

СТАТИКА

The background image shows a large, multi-story university building with a portico supported by white columns. The building has many windows and a sign that reads "HEALTHY HOUSEHOLD UNIVERSITY" in Cyrillic. There are trees in the foreground and a purple car parked on the street.

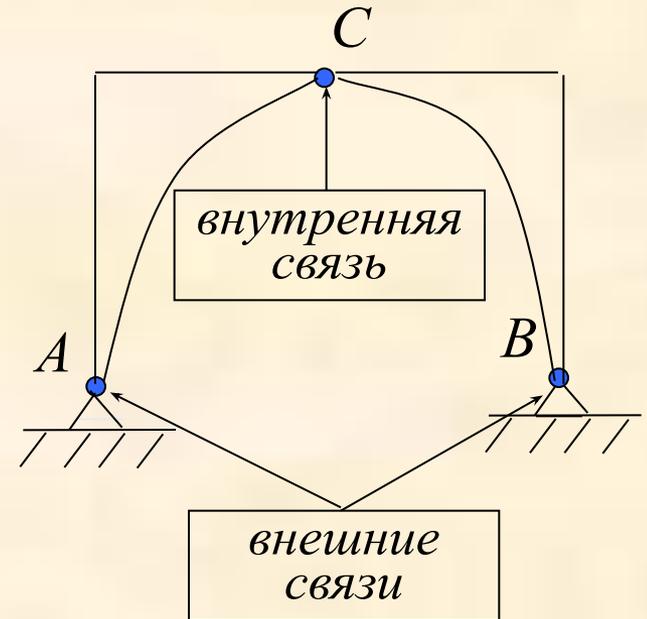
Тема 6. Равновесие системы двух абсолютно твердых тел (сочленения).

Тема 7. Расчет плоских ферм.

6. Методы расчета сочленений

Часто при расчете инженерных сооружений рассматривают конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных какими-нибудь связями (сочленения).

Опр. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются **внутренними связями**.



Опр. Связи, скрепляющие конструкцию с телами, в нее не входящими, называются **внешними связями**.

Метод замораживания.

Применяется в случае, когда необходимо определить только реакции внешних связей.

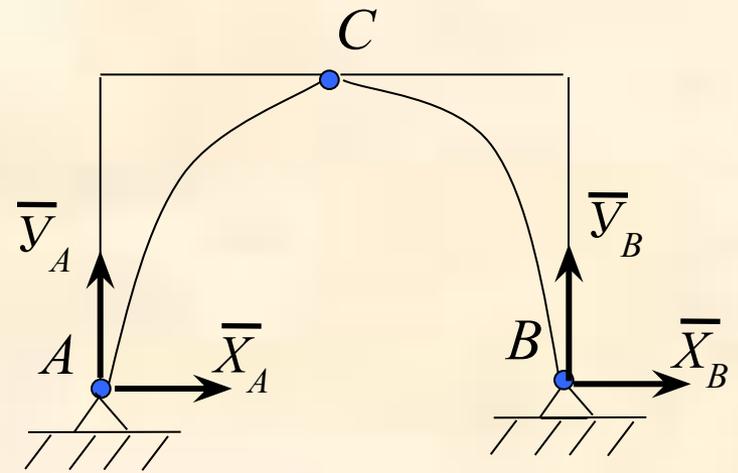
Рассмотрим конструкцию как одно абсолютно твердое тело.

Заменим внешние связи их реакциями:

Шарнир A – реакциями \bar{X}_A и \bar{Y}_A . Шарнир B – реакциями \bar{X}_B и \bar{Y}_B .

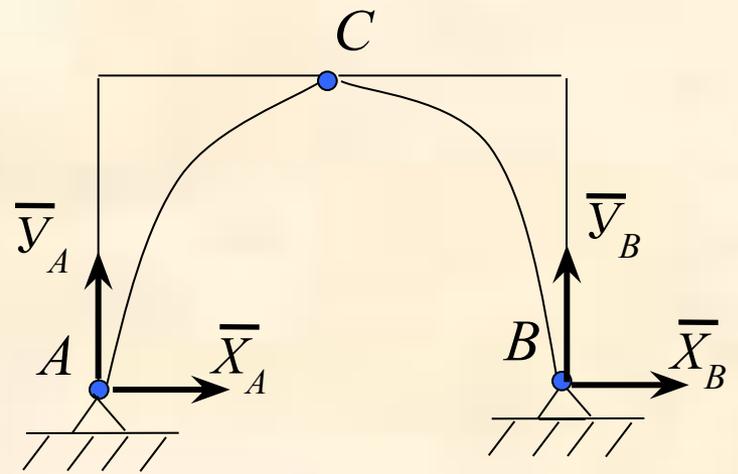
Составим на основании аксиомы отвердевания уравнения равновесия для системы сил, действующих на «замороженную» конструкцию (арку).

Действующая система сил (заданные силы на рисунке не показаны) является произвольной плоской.



Уравнения равновесия (например, в основной форме) для такой системы сил будут иметь вид

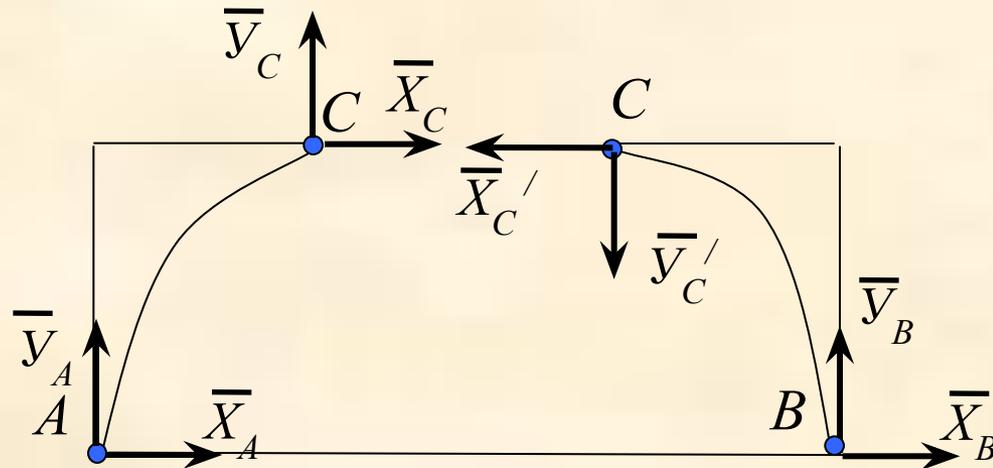
$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$



В систему сил входят 4-е неизвестные реакции: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$, которые не могут быть найдены из трех уравнений (1).

Для получения 4-го уравнения расчленим конструкцию (арку) по внутренней связи C на две части.

Четвертое уравнение получим, составляя сумму моментов относительно точки C для части AC (или для части BC).



Для AC: $\sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (2)$

$\bar{X}_C = - \bar{X}'_C,$

$\bar{Y}_C = - \bar{Y}'_C.$

Решая уравнения (1) и (2) найдем неизвестные реакции внешних связей.

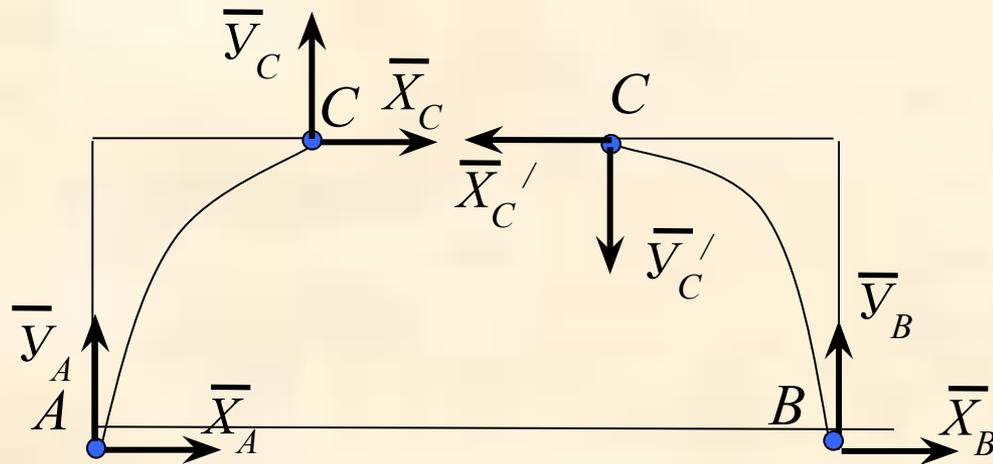
6.2. Метод разбиения.

Применяется, как правило, в случае, когда необходимо определить реакции внешних и внутренних связей.

Конструкцию (арку) сразу расчленяют на отдельные тела и составляют для каждой части по три уравнения равновесия.

Для части AC (например, условия в основной форма) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$



Для части BC : $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_B(\bar{F}_k) = 0.$ (4)

В шесть уравнений (3) и (4) входят шесть неизвестных реакций $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}_C, \bar{Y}_C.$

При этом $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C.$

Можно дополнительно составить три уравнения равновесия для «замороженной» конструкции

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \quad (5)$$

Уравнения (5) можно рассматривать как проверочные или выбрать из 9 - ти уравнений (3), (4), (5) шесть для нахождения 6 – ти неизвестных реакций.

6.3. Примеры на равновесие системы тел

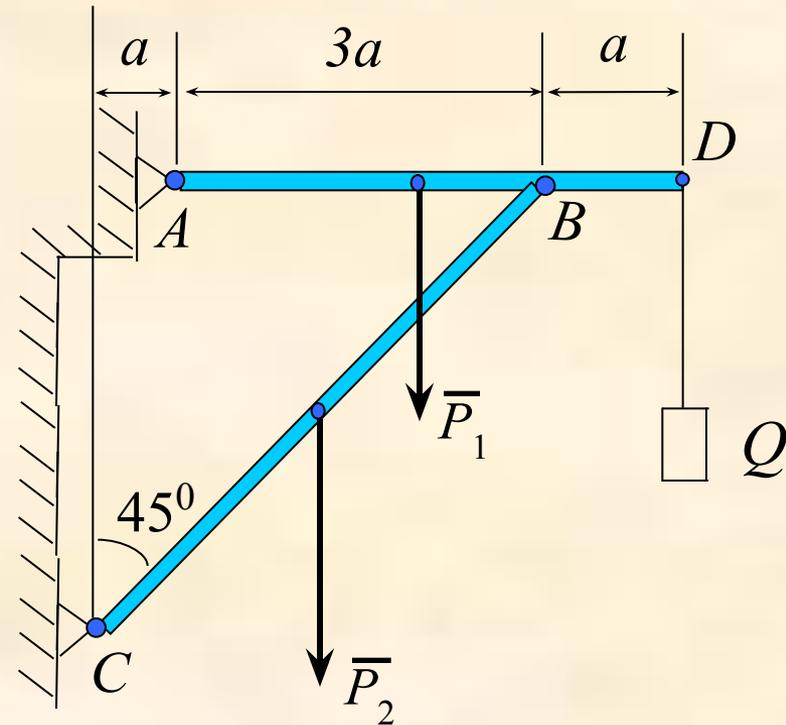
Пример применения метода замораживания

Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD весом $P_1 = 150\text{ Н}$, прикрепленного к стене шарниром,

и подкоса CB весом $P_2 = 120\text{ Н}$, который с брусом AD и со стеной соединен шарнирами.

К концу D , бруса подвешен груз весом $Q = 300\text{ Н}$.

Определить реакции шарниров A и C , считая брус и подкос однородными.



Решение

1. Рассмотрим равновесие «замороженной» конструкции ADC .

2. Выберем оси координат.

3. Приложим заданные силы \bar{Q} , \bar{P}_1 и \bar{P}_2 .

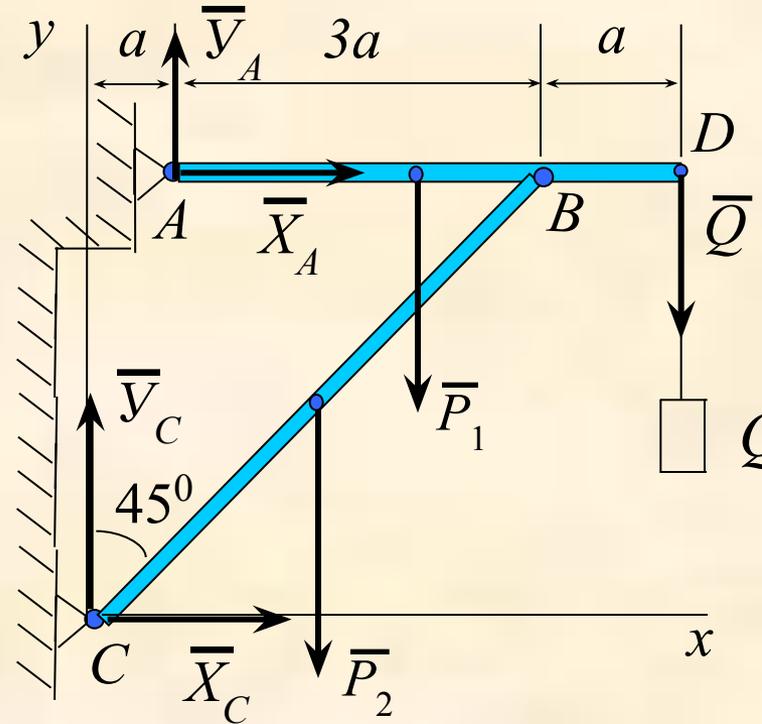
4. Внешние связи A и C заменим их реакциями \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_C и \bar{Y}_C .

5. Выберем моментной точку A и составим уравнения равновесия.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

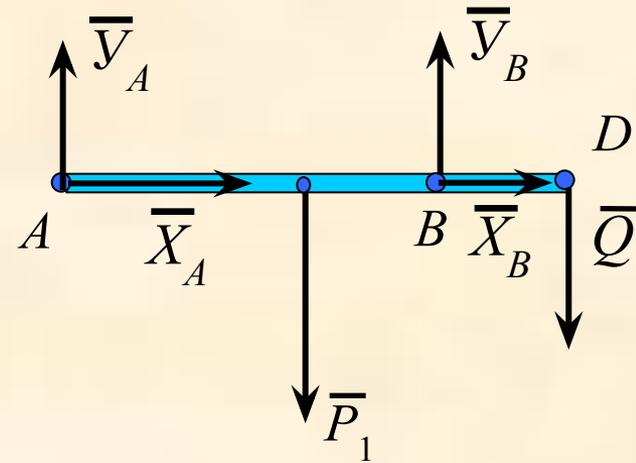
$$\sum m_A(\bar{F}_k) = X_C 4a - Y_C a - P_1 2a - P_2 a - Q 4a = 0.$$



(1)

6. Рассмотрим часть конструкции AD .

7. Действие отброшенной части CB заменим двумя реакциями \overline{X}_B и \overline{Y}_B , так как в точке B неподвижный шарнир.



8. Выберем в качестве моментной точку B , (так как в ней сходятся дополнительные неизвестные реакции \overline{X}_B и \overline{Y}_B , которые не требуется определять) и составим уравнение моментов.

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = -Y_A 3a + P_1 a - Q a = 0.$$

(2)

Решая систему уравнений (1), (2) (начиная с последнего) найдем:

$$Y_A = (P_1 - Q) / 3 = -50 \text{ Н},$$

$$Y_C = 2 P_1 / 3 + P_2 + 4 Q / 3 = 620 \text{ Н},$$

$$X_C = 2 P_1 / 3 + P_2 / 2 + 4 Q / 3 = 560 \text{ Н},$$

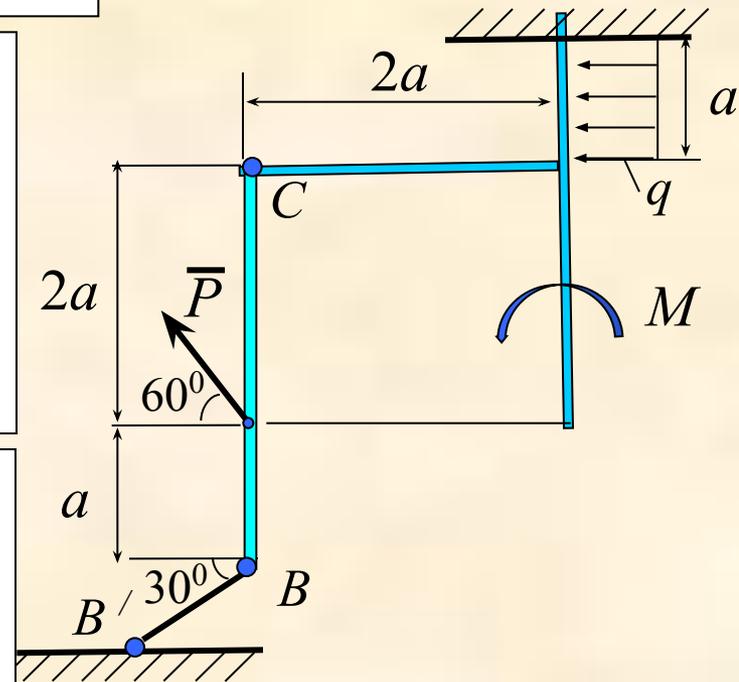
$$X_A = -X_C = -560 \text{ Н}.$$

Реакции \overline{X}_A и \overline{Y}_A имеют направления, противоположные показанным на чертеже.

Пример применения метода разбиения

На конструкцию ACB , состоящую из двух частей, соединенных в точке C шарниром, наложены две внешние связи: в точке A - жесткая заделка; в точке B - невесомый стержень.

Нагрузки: равномерно распределенная нагрузка интенсивности q ; пара сил с моментом M ; Наклонная сила \overline{P} .



Дано: $q = 2$ кН/м, $P = 5$ кН, $M = 6$ кНм, $a = 1$ м.

Определить реакции внешних связей и давление во внутреннем шарнире С.

Решение

1. Освободимся от внешних связей и расчленим систему по внутреннему шарниру С.

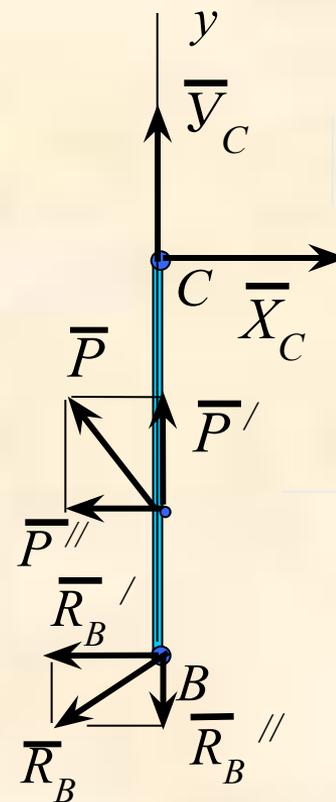
2. Рассмотрим равновесие части СВ.

3. Составим вторую форму условий равновесия:

$$\sum F_{ky} = Y_C + P \cos 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = -X_C 3a + P \cos 60^\circ a = 0, \quad (2)$$

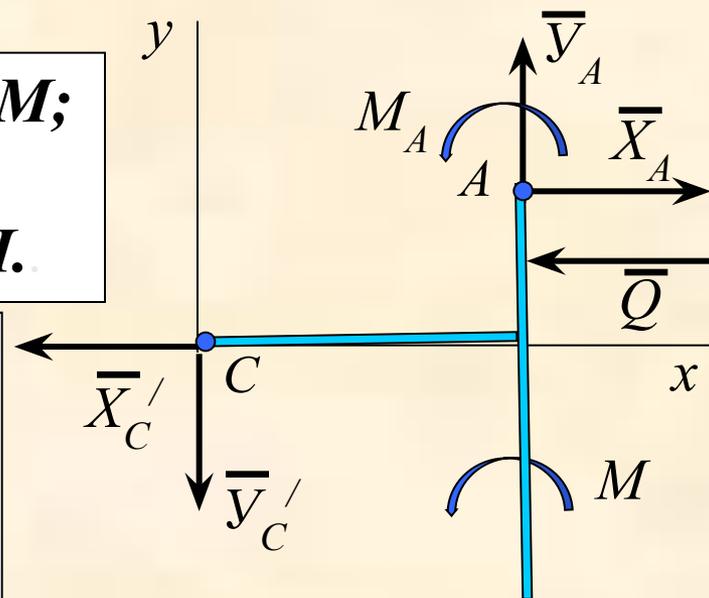
$$\sum m_C(\bar{F}_k) = -R_B \cos 30^\circ 3a - P \cos 60^\circ 2a = 0. \quad (3)$$



4. Рассмотрим часть АС.

5. Приложим заданные силы: момент M ; распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot a = 2 \text{ кН}$.

6. Заменим связи их реакциями: жесткую заделку заменим двумя реакциями \bar{X}_A, \bar{Y}_A и реактивным моментом M_A ; во внутреннем шарнире C будут две реакции \bar{X}_C', \bar{Y}_C' .



7. Выберем оси координат и моментную точку A .

8. Составим уравнения равновесия в основной форме:

$$\sum F_{kx} = X_A - X_C' - Q = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Y_C' = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -X_C' a + Y_C' 2a + M + M_A - Q a / 2 = 0. \quad (6)$$

9. Решая уравнения (1) – (6) получим:

$$R_B = -P \cos 60^\circ \cdot 2 / (\cos 30^\circ \cdot 3) = -1,92 \text{ кН};$$

$$Y_C = -P \cos 30^\circ + R_B \cos 60^\circ = -5,29 \text{ кН};$$

$$Y_A = Y_C' = -5,29 \text{ кН};$$

$$X_C = P \cos 60^\circ / 3 = 0,83 \text{ кН};$$

$$X_A = X_C' + Q = 2,83 \text{ кН};$$

$$M_A = a (X_C - Y_C / 2 + Q / 2 - M / a) = -1,52 \text{ кН м.}$$

10. Сделаем проверку, для чего рассмотрим «замороженную» конструкцию.

В данной задаче достаточно составить уравнение моментов относительно точки C и подставить в него найденные значения реакции \overline{R}_B , \overline{X}_A , \overline{Y}_A и реактивного момента M_A .

$$\begin{aligned} \sum m_C(\vec{F}_k) &= -R_B \cos 30^\circ 3a - P \cos 60^\circ 2a + \\ &+ Y_A 2a - X_A a + M_A + M - Q a / 2 = \\ &= 8,83 - 8,81 \approx 0. \end{aligned}$$

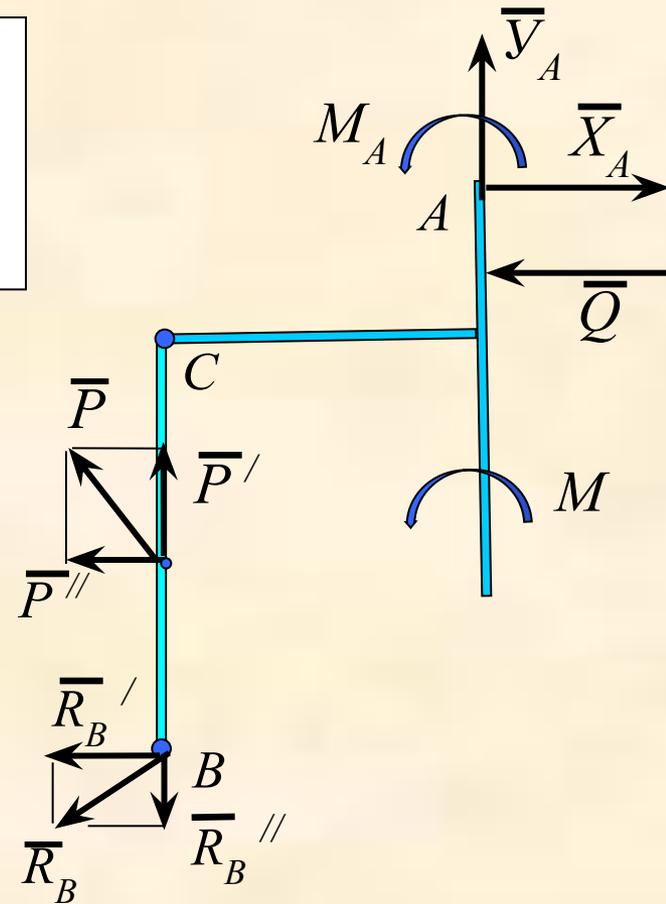
Уравнение удовлетворяется тождественно с относительной погрешностью около 0,1%, то есть задача решена верно.

Примечание. В иных подобных задачах требуется составить, как правило, три проверочных уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

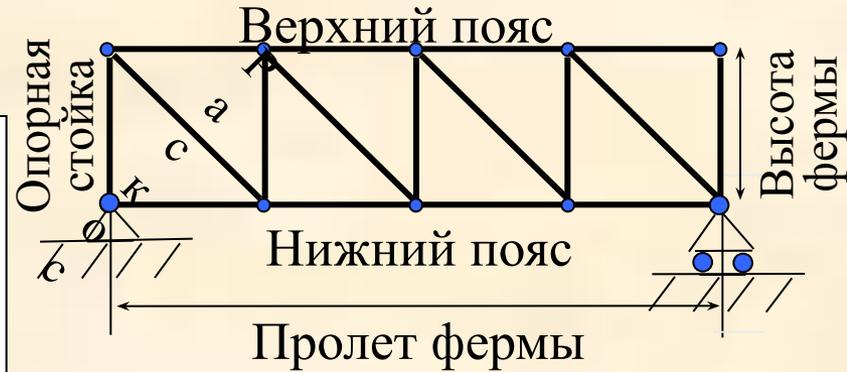
$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0.$$



7. Расчет плоских ферм

7.1. Общие положения.

Опр. Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами.



Опр. Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, ферма называется плоской.

Опр. Места соединения стержней фермы называются узлами.

Опр. Узлы, которыми ферма опирается на основание, называются опорными узлами.

Опр. Стержни плоской фермы, расположенные по верхнему контуру, образуют верхний пояс, по нижнему - нижним.

Опр. Вертикальные стержни называются стойками, а наклонные – раскосами.

При расчете ферм трением в узлах и весом стержней (по сравнению с нагрузками) пренебрегают или распределяют вес стержней по узлам. Все внешние нагрузки к ферме прикладывают только в узлах.

Стержни фермы работают только на растяжение или сжатие.

Будем рассматривать только жесткие плоские фермы.

В жестких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3.$$

При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

7.2. Методы расчета ферм.

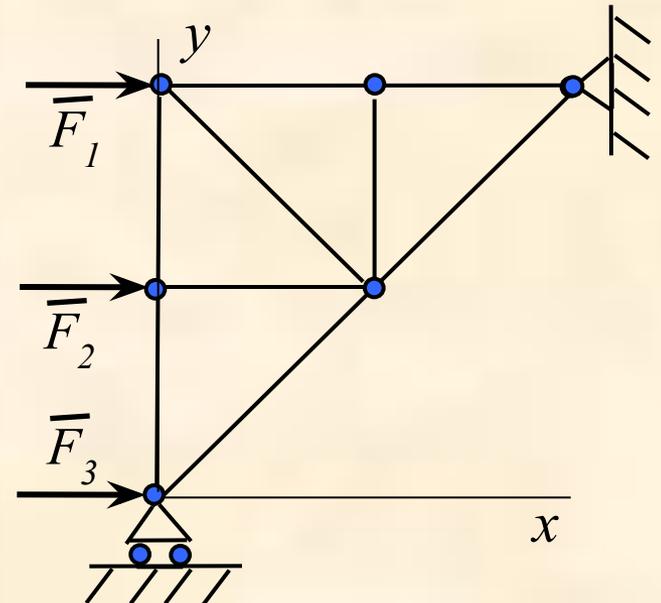
Метод вырезания узлов.

Используется в случаях, когда требуется найти усилия во всех стержнях фермы.

Метод сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом узле.

Пример. *Рассмотрим ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников;*

действующие на ферму силы параллельны оси x и численно равны $F_1 = F_2 = F_3 = F = 20\text{кН}$.



Решение.

1. Проверим условие жесткости фермы.

В ферме 9 стержней (их обычно нумеруют арабскими цифрами) и 6 узлов (их обычно нумеруют римскими цифрами).

$$9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9.$$

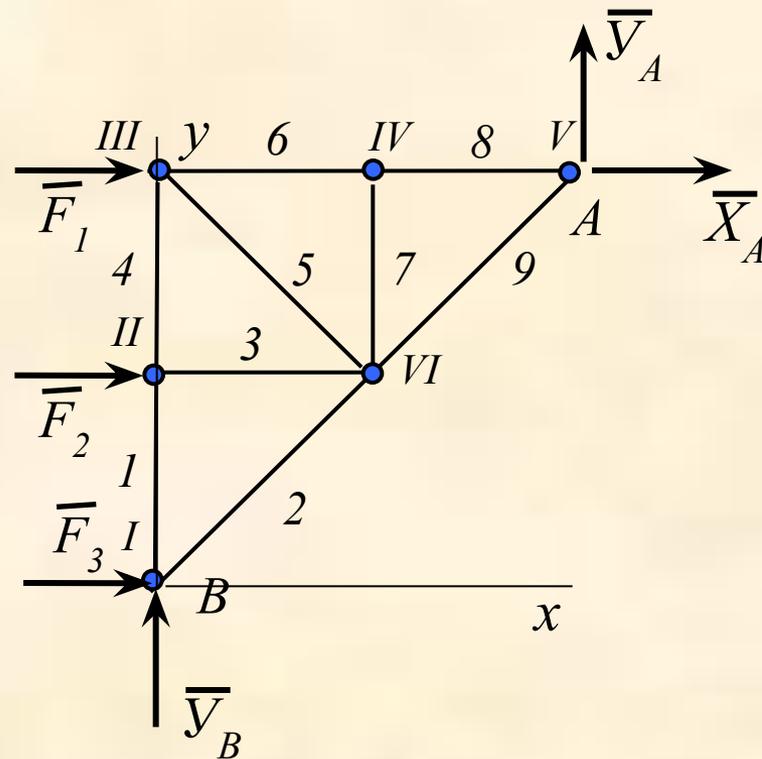
2. Заменим связи их реакциями.

3. Составим уравнения равновесия.

$$\sum F_{kx} = X_A + 3 F = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B = 0,$$

$$\sum m_A (\bar{F}_k \rightrightarrows) - Y_B \cdot 2a + F \cdot 2a + F \cdot a = 0.$$

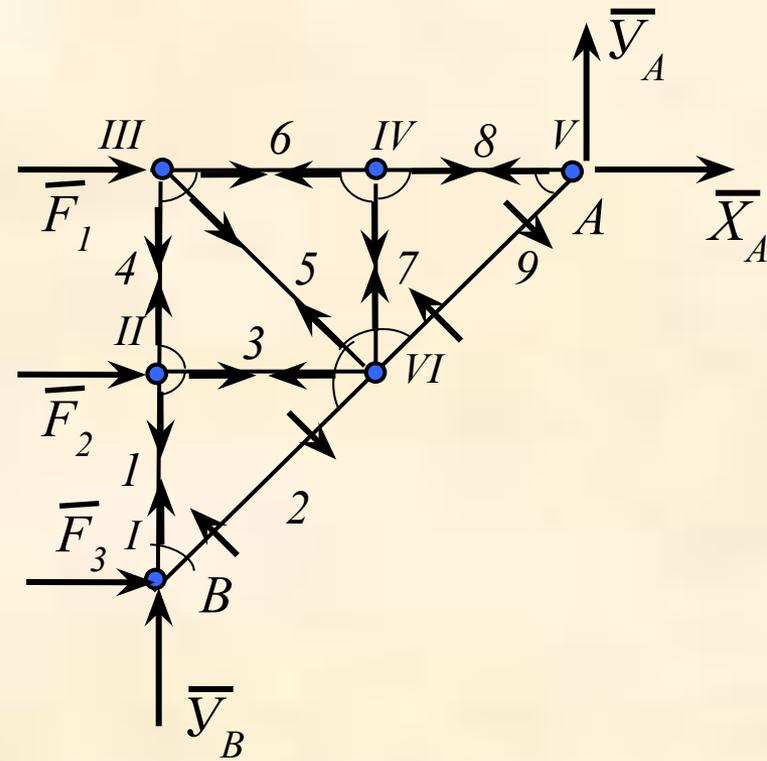


4. Решая уравнения, найдем: $X_A = -60 \text{ кН}$; $Y_B = 30 \text{ кН}$; $Y_A = -30 \text{ кН}$.

5. Определим усилия в стержнях.

Последовательно мысленно вырежем все узлы, заменяя стержни соответственно усилиями

$$\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6, \overline{S}_7, \overline{S}_8, \overline{S}_9.$$



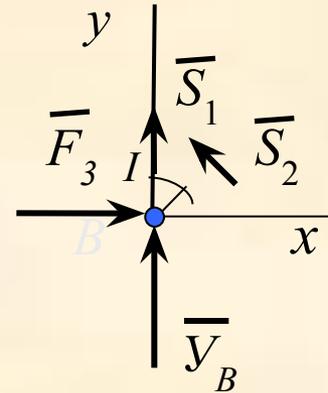
Усилия направим от узлов, полагая их положительными.

Составим условия равновесия каждого узла, к которым приложены сходящиеся плоские системы сил.

Начнем с узла I, где в систему сил входят два неизвестных усилия \overline{S}_1 и \overline{S}_2 .

Узел I.

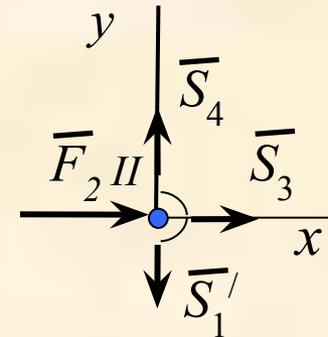
$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= F_3 + S_2 \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= Y_B + S_1 + S_2 \cdot \cos 45^\circ = 0.\end{aligned}$$



Решая уравнения, получим $S_2 = -28,2$ кН, $S_1 = -10$ кН.

Узел II.

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= F_2 + S_2 = 0, \\ \sum F_{ky} &= -S_1' + S_4 = 0.\end{aligned}$$



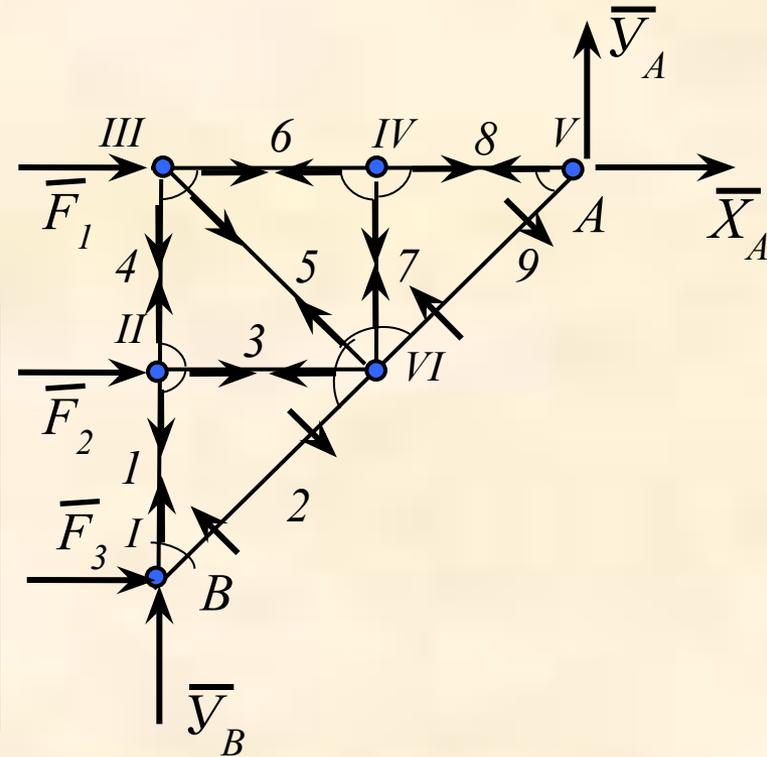
Решая уравнения и принимая во внимание, что $S_1 = S_1'$, получим $S_3 = -20$ кН, $S_4 = -10$ кН.

Рассматривая равновесие остальных узлов, найдем усилия во всех стержнях фермы, которые сведем в таблицу

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	-10	-28,2	-20	-10	14,1	-30	0	-30	-42,2

Все стержни, кроме 5 и 7 сжаты. В 7 стержне усилие нулевое.

Вывод. *Если в узле, не нагруженном силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равна нулю.*

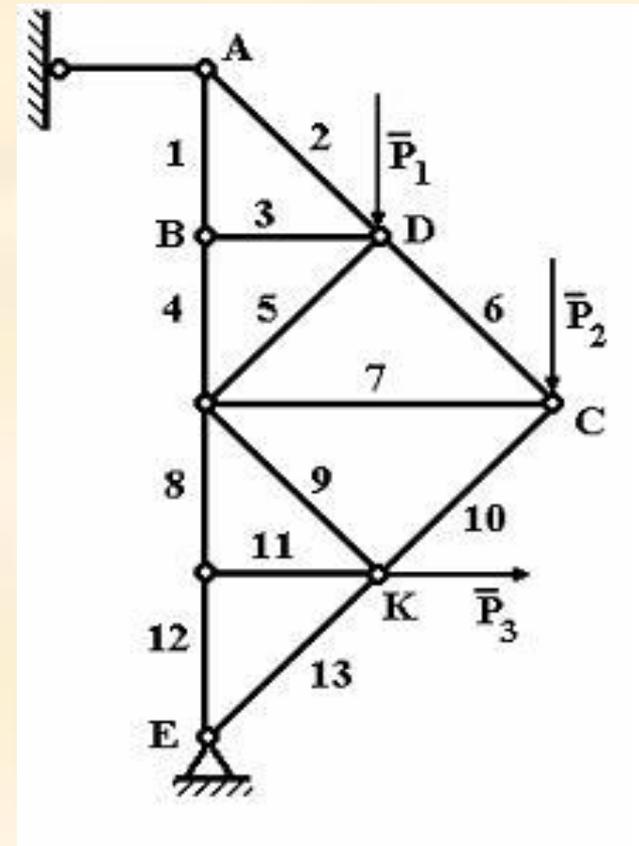


ЗАДАНИЕ

В ферме, изображенной на рисунке, усилие равно 0 ($S_i=0$) в стержне с номером ($i=$)...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) 5 2) 9 3) 3 4) 7 5) 10



Метод сечений (Риттера).

Используется в случаях, когда требуется найти усилия в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов.

Метод сводится к разделению фермы на две части сечением, проходящим через три стержня , в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей.

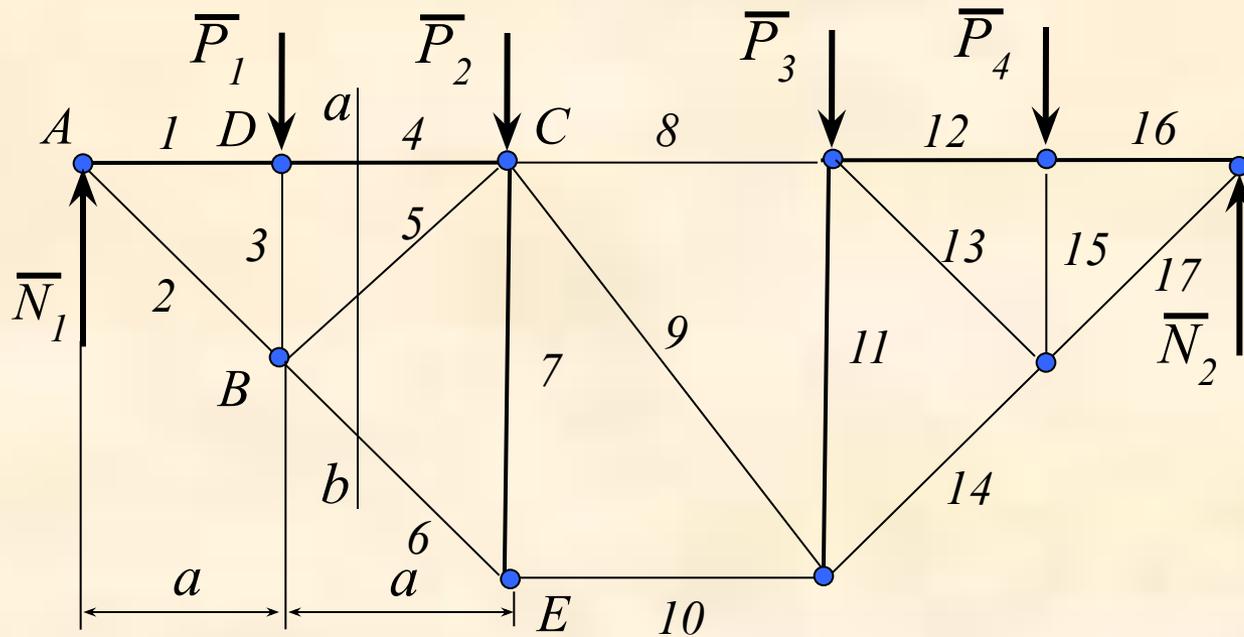
Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных частей от узлов, то есть считая стержни растянутыми.

Затем составляют вторую или третью формы условий равновесия произвольной плоской системы сил, беря центры моментов (или оси проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Выбранные таким образом моментные точки часто называют точками Риттера.

Пример.

Определить усилие в стержне 6 фермы.



Действующие вертикальные силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P = 20$ кН.

Реакции опор $N_1 = N_2 = 40$ кН, $AD = DC = a$, $CB \perp AE$.

Решение.

1. Проведем сечение ab через стержни 4, 5, 6.

2. Рассмотрим левую часть фермы, заменяя действие на нее правой части силами, направленными вдоль стержней.

3. Для нахождения усилия S_6 выберем в качестве моментной точку C и составим уравнение моментов

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = -N_1 2a + S_6 BC + P_1 a = 0.$$

4. Учитывая, что $BC = a\sqrt{2}$, из уравнения найдем $S_6 = 42,3$ кН.

5. Усилия в стержнях 4 и 5 можно найти, составив уравнения моментов относительно точек Риттера B и A .

