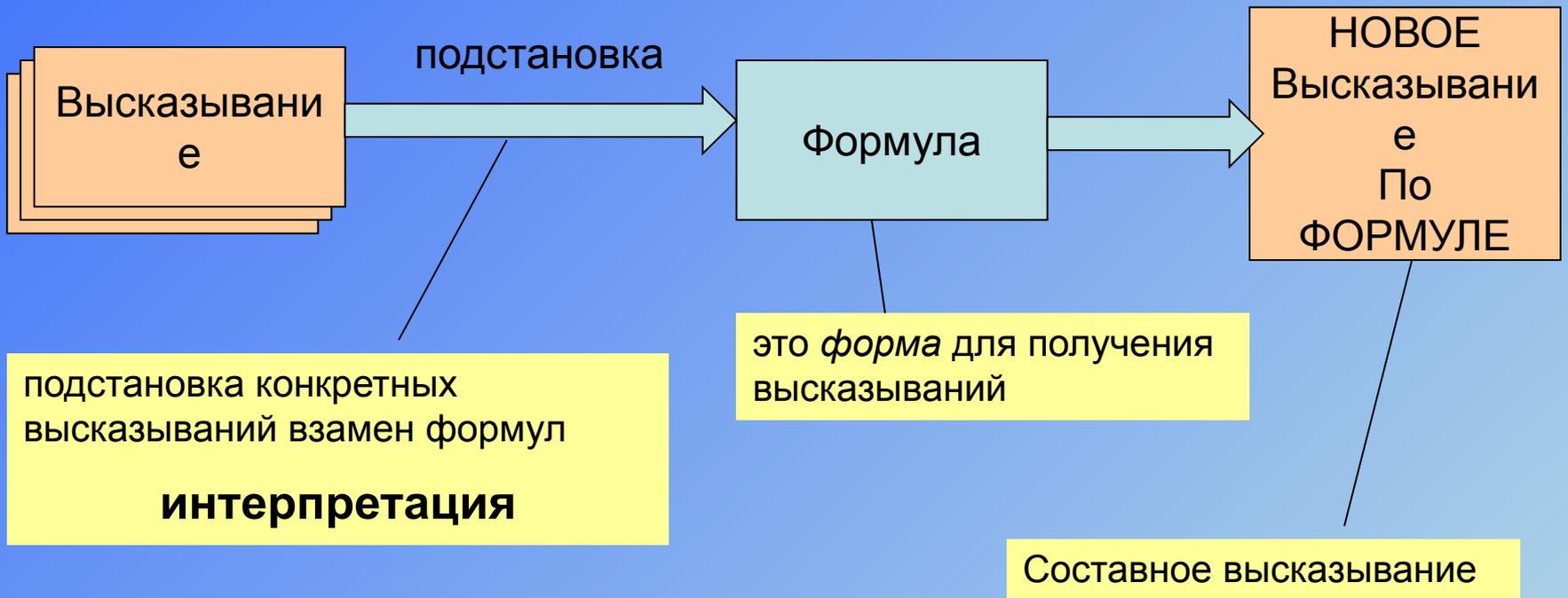
1	наивысший	$\neg$	Отрицание
2	высокий	$\&$	Конъюнкция
3	средний	$\vee$	Дизъюнкция
4	низкий	$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	Импликация Эквиваленция

- \* / + - ()

Примеры:

$(X \& Y) \vee Z$	$X \& Y \vee Z$
$(\neg X) \& Y$	$\neg X \& Y$
$X \vee (\neg Y)$	$X \vee \neg Y$
$(X \vee Y) \& Z$	$(X \vee Y) \& Z$
$((X) \& (Y)) \rightarrow (Z)$	$X \& Y \rightarrow Z$
$(X \vee Y) \leftrightarrow (K \& L)$	$X \vee Y \leftrightarrow K \& L$

# Интерпретация



# Интерпретация

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть функцию

$$I: F \rightarrow P$$

где  $F$  - множество всех формул логики высказывания

$P$  - множество всех высказываний

такую, что  $I(0)$ =ложь,  $I(1)$ =истина

Некая функция интерпретации  $I$  ставит в соответствие формуле (из области определения функции) значение — высказывание (которое является значением функции).

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

$I_1(X) = \text{«1 - положительное число»}$

$I_2(Y) = \text{«2 - четное число»}$

$F = X \ \& \ Y$

$$I_1(F) = I_1(X) \ \& \ I_1(Y) =$$

= «1 – положительное число» & «2 — четное число» =

= «1 – положительное число И 2 — четное число»

# Интерпретация

На самом деле от высказываний  $I(F)$  нам, в основном, будут нужны только их истинные значения 1 и 0.

*Интерпретацией в узком смысле* мы будем называть функцию

$$I: F \rightarrow \{0,1\}$$

где  $F$  - множество всех формул логики высказывания  
такую, что  $I(0)=0$  - ложь,  $I(1)=1$  - истина

«1 - положительное число»

«2 - четное число»

$$I_1(X) = 1$$

$$I_2(Y) = 1$$

$$F = X \& Y$$

$$\begin{aligned} I(F) &= I_1(X) \& I_2(Y) = \\ &= 1 \& 1 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

# Равносильность

Формулы, которые выражают одно и то же, например, формулы  $X \vee Y$  и  $Y \vee X$ , будем называть *равносильными*.

Формулы  $F$  и  $G$  называются *равносильными*, если для любой интерпретации  $I$  выполняется равенство  $I(F)=I(G)$

обозначается символом "=" или символом " $\equiv$ "

Формула  $F$  называется *тождественно истинной* если для любой интерпретации  $j$  выполняется равенство  $I(F)=1$

# Законы логики

1	$F \& 1 = F$	
2	$F \vee 1 = 1$	
3	$F \& 0 = 0$	
4	$F \vee 0 = F$	
5	$F \& F = F$	идемпотентность
6	$F \vee F = F$	
7	$F \& G = G \& F$	коммутативность
8	$F \vee G = G \vee F$	
9	$F \& (G \& H) = (F \& G) \& H$	Ассоциативность конъюнкции. Ассоциативность конъюнкции означает, что в конъюнкции трех формул скобки можно ставить как угодно, а, следовательно, вообще не ставить.
10	$F \vee (G \vee H) = (F \vee G) \vee H$	Ассоциативность дизъюнкции. Скобки можно ставить как угодно, а соответственно, вообще не ставить.
11	$F \& (G \vee H) = (F \& G) \vee (F \& H)$	Дистрибутивность - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
12	$F \vee (G \& H) = (F \vee G) \& (F \vee H)$	Дистрибутивность - дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

# Законы логики

13	$F \& (F \vee G) = F$	закон поглощения
14	$F \vee (F \& G) = F$	
15	$F \& \neg F = 0$	закон противоречия
16	$F \vee \neg F = 1$	закон исключенного третьего
17	$\neg(F \& G) = \neg F \vee \neg G$	законы де Моргана, в честь известного французского математика и логика
18	$\neg(F \vee G) = \neg F \& \neg G$	
19	$\neg\neg F = F$	закон снятия двойного отрицания
20	$F \rightarrow G = \neg F \vee G$	
21	$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F)$	

# Теорема.

## а) Законы идемпотентности

$$p \wedge p \equiv p;$$

$$p \vee p \equiv p.$$

## б) Закон двойного отрицания

$$\sim(\sim p) \equiv p.$$

## в) Законы де Моргана

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q;$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

## г) Свойства коммутативности

$$p \wedge q \equiv q \wedge p;$$

$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

## д) Свойства ассоциативности

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

## Теорема (продолжение)

### д) Свойства ассоциативности

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

### е) Свойства дистрибутивности

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

### ж) Закон контрапозиции

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p.$$

### з) Другие полезные свойства

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q;$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывание, истинное во всех случаях, называется **логически истинным**, или тавтологией; высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется **логически ложным**, или **противоречием**. Теоремы в математике являются примерами тавтологий.

Рассмотрим высказывание вида

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Ему соответствует таблица истинности

Случай	$p$	$q$	$(p \wedge (p \rightarrow q))$		$\rightarrow$	$q$
1	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
2	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$F$
3	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
4	$F$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$
					*	

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Имея логически истинное высказывание - тавтологии, легко построить логически ложное высказывание - противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание

$$\sim((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$$

логически ложно.

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются

$$p \rightarrow q.$$

Примеры таких конструкций:

*Если  $p$ , то  $q$ .*

*$p$  достаточно для  $q$ .*

*$p$  является достаточным условием для  $q$ .*

*$q$  необходимо для  $p$ .*

*$q$  является необходимым условием для  $p$ .*

*$p$ , только если  $q$  (или: только если  $q$ , то  $p$ ).*

Таблица для  $p \rightarrow q$  показывает, что если  $p \rightarrow q$  истинно и  $p$  истинно, тогда  $q$  должно быть истинным, т.е. истинность  $p$  достаточна для истинности  $q$ . Поэтому  *$p$  достаточно для  $q$*  имеет тот же смысл, что и  $p \rightarrow q$ . Таким образом, если  $q$  ложно и  $q$  необходимо для  $p$ , тогда  $p$  должно быть ложно. Поэтому, если  $\sim q$  истинно, тогда  $\sim p$  должно быть истинно и  $\sim q \rightarrow \sim p$ . Но последнее выражение — контрапозиция для  $p \rightarrow q$ ; следовательно,  *$q$  необходимо для  $p$*  имеет то же значение, что и  $p \rightarrow q$ .



# Законы логики

## Модус поненс и модус толленс

### Модус поненс и модус толленс

«Модусом» в логике называется разновидность некоторой общей формы рассуждения. Далее будут перечислены четыре близких друг другу модуса, известных еще средневековым логикам.

**Модус поненс**, называемый иногда *гипотетическим силлогизмом*, позволяет от утверждения условного высказывания и утверждения его

**основания перейти к утверждению следствия этого высказывания:**

Если А, то В; А

В

Здесь высказывания «если А, то В» и «А» — посылки, высказывание «В» — заключение.

Горизонтальная черта стоит вместо слова «следовательно».

Другая запись:

**Если А, то В. А. Следовательно, В.**



# Законы логики

## Модус поненс и модус толленс

**Модусом толленсом** называется следующая схема рассуждения:

Если А. то В; неверно В

Неверно А

Здесь высказывания «если А, то В» и «неверно В» являются посылками, а высказывание «неверно А» — заключением. Другая запись:

**Если А, то В. Не-В. Следовательно, не-А.**

Посредством этой схемы от утверждения условного высказывания и отрицания его следствия осуществляется переход к отрицанию основания.

Например: «Если гелий — металл, он электропроводен.

Гелий неэлектропроводен. Следовательно, гелий — не металл».

По схеме модус толленс идет процесс *фальсификации*, установления ложности теории или гипотезы в результате ее эмпирической проверки.

Из проверяемой теории Т выводится некоторое эмпирическое утверждение А, то есть устанавливается условное высказывание «если Т, то А».

Посредством эмпирических методов познания (наблюдения, измерения или эксперимента) предложение А сопоставляется с реальным положением дел.

Выясняется, что А ложно и истинно предложение не-А.

Из посылок «если Т, то А» и «не-А» следует «не-Т», то есть ложность теории Т.

# Проверка на равносильность

Способы проверки на равносильность:

1

С использованием  
таблицы истинности

2

С использованием  
логического  
преобразования

# Проверка на равносильность

**Способ 1:** Построение таблицы истинности.

Для того, чтобы доказать эквивалентность двух формул алгебры логики, достаточно показать, что они принимают одни и те же значения на одинаковых наборах значений своих переменных.

Докажем справедливость первого закона де Моргана:

$x$	$y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Формулы  $\overline{x \vee y}$  и  $\bar{x} \wedge \bar{y}$  принимают одинаковые значения на одинаковых наборах значений своих аргументов, значит эти две формулы эквивалентны.

# Проверка на равносильность

С использованием таблицы истинности

Проверим на равносильность формулы:

$$F = X \rightarrow Y$$

$$G = \neg X \vee Y$$

X	Y	$F = X \rightarrow Y$	$\neg X$	$G = \neg X \vee Y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

при всевозможных интерпретациях X и Y интерпретации F и G имеют равные значения.

Значит  $F = G$ , то есть F и G равносильны.

# Проверка на равносильность

**Способ 2:** Если конечная цепочка тождественных преобразований переводит одну формулу к другой, формулы также являются эквивалентными.

Докажем справедливость второго закона де Моргана при условии, что первый закон де Моргана выполняется:

$$\overline{x \wedge y} = \overline{\overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}}} = \left| \begin{array}{l} \text{по 1 - му закону} \\ \text{де Моргана} \end{array} \right| = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}$$