Элементы теории нечетких множеств

Содержание

Введение

- Современные интеллектуальные системы базируются на **нечеткой логике** при принятии решений и адаптации к изменяющимся условиям среды
- Основа нечеткой логики - **нечеткие множества** и **нечеткие правила**
- В классической теории множеств рассматриваются **множества с четкой границей:**

$$A = \{x \mid x \geq 0\}$$

- **Нечеткое множество:**
  - не имеет четкой границы,
  - характеризуется функцией принадлежности,
  - позволяют моделировать часто используемые лингвистические выражения
  - **Примеры:**
    - Высокий рост
    - Близко
    - Погода холодная
- Нечеткость множеств проистекает из неопределенной и неточной природы понятий и выражений естественных языков

Основные определения

- Пусть X - *универсальное множество*, содержащее элементы x
  - Множество A задается характеристической функцией $\mu_A(x)$:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

- **Нечеткое множество** A в X - это множество упорядоченных пар,

$$A=\{(x,\ \mu_A(x))\mid x\in X\}$$

причем $\mu_A: X\to[0,\ 1]$

- $\mu_A(x)$ - показывает меру принадлежности элемента x множеству A
- **Примеры:**
  - C=«желательный вид транспорта для поездки из Москвы в Санкт-Петербург»

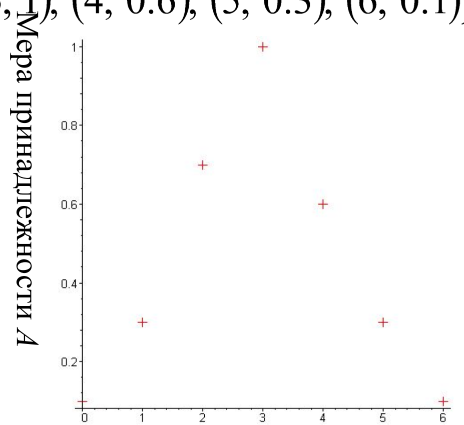
C={(поезд, 0.9), (самолет, 0.6), (автомобиль, 0.4)}

  - A=«разумное число детей в семье»

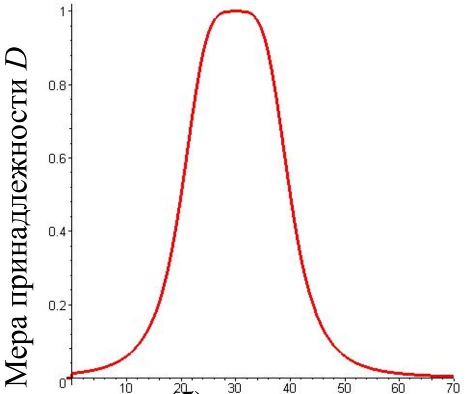
$$A=\{(0,\ 0.1),\ (1,\ 0.3),\ (2,\ 0.7),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0.6),\ (5,\ 0.3),\ (6,\ 0.1)\}$$

  - D=«возраст около 30 лет»

$$\mu_D(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-30}{10}\right)^4}$$

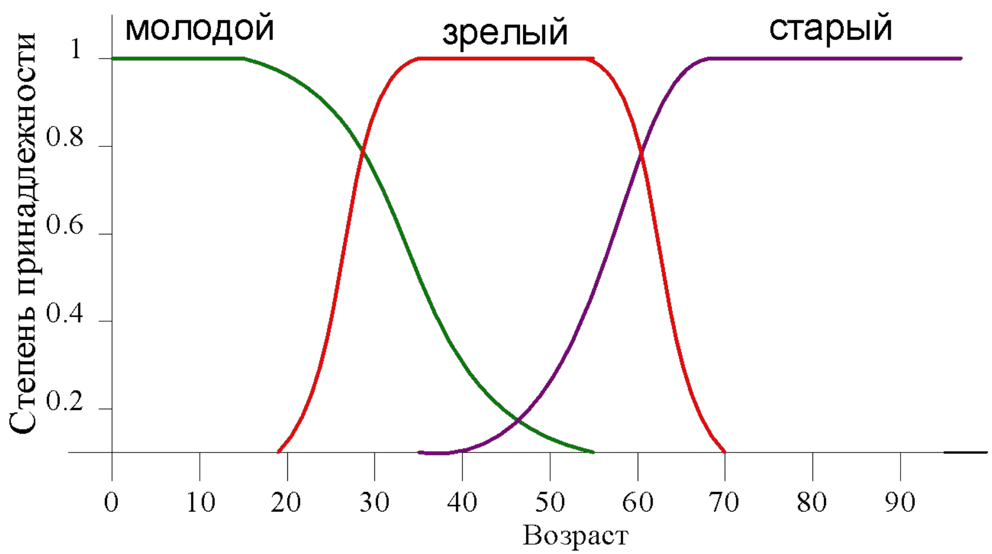


(а) - число детей в семье

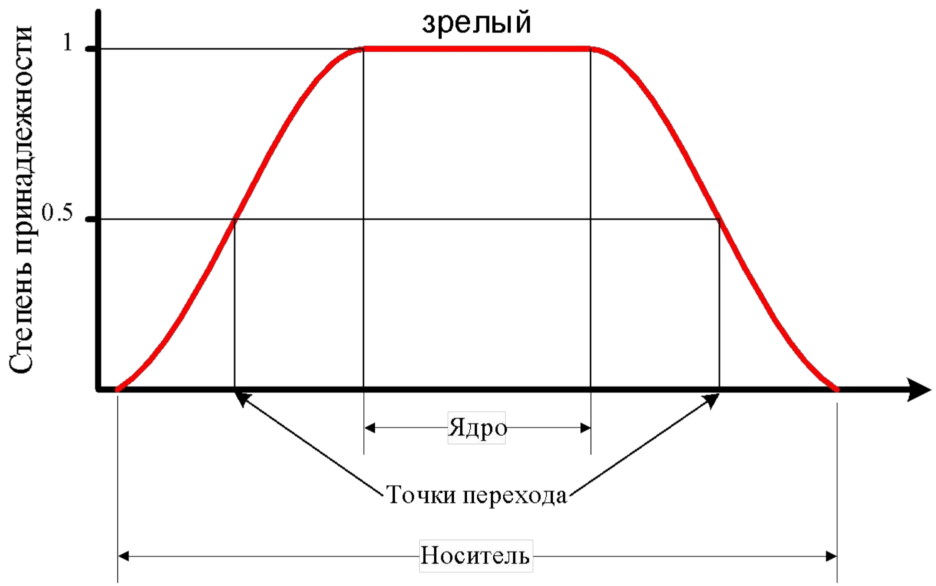


(б) - возраст

- **Характерные свойства** нечетких множеств:
  - **субъективность:** функции принадлежности могут определяться разными людьми по-разному в зависимости от их опыта, образования, типа задачи;
  - **неслучайность:** для разных субъектов выбор того или иного значения меры принадлежности неслучаен
- **Пример:** нечеткие множества «молодой», «зрелый» и «старый» (возраст)



- **Носитель** $\tilde{A}$ нечеткого множества A: $\tilde{A} = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$
- **Ядро** нечеткого множества A: $core(A) = \{x \mid x \in X,\ \mu_A(x) = 1\}$
- Нечеткое множество A называется **нормальным**, если $\exists\, x \in X : \ \mu_A(x) = 1$
- **Высота** нечеткого множества A: $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$
- **Точки перехода** нечеткого множества A: такие $x \in X$ что $\mu_A(x) = 0.5$



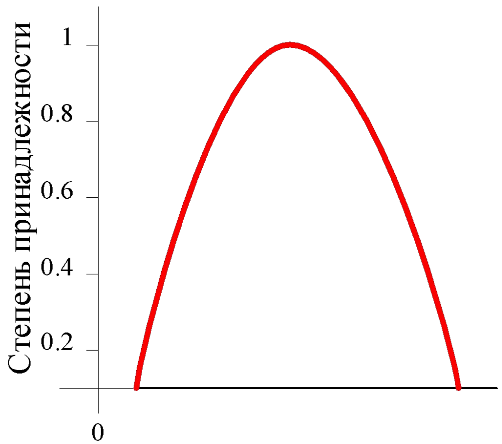
- **Множество α-уровня (α-срез)** нечеткого множества A: $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$
- **Строгий α-срез:** $A'_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$

- Нечеткое множество A является **выпуклым** тогда и только тогда, когда:

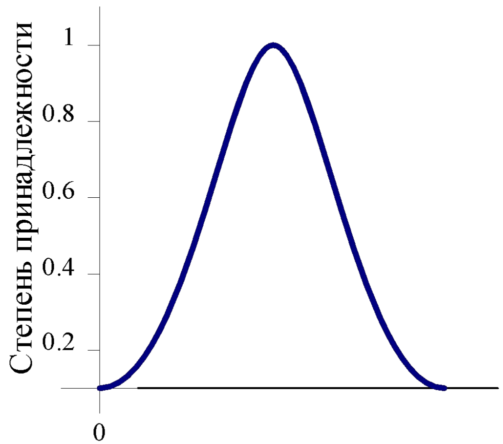
$$\forall\ x_1,\ x_2 \in X,\ \lambda \in [0,\ 1]:\quad \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)\}$$

- Определение выпуклой функции:

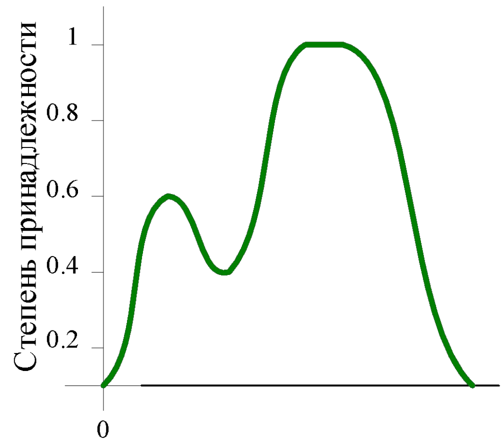
$$\forall\ x_1,\ x_2 \in X,\ \lambda \in [0,\ 1]:\quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$



Выпуклое нечеткое множество,
Функция принадлежности -
выпукла



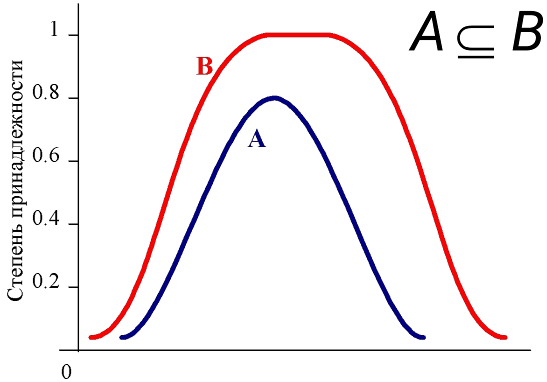
Выпуклое нечеткое множество,
Функция принадлежности – не
является выпуклой



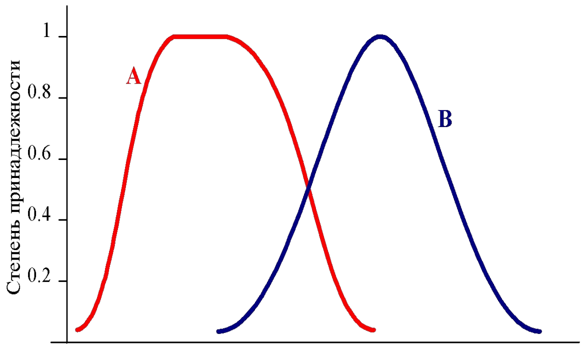
Нечеткое множество и его
функция принадлежности
не являются выпуклыми

Основные операции над нечеткими множествами

- Нечеткое множество A является **подмножеством** нечеткого множества B тогда и только тогда, когда для всех элементов x: $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

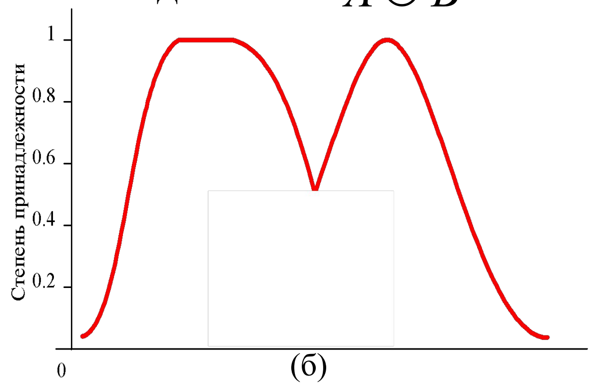


Нечеткие множества A и B



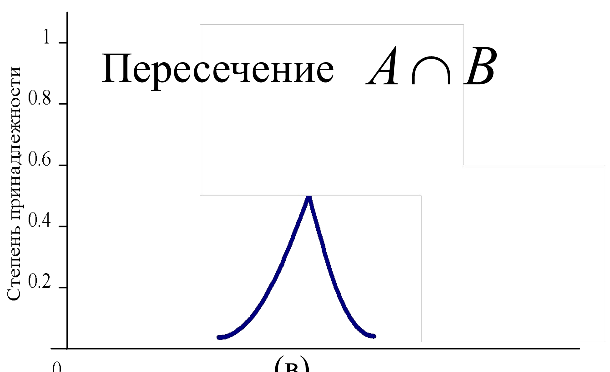
(а)

Объединение $A \cup B$



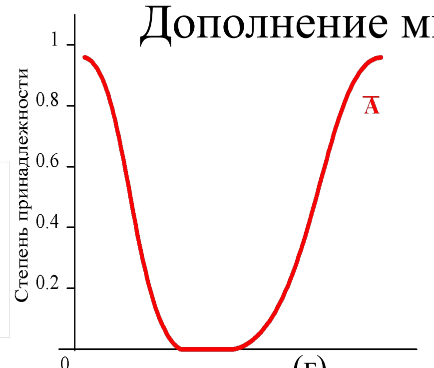
(б)

Пересечение $A \cap B$



(в)

Дополнение множества A



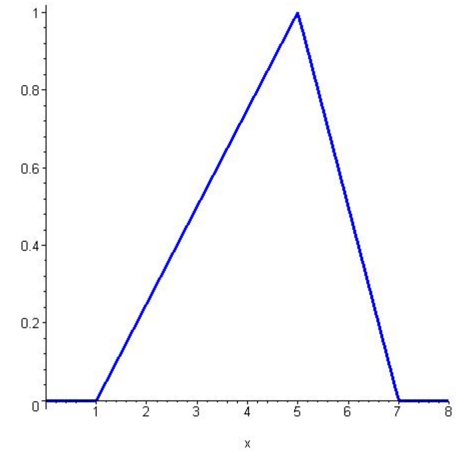
(г)

Типичные одномерные функции принадлежности

- **Треугольная** функция принадлежности $(a < b < c)$

$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c, \\ 0, & x \ge c. \end{cases}$$

или $\mu_A(x;\, a,\, b,\, c) = \max\left\{\min\left(\dfrac{x-a}{b-a},\, \dfrac{c-x}{c-b}\right),\, 0\right\}$

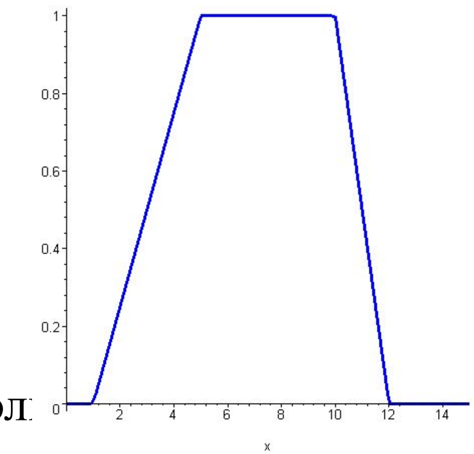


- **Трапециевидная** функция принадлежности $(a < b < c < d)$

$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c,\, d) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d, \\ 0, & x \ge d. \end{cases}$$

или

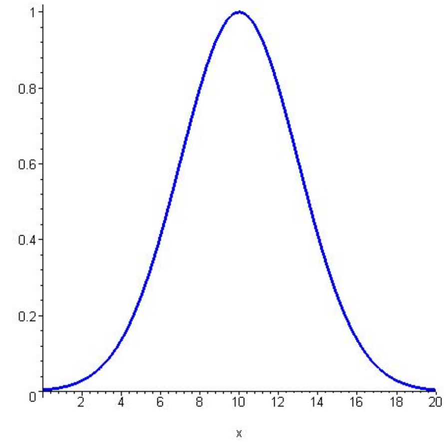
$$\mu_A(x;\, a,\, b,\, c,\, d) = \max\left\{\min\left(\dfrac{x-a}{b-a},\, 1,\, \dfrac{d-x}{d-c}\right),\, 0\right\}$$



Значения функций просто вычислить, поэтому они испол *реального времени*

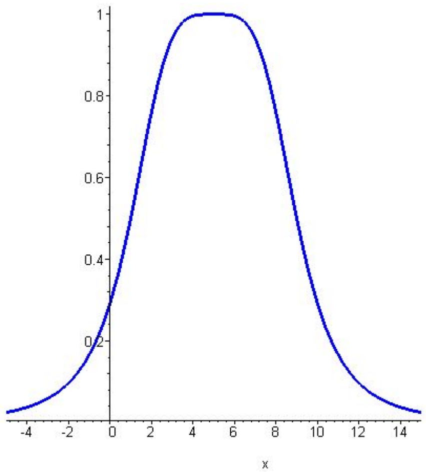
- **Гауссова** функция принадлежности

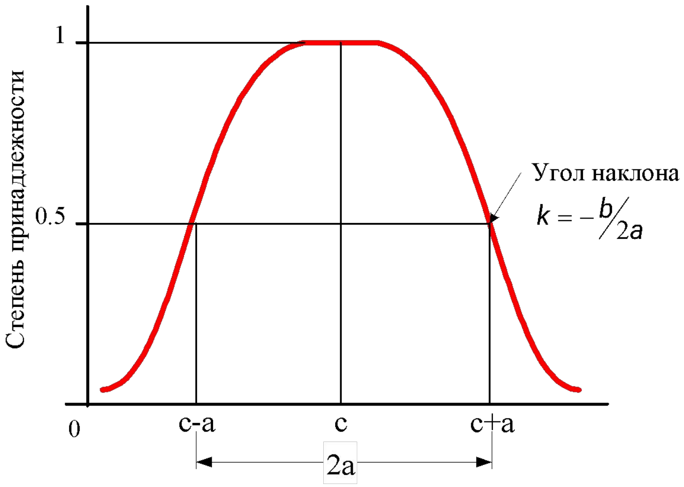
$$\mu_A(x;\ a, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$$



- **Обобщенная колоколообразная** функция принадлежности (обычно *b>0*)

$$\mu_A(x;\ a, b, c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$



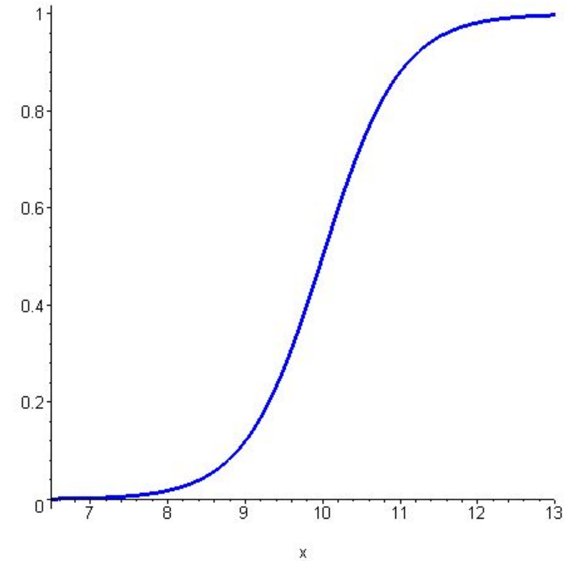


Физический смысл параметров функции

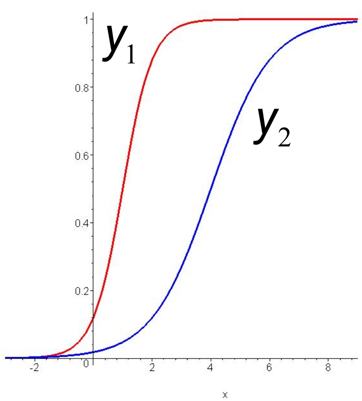
- Функции имеют непрерывные производные, которые могут использоваться как параметры **скорости обучения**

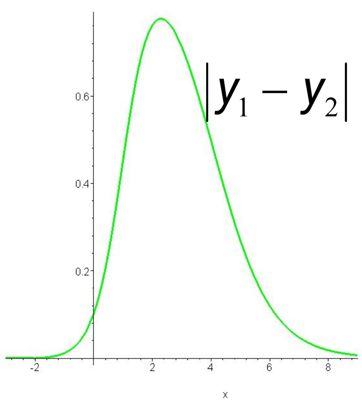
- **Сигмоидальная** функция принадлежности

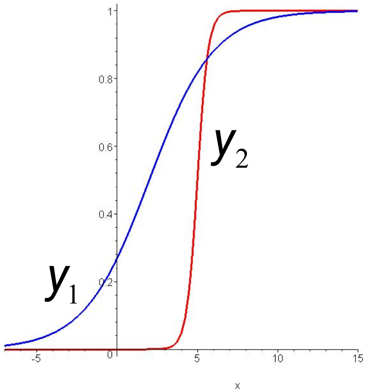
$$\mu_A(x;\ a,\ c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

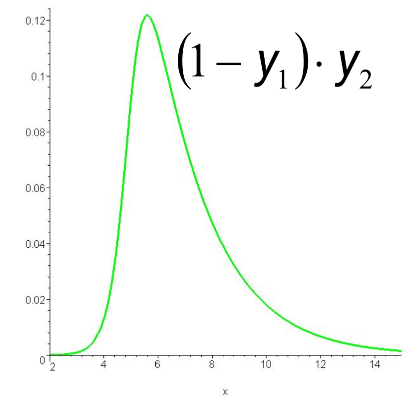


- Построение **несимметричных закрытых функций принадлежности** с помощью сигмоидальных функций









Заключение

- В лекции были рассмотрены **элементы теории нечетких множеств**:
  - основные определения,
  - обозначения
  - операции, используемые в теории нечетких множеств
- Приведены **примеры типичных функций принадлежности**, которые заданы на поле действительных чисел
- Функции принадлежности могут использоваться как **функции активации** нейронов в нейронных сетях
- В качестве функций принадлежности часто пользуются **функциями плотности распределений вероятностей**
- На практическом занятии будут рассмотрены:
  - несимметричные одномерные функции принадлежности,
  - функции принадлежности в трехмерном пространстве,
  - операции над нечеткими множествами в трехмерном пространстве
- Следующая лекция посвящена **применению правил над нечеткими множествами и методам принятия решений**

Список литературы

1. *Яхъяева Г.Э.* Нечеткие множества и нейронные сети. Серия: Основы информационных технологий. – БИНОМ, 2008. – 320 с.
2. *Jang J.-S., Sun C.T., Mizutani E.* Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. – The USA: Prentice Hall, 1997. – 614 p.
3. *Тарков М.С.* Нейрокомпьютерные системы. Серия: Основы информационных технологий. – Изд-во Интернет-университета информационных технологий – ИНТУИТ.ру, БИНОМ, 2006. – 144 с.