Сложная функция.

Производная сложной функции.

Сложная функция – это функция, у которой в качестве аргумента выступает другая функция

$$y = f\big(g(x)\big)$$

Внешняя функция

Внутренняя функция

Если обозначить внутреннюю функцию

$g(x) = t$, то сложная функция примет вид:

$$y = f(t), \quad где \quad t = g(x)$$

Например, рассмотрим функции

$$f(t)=\sin t \qquad g(x)=x^2-2x+5$$

Составим из них сложную функцию

$$y=f(g(x))$$

Внешняя функция

Внутренняя функция

$\mathbf{\sin t}$

x^2-2x+5

Получаем: $y=\sin\left(x^2-2x+5\right)$

А теперь наоборот:

$$1)\ y = (\underbrace{2x+1})^{\boxed{6}}$$

Внешняя функция $f(t) = t^6$

Внутренняя функция $t = 2x + 1$

$$2)\ y = \frac{1}{\sin^2 x}; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

Внешняя функция $f(t) = t^{-2}$

$$y = (\underbrace{\sin x})^{\boxed{-2}}$$

Внутренняя функция $t = \sin x$

$$3)\, y = \boxed{tg}\left(\underbrace{2x+\frac{\pi}{4}}\right)$$

Внутренняя функция

$$t = 2x+\frac{\pi}{4}$$

Внешняя функция $f(t) = tgt$

Определить внутреннюю и внешнюю функции для данной сложной функции:

$$1)\ y = \underbrace{(4x+1)}\boxed{^4}$$

$$\begin{cases} t = 4x+1 & \text{- внутренняя функция} \\ f(t) = t^4 & \text{- внешняя функция} \end{cases}$$

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$2)\, y = \boxed{\sin} \, \underbrace{2x}$$

$$\begin{cases} t = 2x \\ f(t) = \sin t \end{cases}$$

$t = 2x$ **- Внутренняя функция**

$f(t) = \sin t$ **- Внешняя функция**

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$3)\, y = \frac{1}{(x+1)^3} \qquad y = (\underbrace{x+1})^{\boxed{-3}}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = x+1 \\ f(t) = t^{-3} \end{array}\right.$$

$t = x+1$ - **Внутренняя функция**

$f(t) = t^{-3}$ - **Внешняя функция**

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$4)\, y = \cos^2 x \qquad y = (\underbrace{\cos x}) ^{\boxed{2}}$$

$$\begin{cases} t = \cos x \\ f(t) = t^2 \end{cases}$$

$t = \cos x$ **- Внутренняя функция**

$f(t) = t^2$ **- Внешняя функция**

Правило нахождения производной сложной функции

Производная сложной функции равна производной внешней функции на производную внутренней функции

$$1)\ y = \boxed{\cos}\,\underbrace{4x}$$

$$y' = f'(t)\cdot t'$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f(t) = \cos t \end{cases}$$

$$y' = (\cos t)' \cdot (4x)' = -\sin t \cdot 4 = -4\sin t =$$

= - 4 sin4x

$$2)\ y=\boxed{ctg}\left(\underbrace{2x+\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\begin{cases} t=2x+\dfrac{\pi}{3} \\ f(t)=ctgt \end{cases} \qquad \boxed{y'=f'(t)\cdot t'}$$

$$y'=(ctgt)'\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 t}\cdot 2=-\frac{2}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{2}{\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$$

$$3)\; y=\sin^2 x \qquad y=\left(\underbrace{\sin x}\right)^{\boxed{2}}$$

$$\begin{cases} t=\sin x \\ f(t)=t^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y'=f'(t)\cdot t'}$$

$$y'=\left(t^2\right)'\cdot(\sin x)'=2t\cdot\cos x=$$

$$=\underbrace{2\sin x\cos x}_{\text{по формуле синуса двойного угла}}=\sin 2x$$

$$4)\, y = \left(\underbrace{x^2 + 2x}_{t}\right)^{\boxed{4}}$$

$$\begin{cases} t = x^2 + 2x \\ f(t) = t^4 \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f'(t) \cdot t'}$$

$$y' = \left(t^4\right)' \cdot \left(x^2 + 2x\right)' = 4t^3 \cdot (2x + 2) = 8t^3 \cdot (x+1) =$$

$$= 8(x+1) \cdot \left(x^2 + 2x\right)^3$$

Найти производные для функций (самостоятельно записать решение):

$$1)\ y=(1-4x)^2$$

$$2)\ y=\frac{1}{3x+2}$$

$$3)\ y=\cos 3x$$

$$4)\ y=ctg(4x-3)$$

Ответы:

$$1)\ y'=-8(1-4x)$$

$$2)\ y'=-\frac{3}{(3x+2)^2}$$

$$3)\ y'=-3\sin 3x$$

$$4)\ y'=-\frac{4}{\sin^2(4x-3)}$$