

# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ



# 1. Общие сведения о пересечении поверхностей

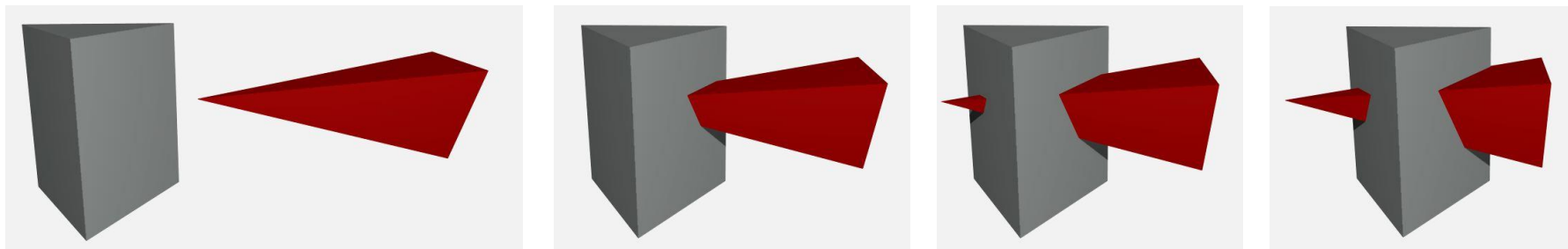
В результате пересечения поверхностей образуется пространственная, реже, плоская замкнутая линия, вид и форма которой зависят от вида пересекающихся поверхностей. При этом **линия пересечения одновременно принадлежит одной и другой поверхности.**

Для построения линии пересечения двух поверхностей в данном случае рассматриваются два основных метода:

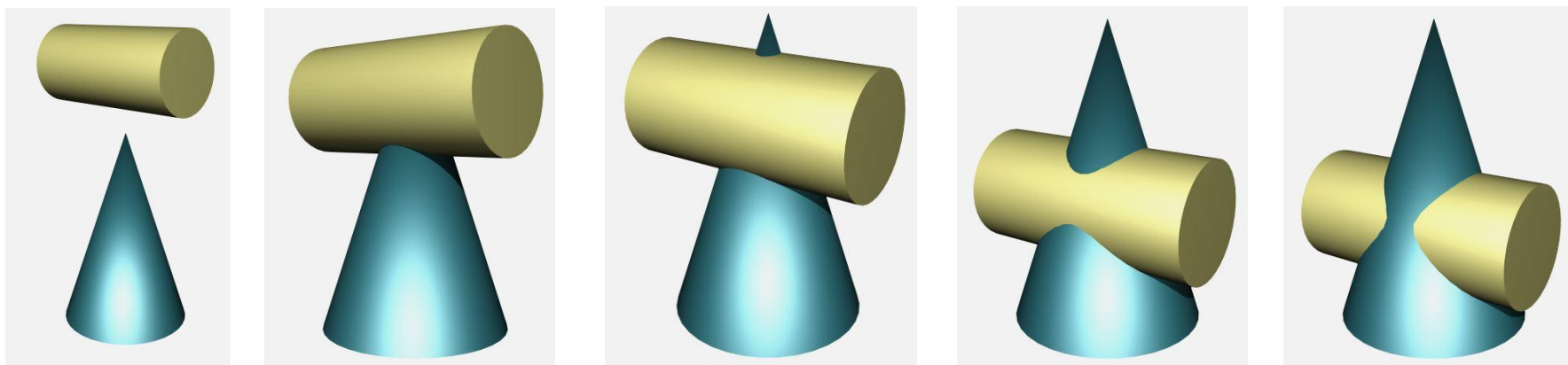
- **метод секущих плоскостей-посредников частного положения;**
- **метод концентрических сфер-посредников.**

В зависимости от взаимного расположения поверхностей, возможны два вида их пересечения – **врезка** и **пронизание**.

а)



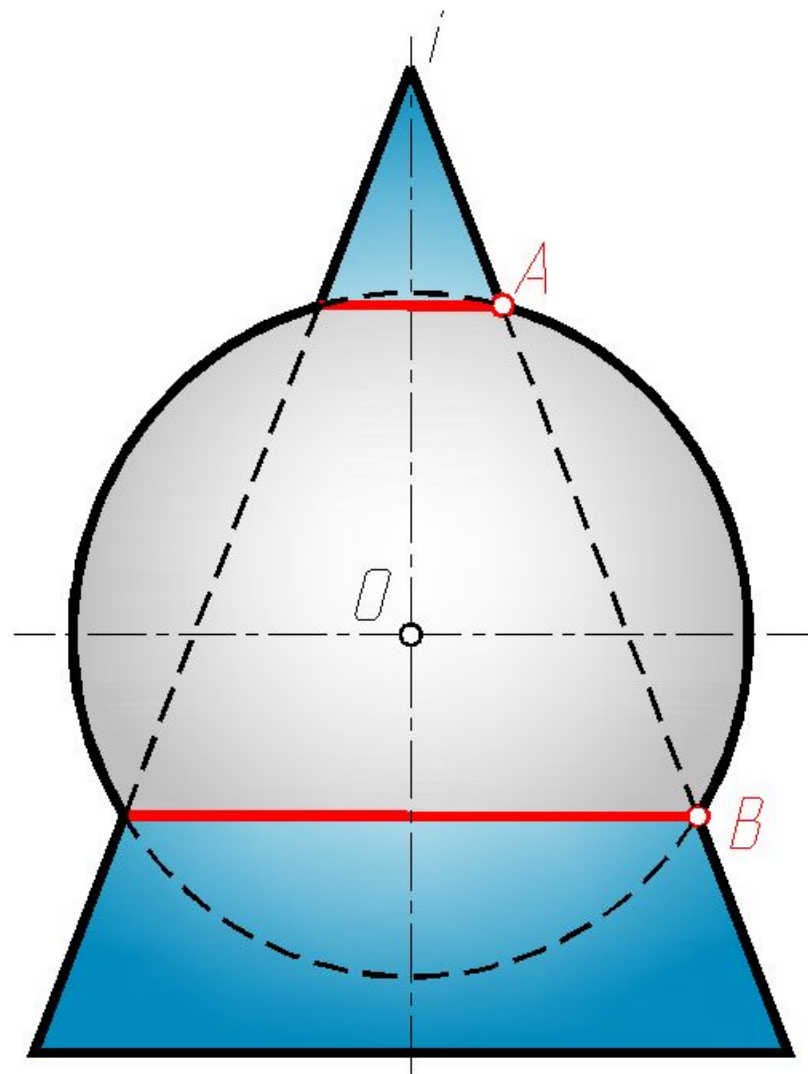
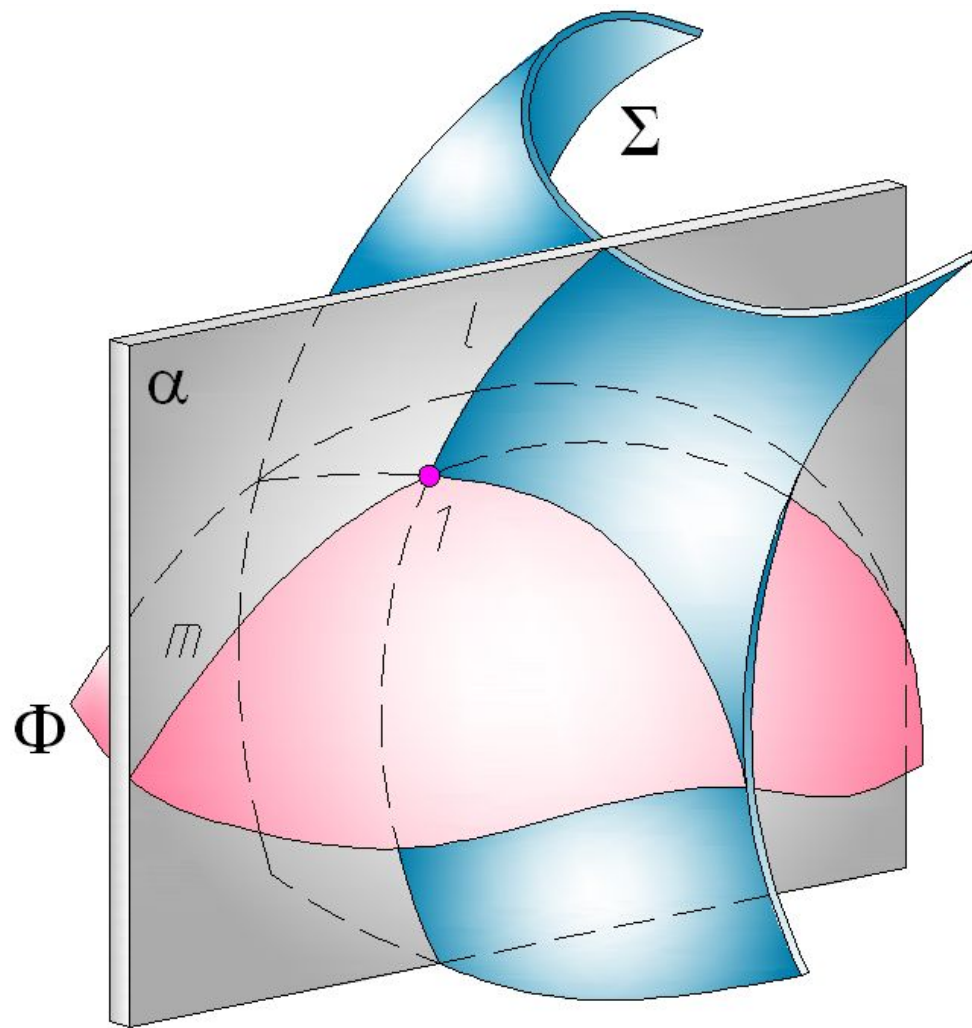
б)



При составлении алгоритма решения задач на построения проекций линии пересечения поверхностей на комплексном чертеже выявляют:

- вид заданных пересекающихся поверхностей и их расположение относительно плоскостей проекций;
- область пересечения поверхностей;
- характерные точки, принадлежащие линии пересечения;
- промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения (методом секущих плоскостей-посредников частного положения, либо методом концентрических сфер-посредников).





- При применении метода плоскостей-посредников частного положения, последние следует выбирать так, чтобы они пересекали заданные поверхности по наиболее простым для графического построения линиям – прямым, либо окружностям. Для того чтобы концентрическая сфера-посредник пересекала по параллелям две заданные поверхности вращения, центр этой сферы-посредника должен лежать в точке пересечения осей вращения заданных поверхностей;
- Если оси вращения заданных поверхностей параллельны какой-либо плоскости проекций, то на чертеже параллели пересечения концентрических сфер-посредников с заданными поверхностями проецируются на эту плоскость в прямые линии.

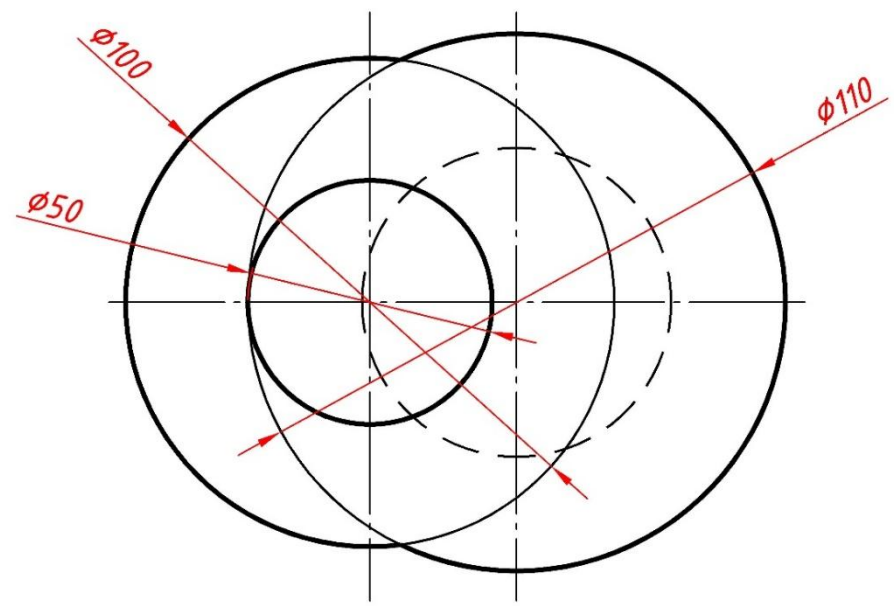
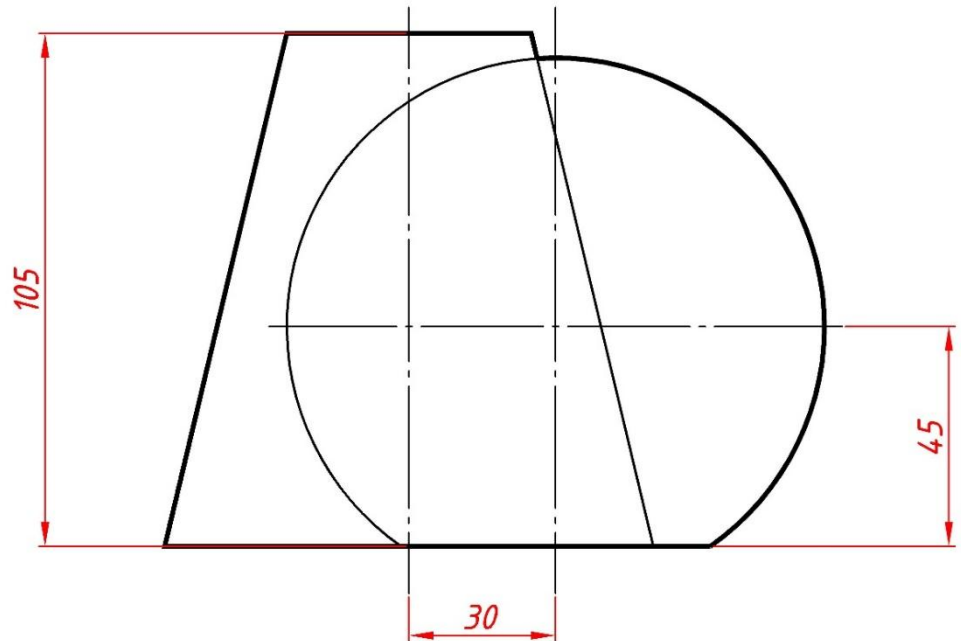
Поэтому, концентрические сферы-посредники применяются только в том случае, когда две пересекающиеся поверхности являются:

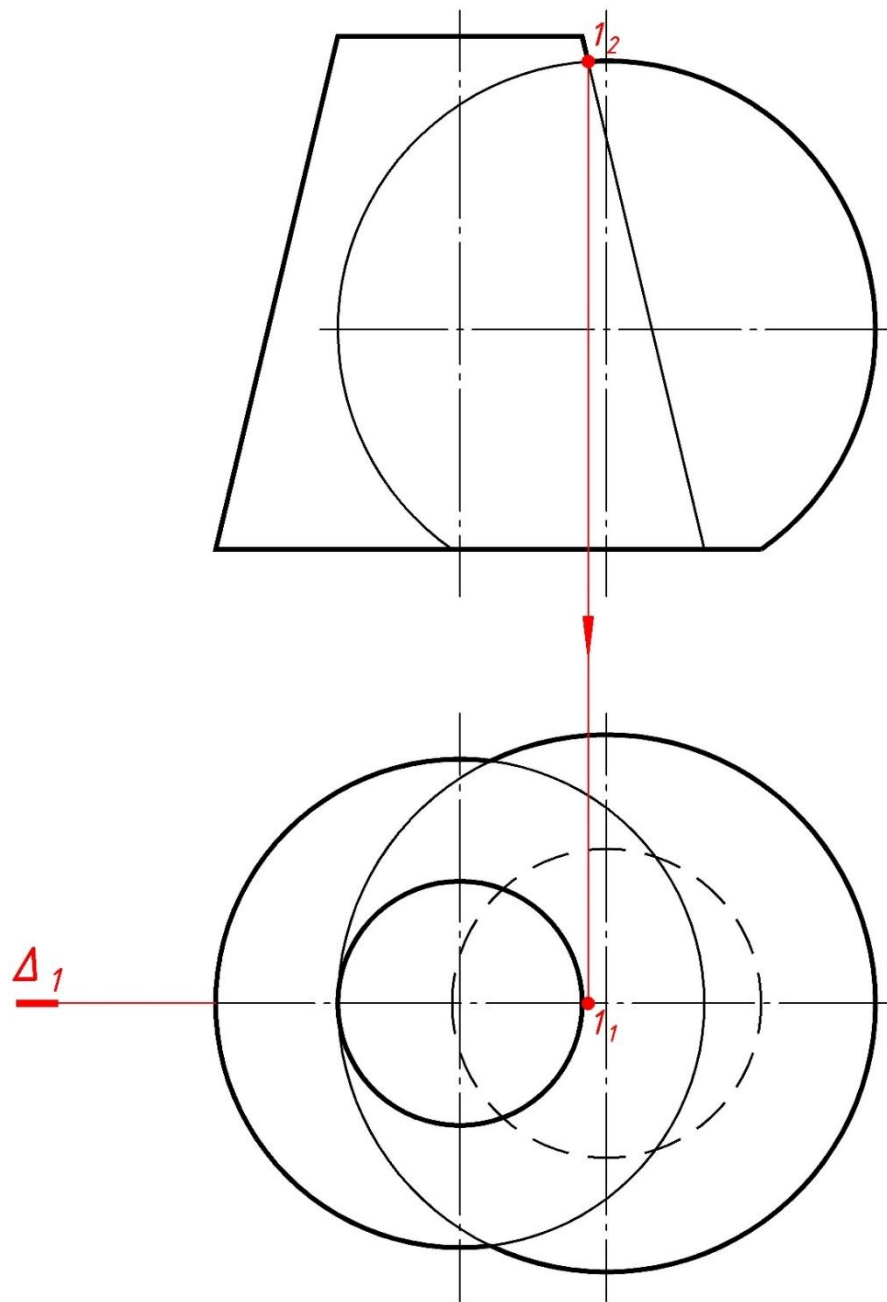
- поверхностями вращения;
- оси вращения этих поверхностей пересекаются и расположены параллельно одной и той же плоскости проекций, или одна из осей должна быть проецирующей прямой, а вторая – линией уровня.

## ***А. Метод секущих плоскостей – посредников***

*Общие положения при составлении алгоритма решения задач:*

- 1 Проводят анализ заданных поверхностей по классификации их образования и расположения относительно плоскостей проекций.
- 2 Выбирают плоскости-посредники таким образом, чтобы при пересечении их с каждой из заданных поверхностей образовались удобные для построения линии (прямые или окружности).
- 3 Определяют характерные точки, принадлежащие линии пересечения, а затем промежуточные.
- 4 Соединяют полученные точки линией, с учетом ее характера (ломаная, кривая, комбинированная).
- 5 Определяют видимость проекций линии пересечения и заданных поверхностей.



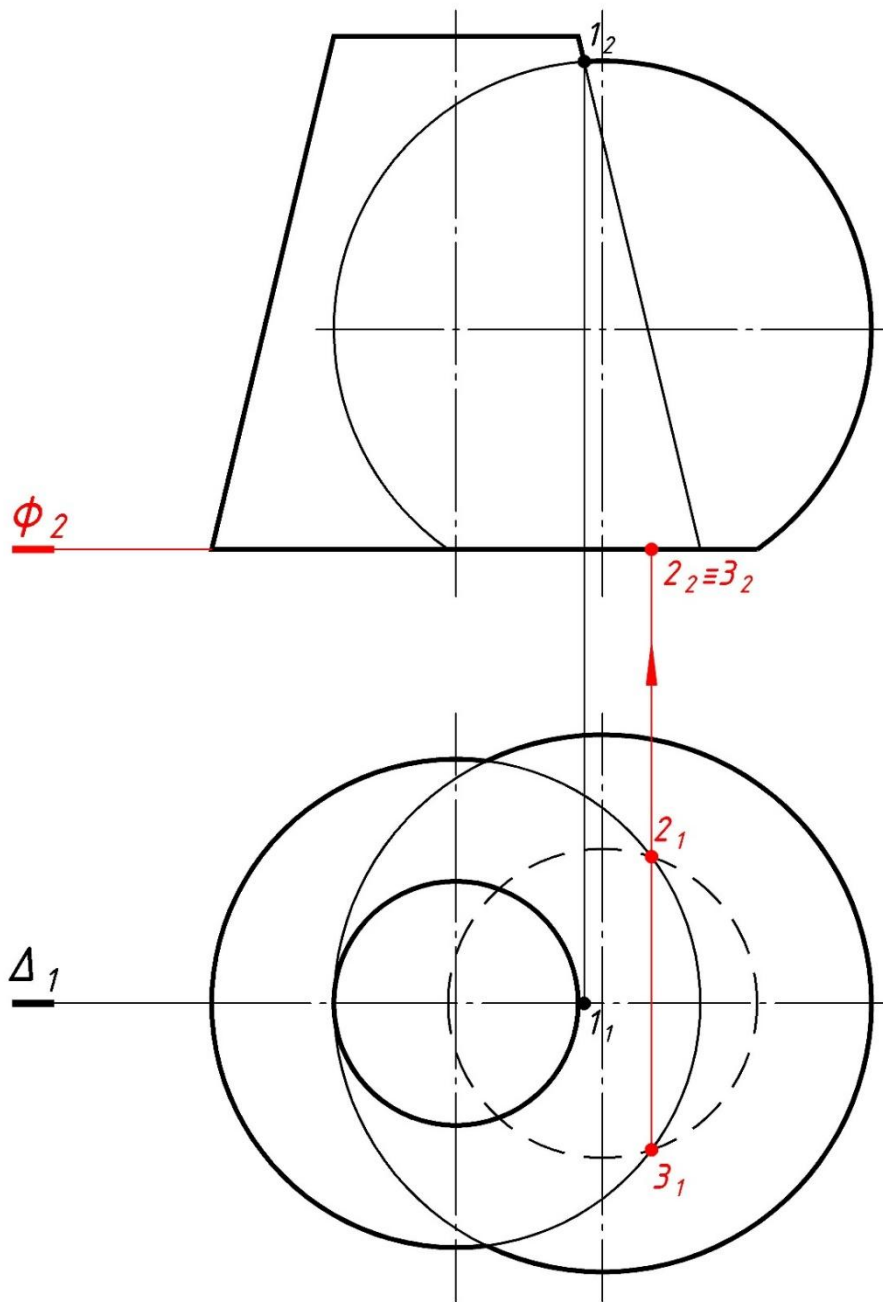


Задачу решаем способом  
вспомогательных  
плоскостей-посредников.

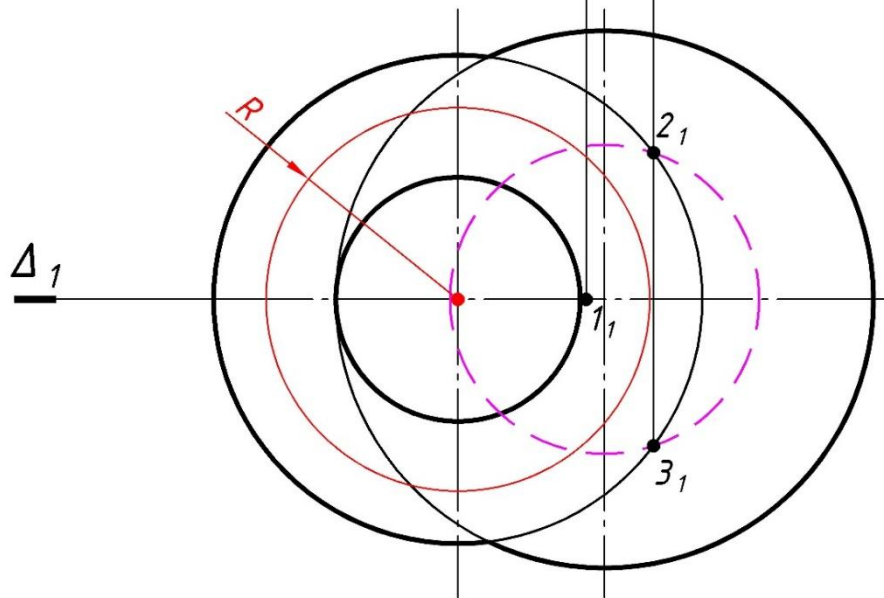
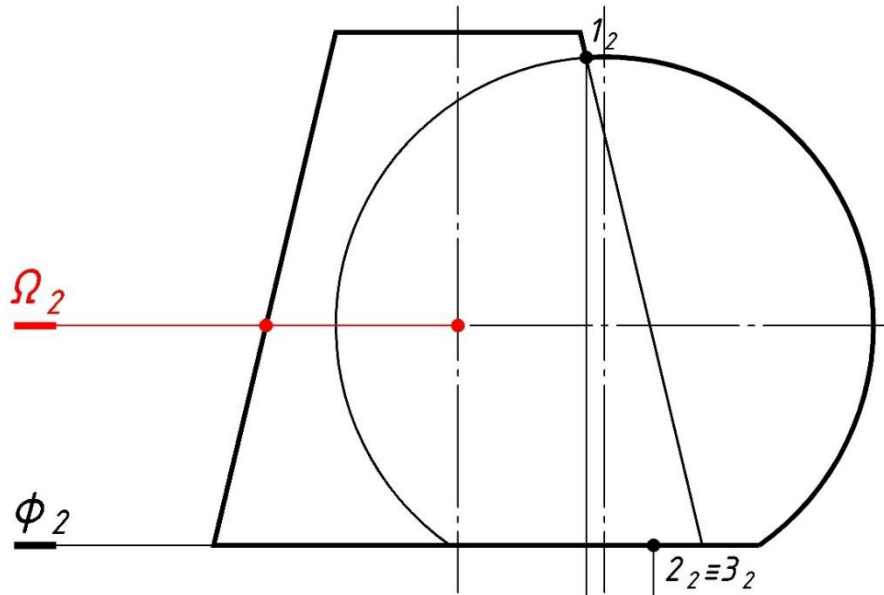
1. Независимо от способа решения  
сначала определяем характерные  
точки линии пересечения - это  
наивысшая и наинизшая точки линии  
пересечения, а также точки смены  
видимости на плоскостях проекций.  
2. Наивысшая и наинизшая точки  
будут располагаться в общей  
плоскости симметрии обеих  
поверхностей. В нашем случае это  
плоскость  $\Delta$ .

Эта плоскость пересекает обе  
поверхности по очерковым  
образующим, следовательно на их  
пересечении будут искомые точки.  
Т.к. обе поверхности усеченные (или  
хотя бы одна), то мы получим  
только наивысшую точку сечения  $1_2$ .  
Проекцию  $1_1$  по линии проекционной  
связи опускаем на  $\Delta_1$ .

3. Так как основания поверхностей усеченные, то заключаем их во вспомогательную плоскость посредник  $\phi$ , ктр. в данном случае совпадает с горизонтальной плоскостью проекций. На пересечении горизонтальных проекций усеченных оснований поверхностей находим искомые проекции  $2_1$  и  $3_1$ . Фронтальные проекции точек возвращаем на  $\phi_2$ .

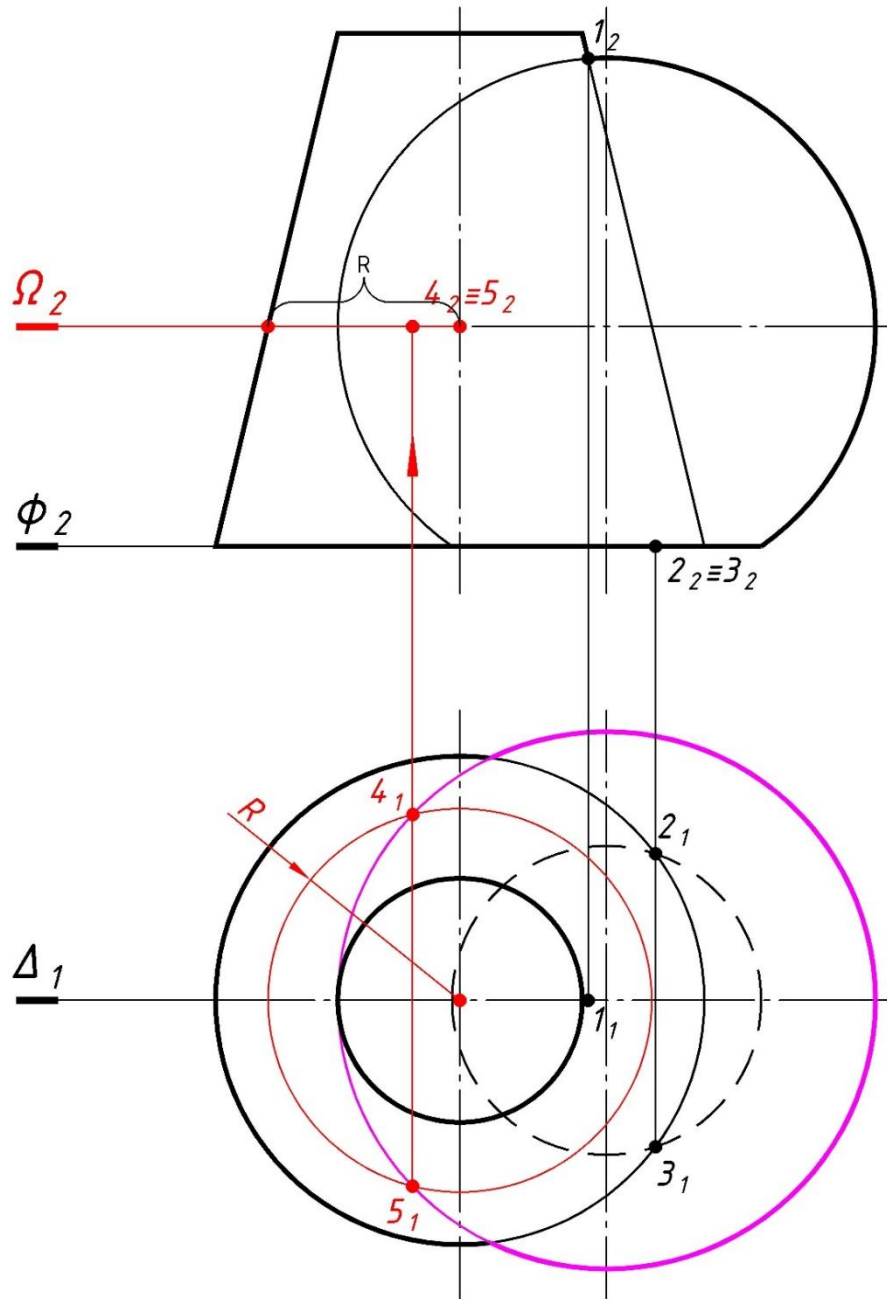


4. Точки смены видимости принадлежат осям симметрии поверхностей. Проведем вспомогательную плоскость  $\Omega$  горизонтального уровня через ось симметрии усеченной сферы. Эта плоскость пересекает сферу по окружности ее радиуса, а конус по окр. радиуса  $R$  (расстояние от оси до очерка конуса по плоскости).

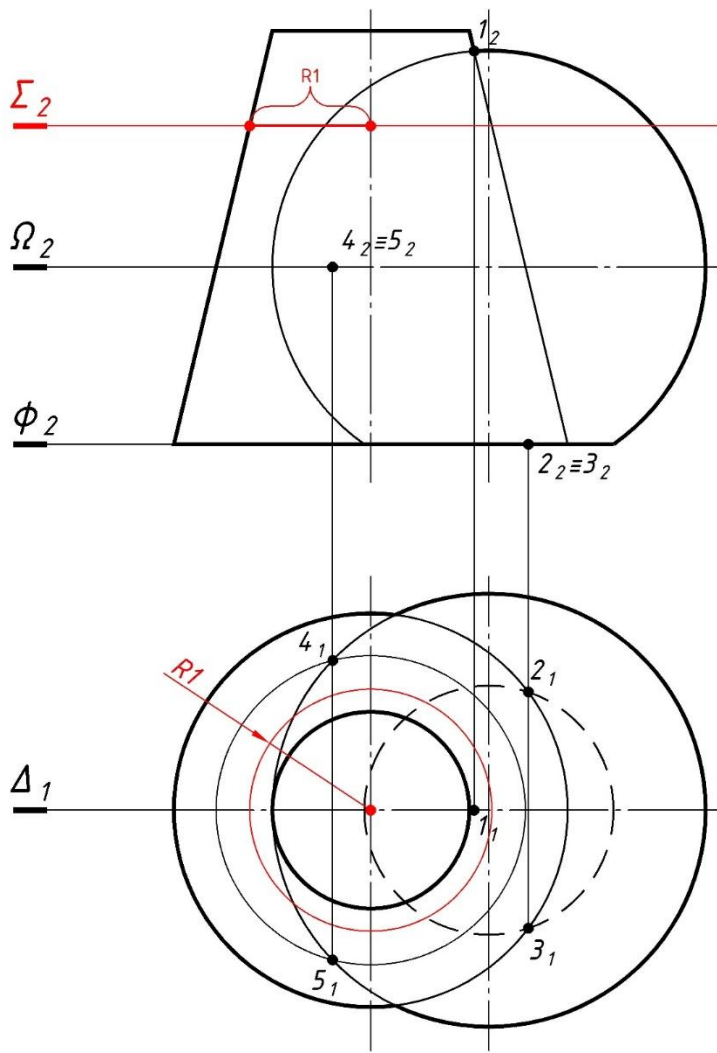




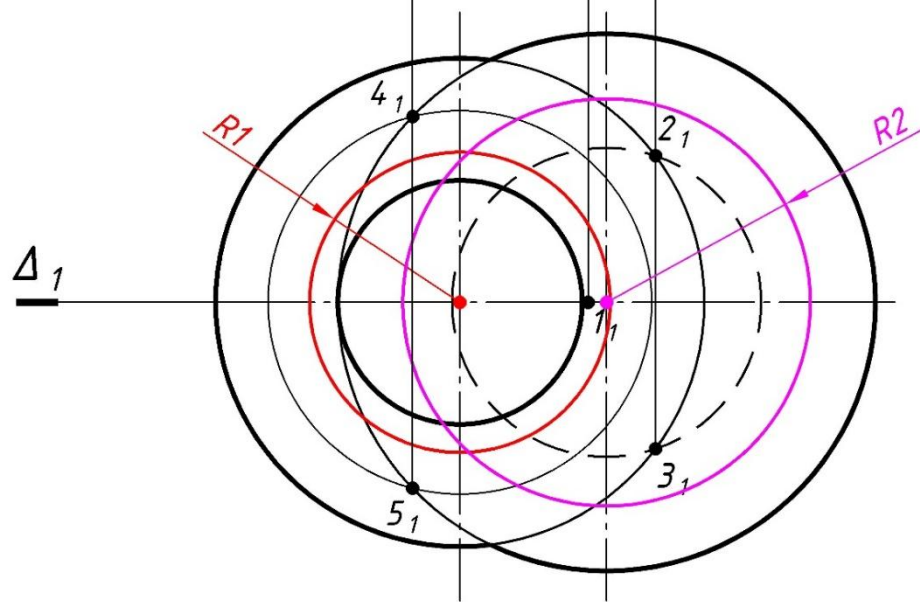
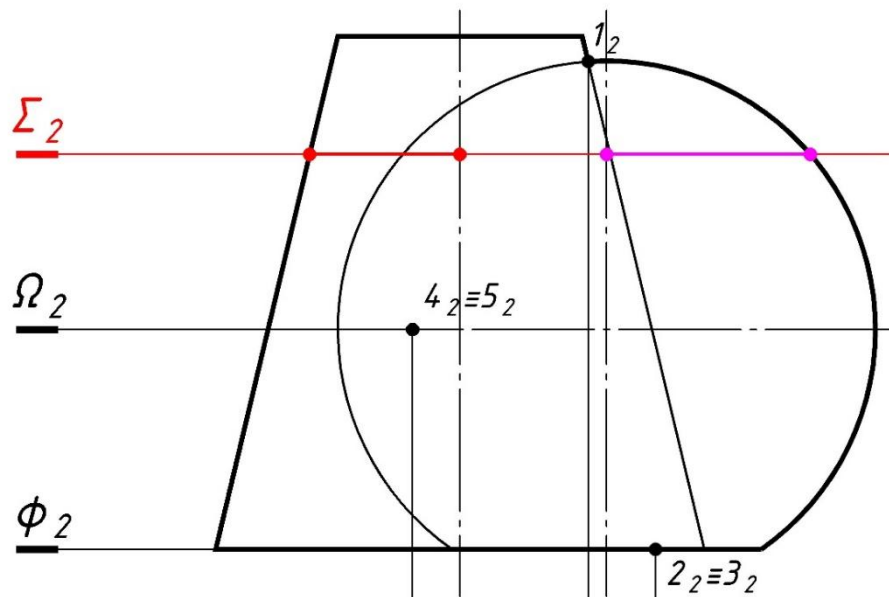
На пересечении горизонтальных проекций этих линий находим горизонтальные проекции искомых точек  $4_1$  и  $5_1$ . Возвращаем фронтальные проекции точек на  $\Omega_2$ .

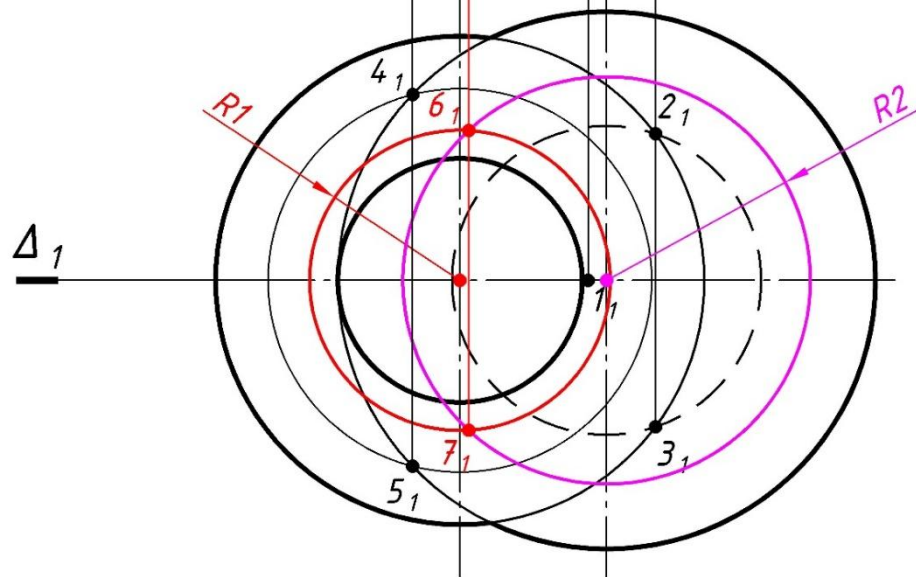
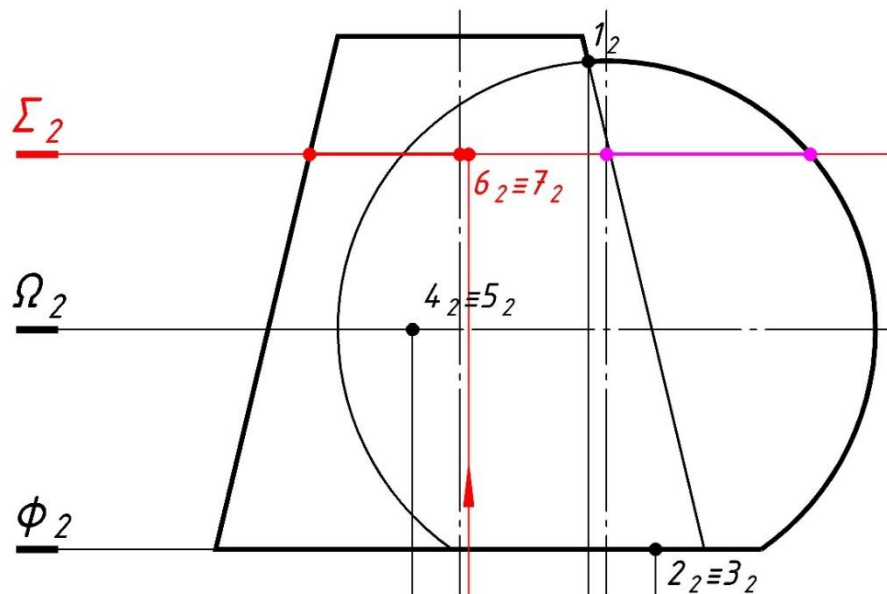




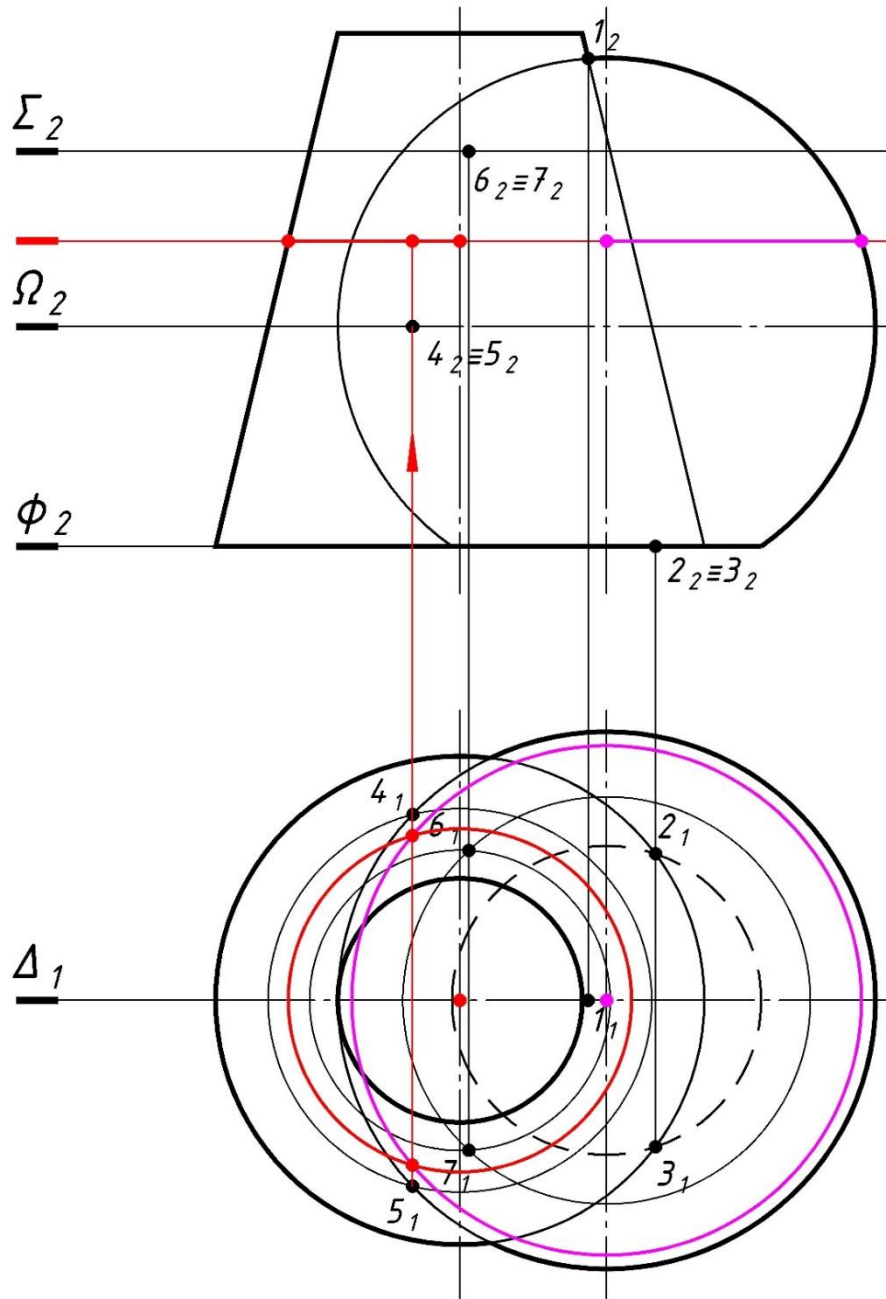


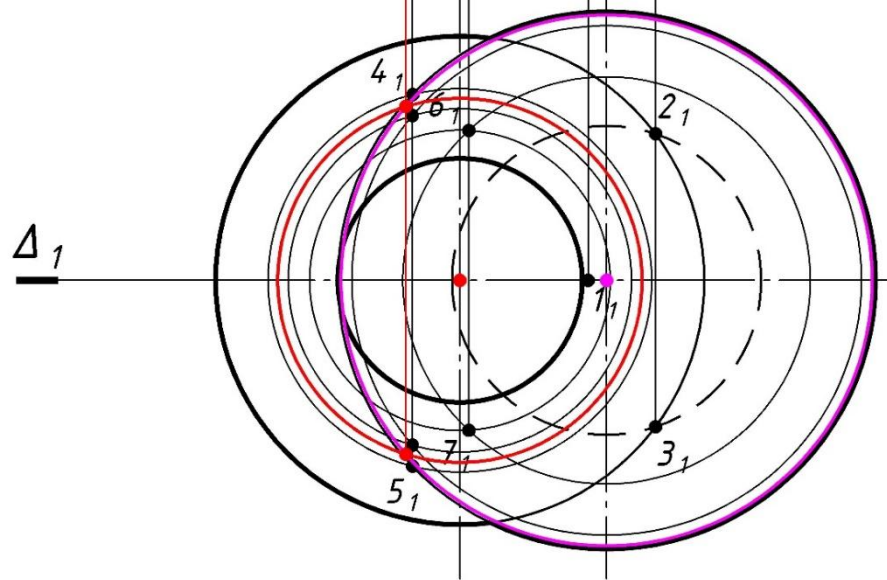
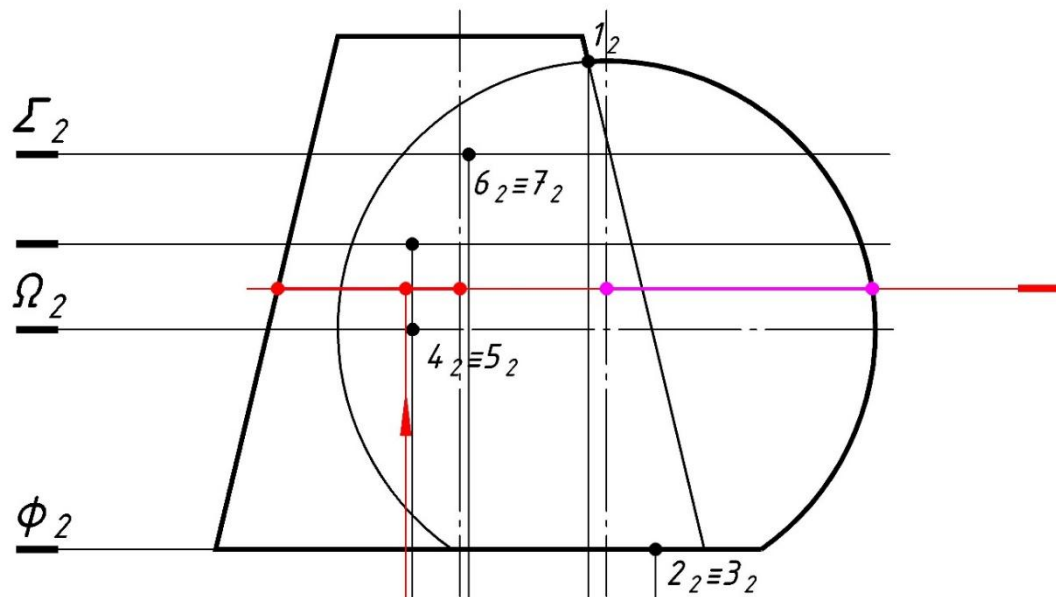
5. Находим промежуточные точки линии пересечения. Для этого в пределах высшей и низшей точек произвольно проводим вспомогательные плоскости-посредники горизонтального уровня. Проведем плоскость-посредник  $\Sigma$ , ктр. пересекает конус по окружности радиуса  $R_1$ , а усеченную сферу по окружности радиуса  $R_2$ . На пересечении горизонтальных проекций этих линий находим искомые проекции точек  $6_1$  и  $7_1$ . Фронтальные проекции точек возвращаем на  $\Sigma_2$ .

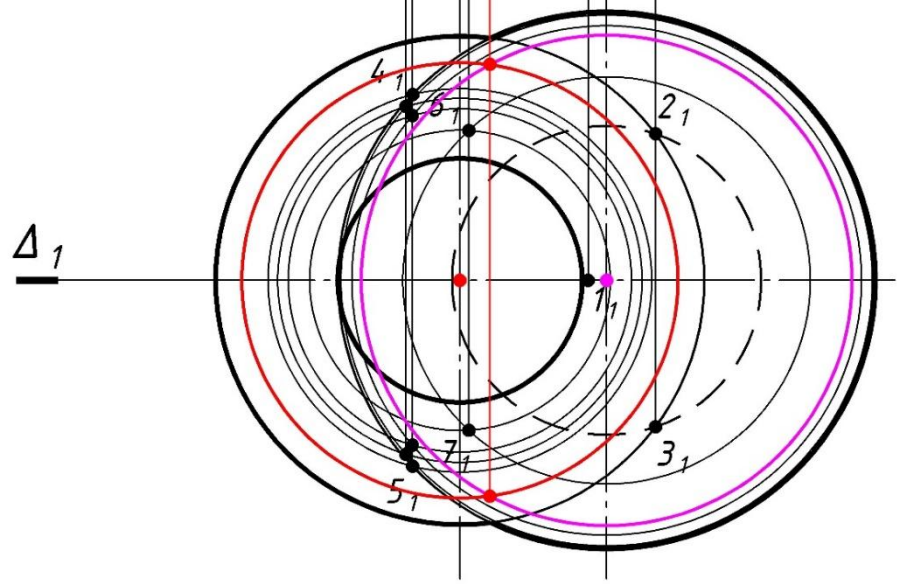
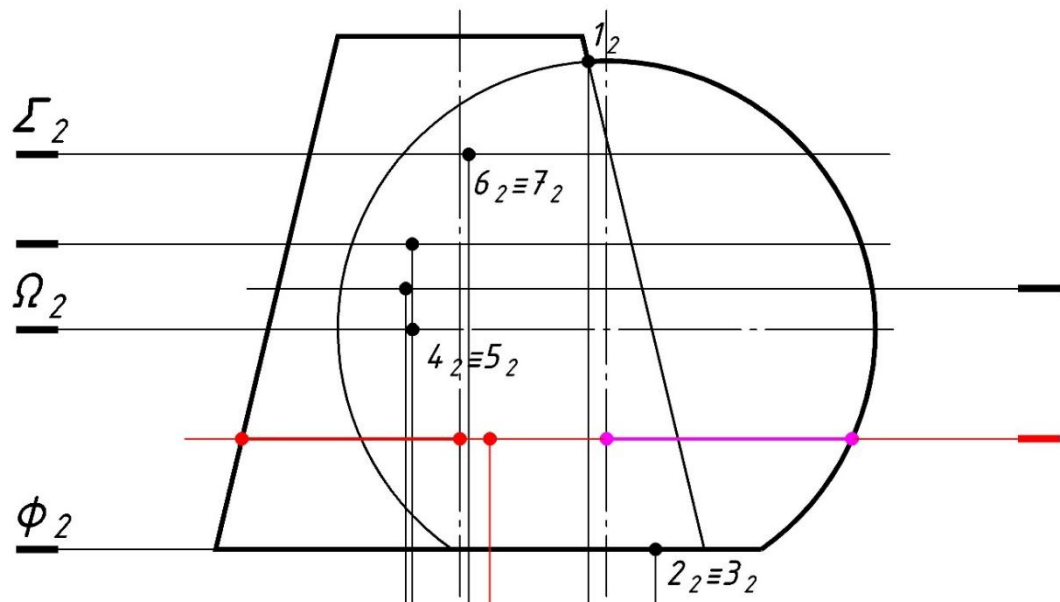


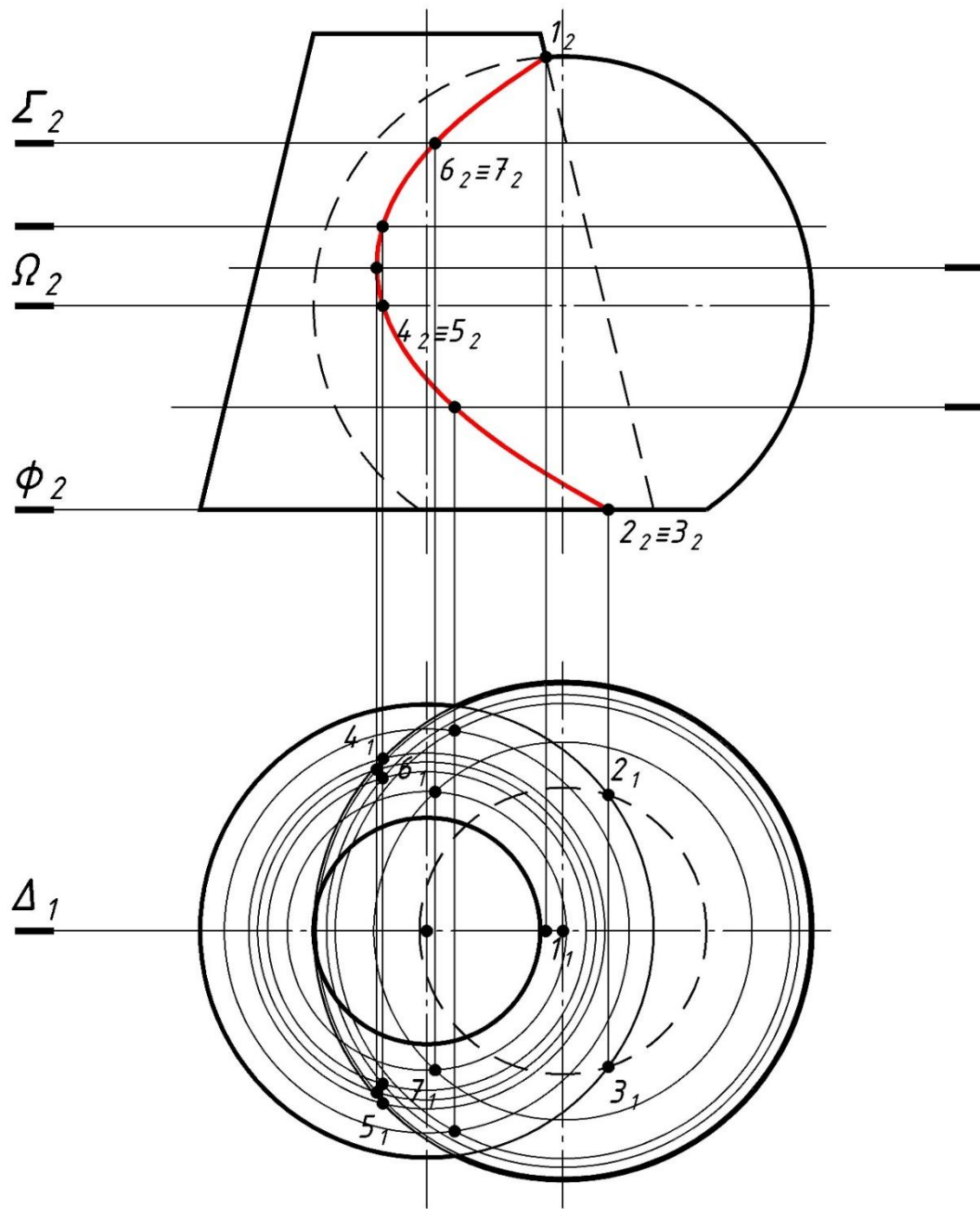


Аналогично строим необходимое количество промежуточных точек, принадлежащих линии пересечения.



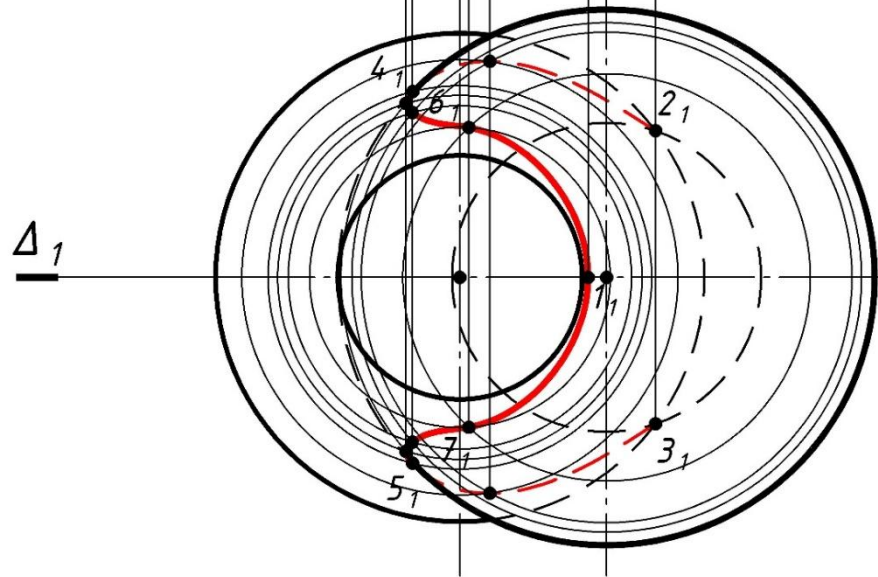
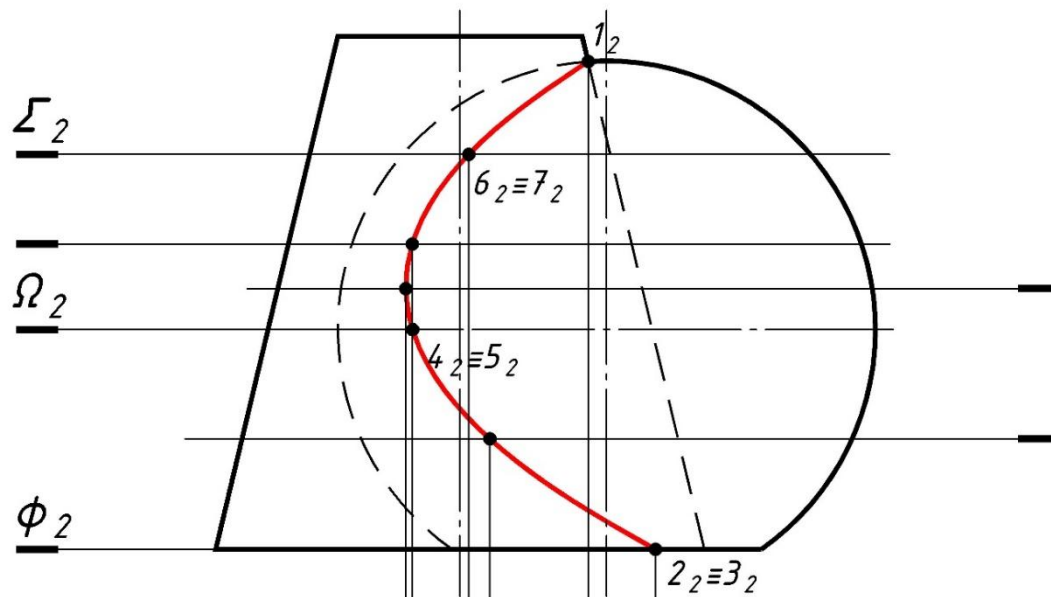






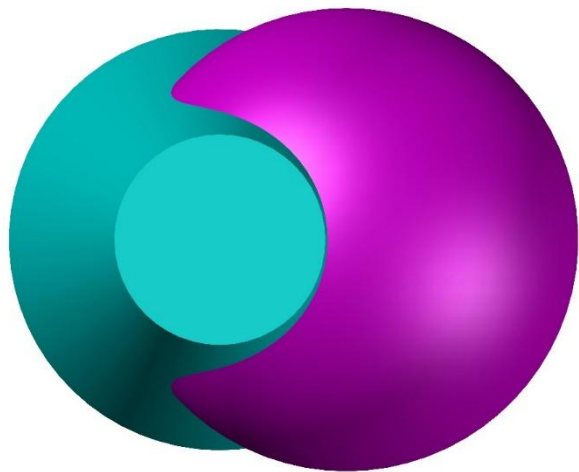
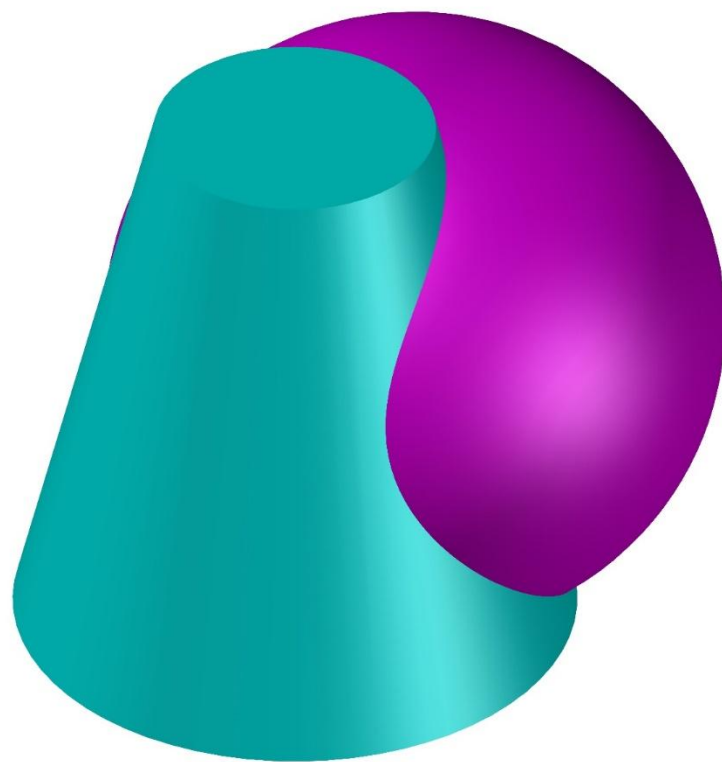
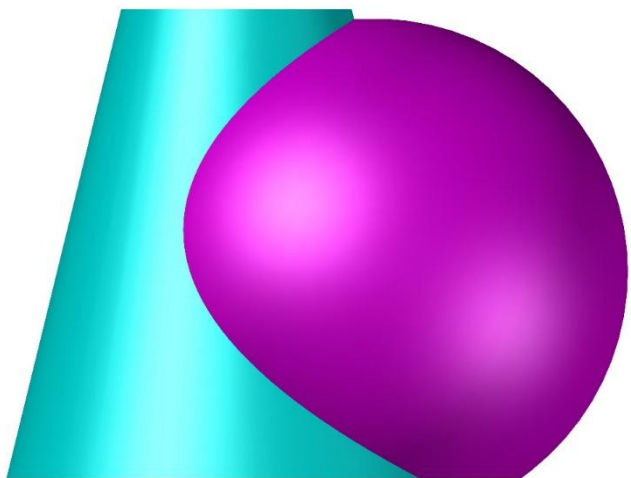
Соединяем точки по-порядку и определяем видимость. На фронтальной плоскости проекций линия пересечения будет видимой (та часть, ктр. находится за плоскостью симметрии 1642 и невидима, будет совпадать с видимой частью линии). Часть сферы внутри конуса и часть конуса внутри сферы будут невидимыми.

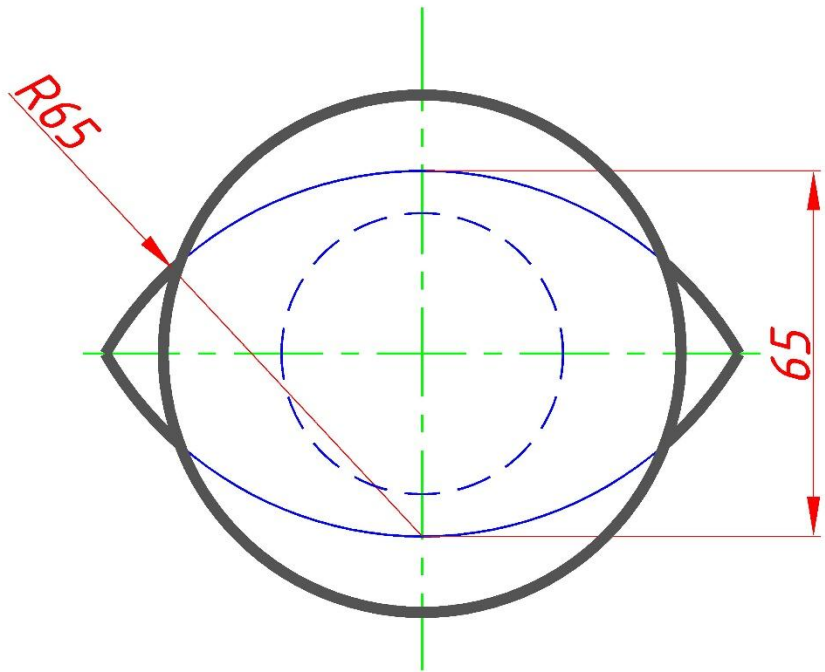
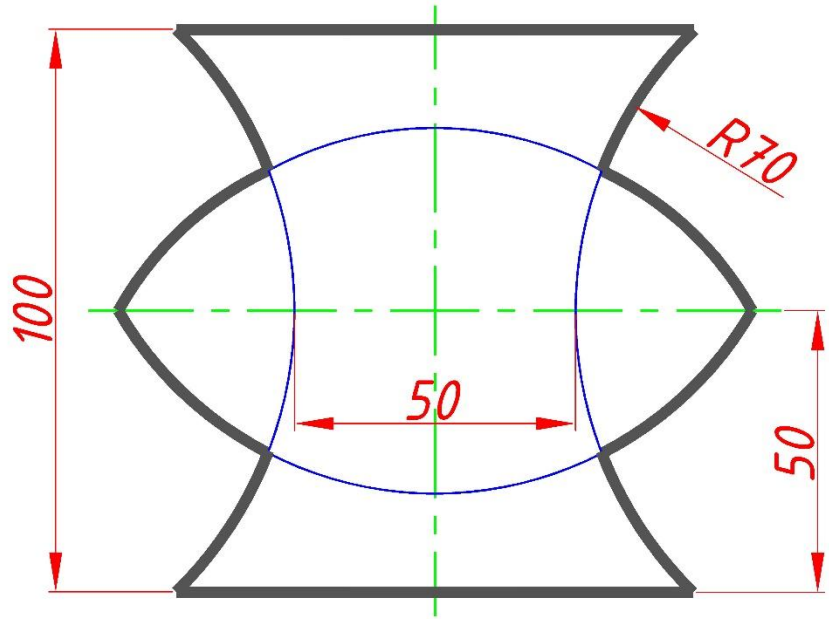


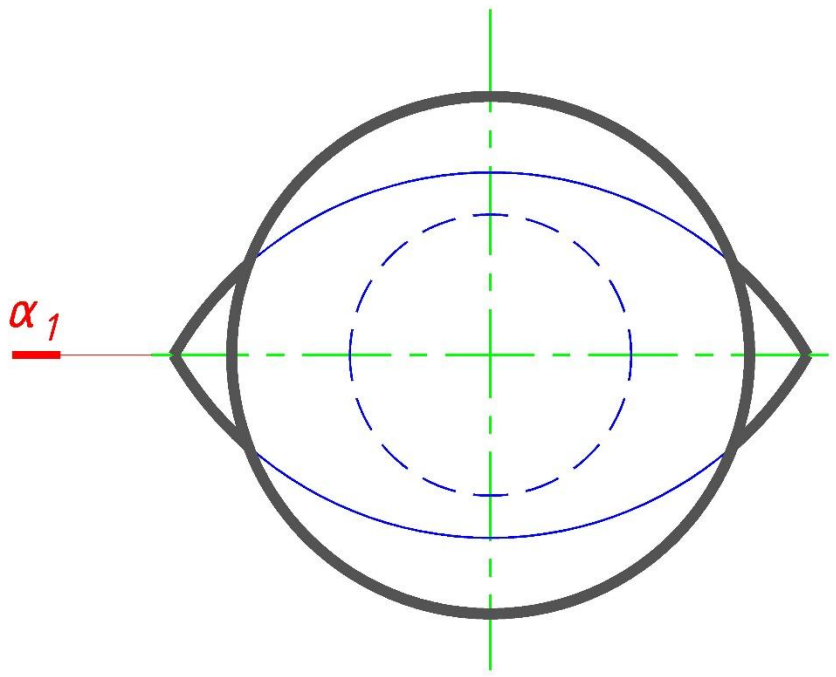
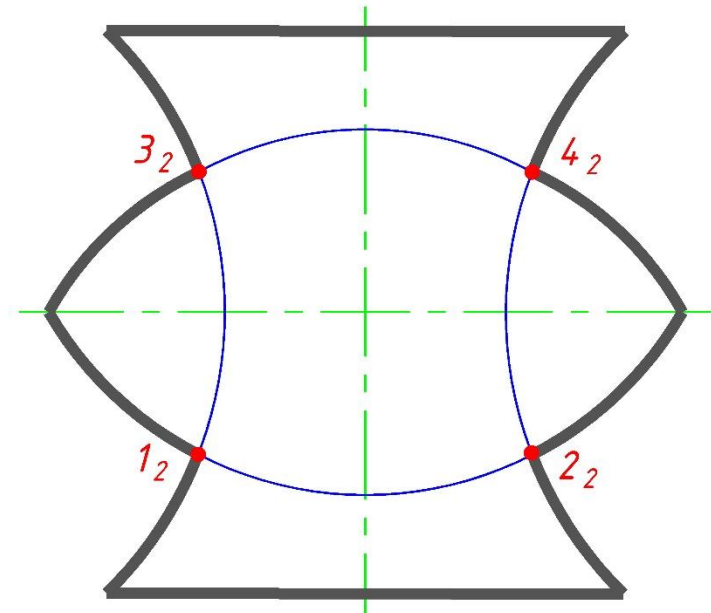


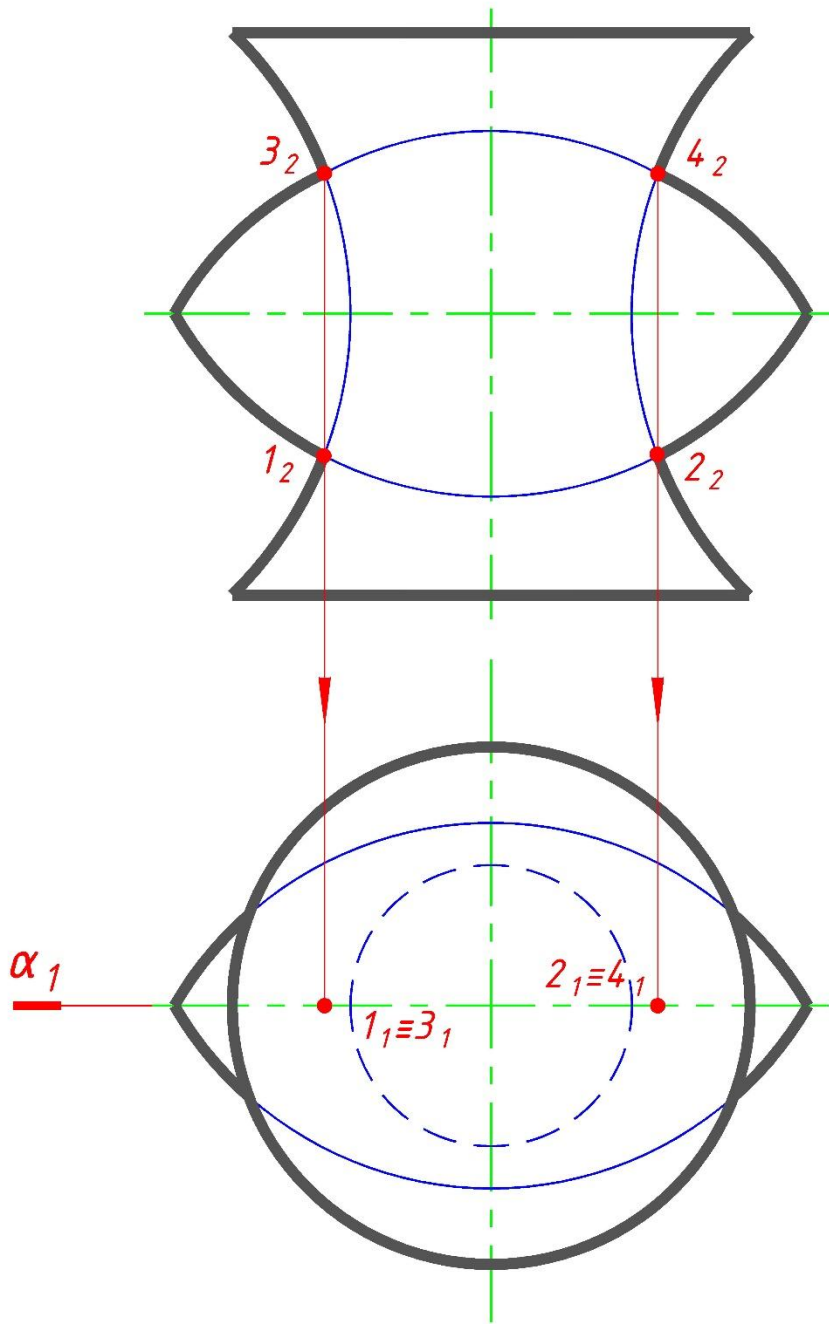
На горизонтальной плоскости проекций точками смены видимости являются 4 и 5, т.к. принадлежат оси симметрии сферы. Что выше этих точек на гор. пл. пр. будет видимым, что ниже - невидимым. Эти точки являются точками смены видимости и для очерка сферы. За этими точками сфера уходит в конус и будет невидимой. Нижнее основание конуса частично закрыто сферой и будет невидимо.

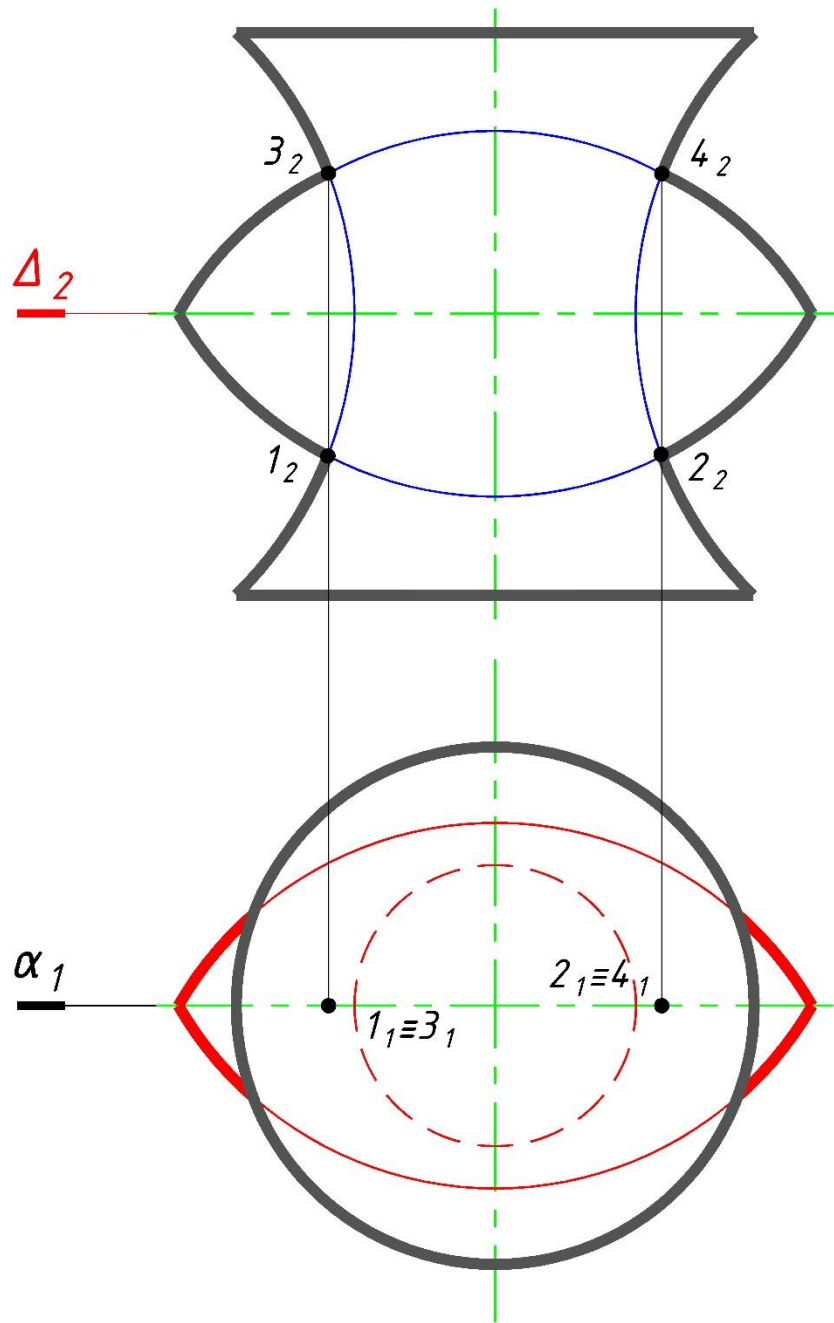


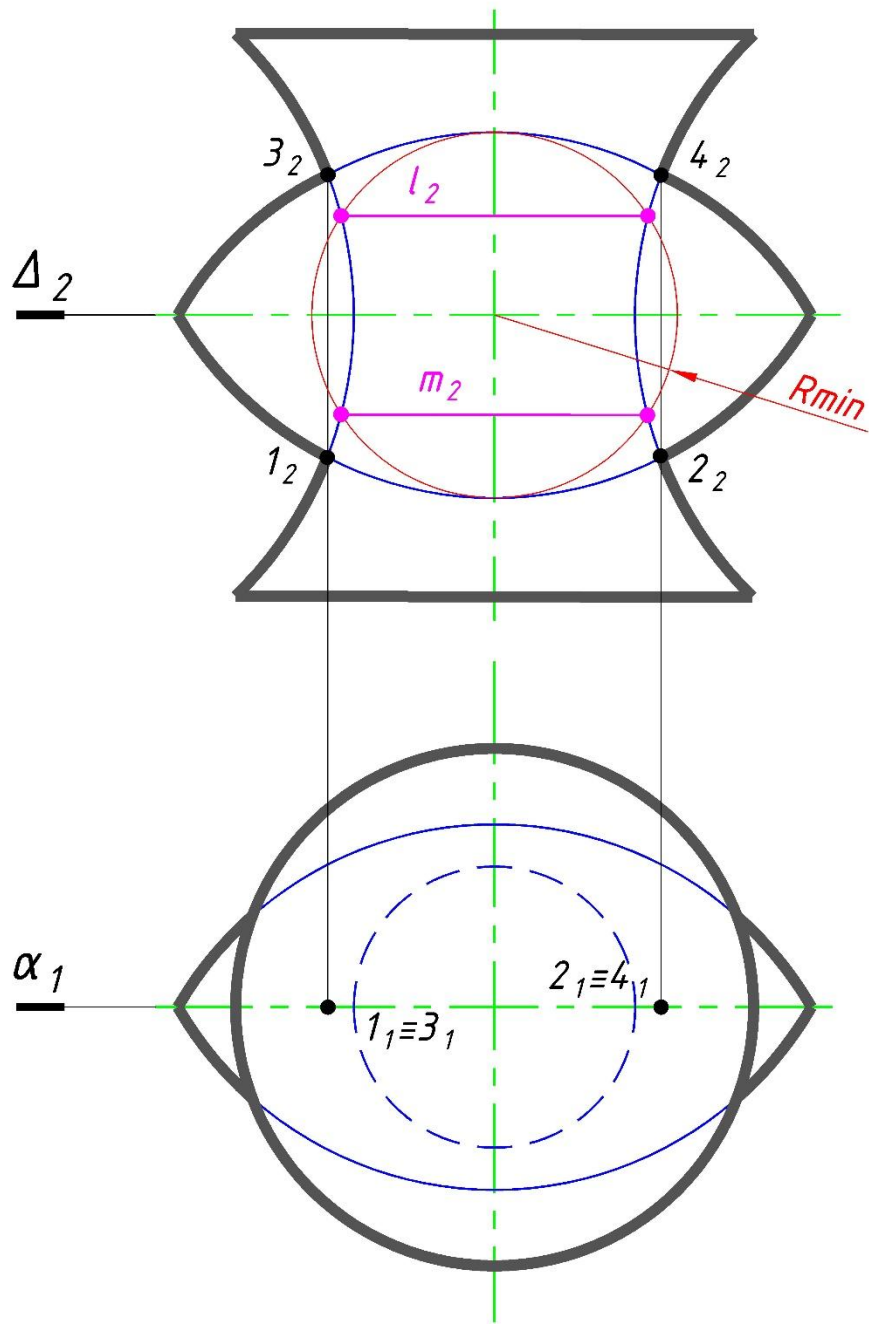


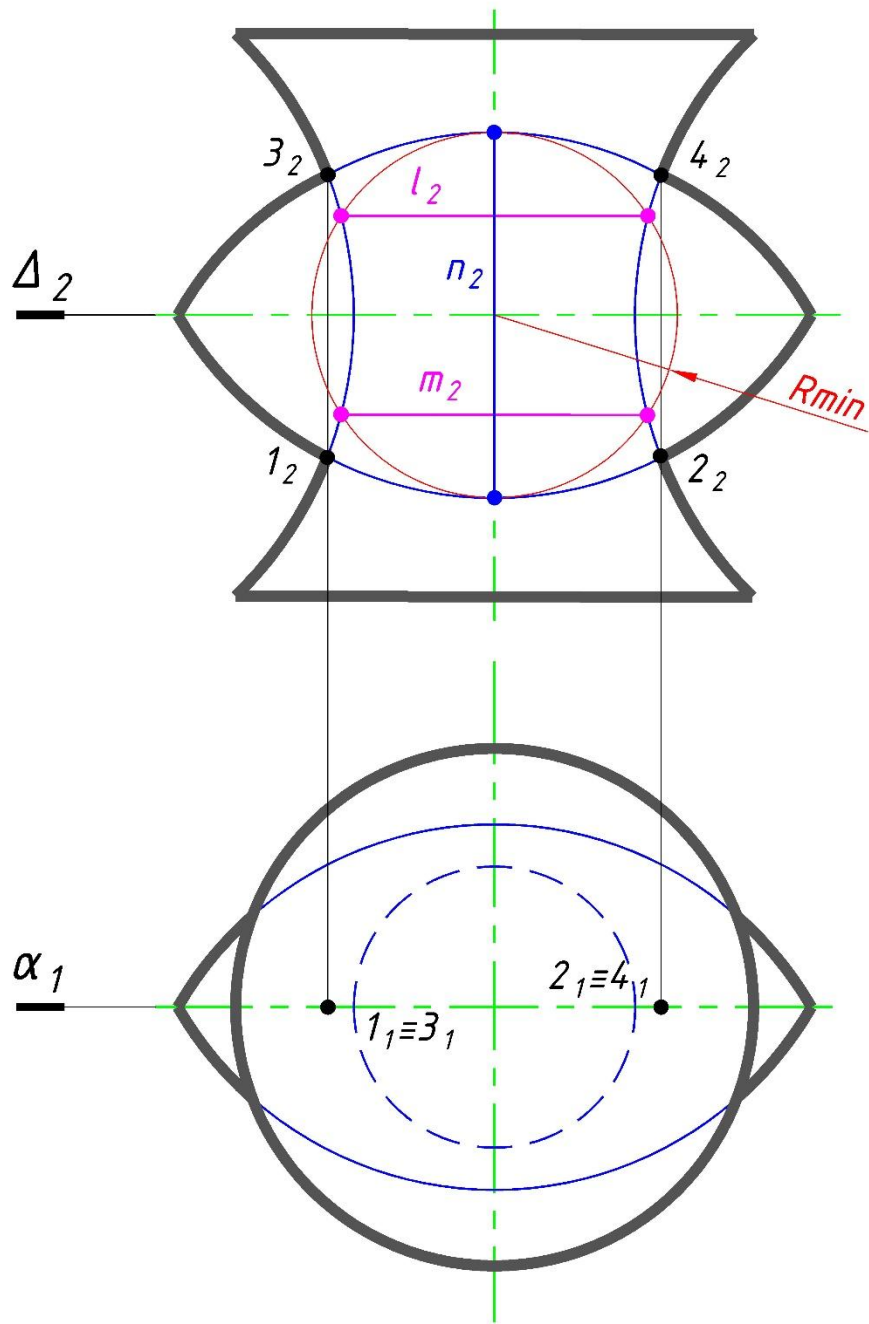


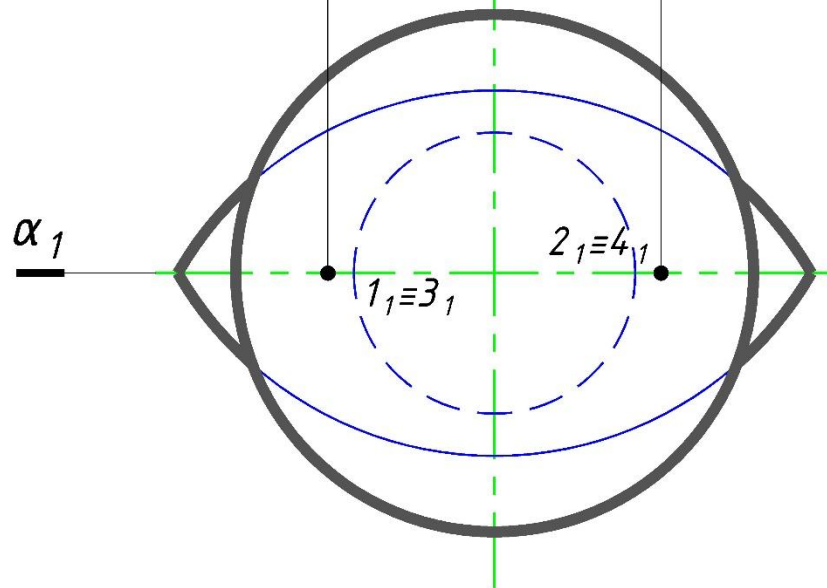
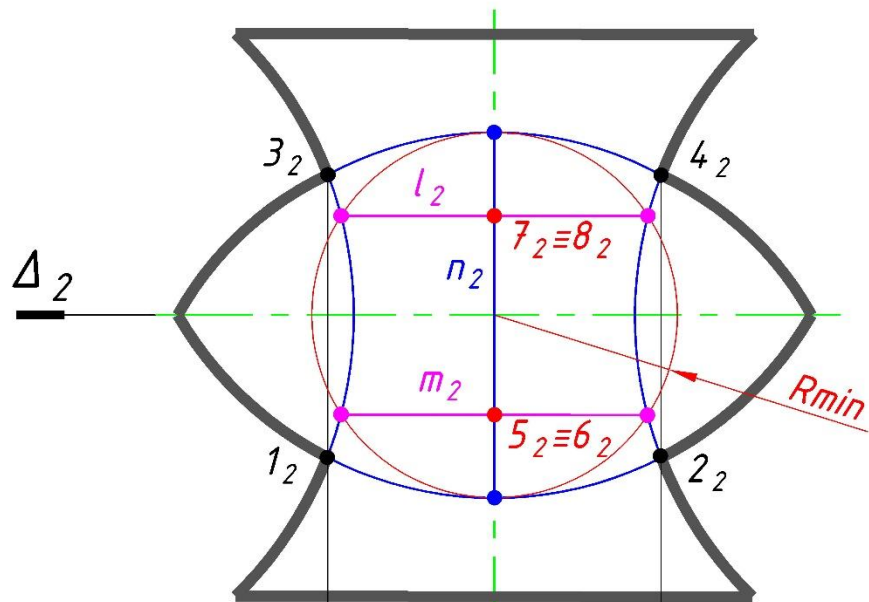




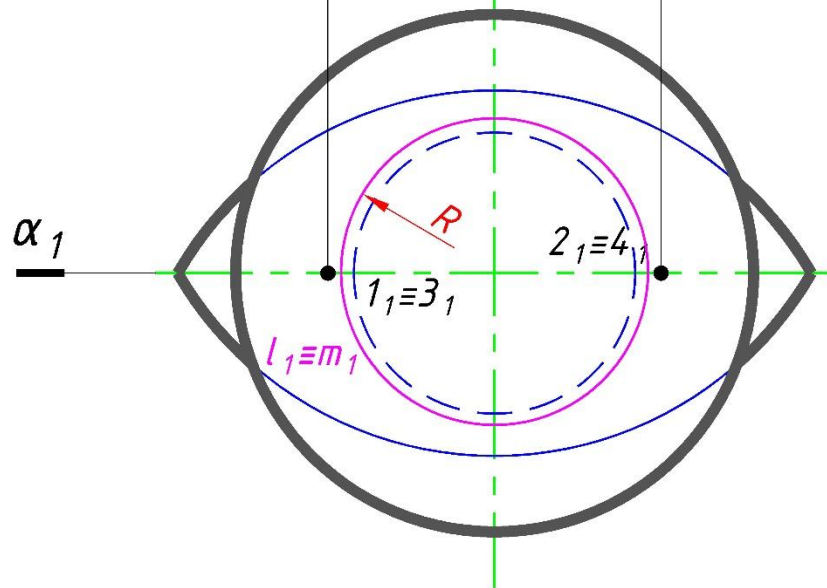
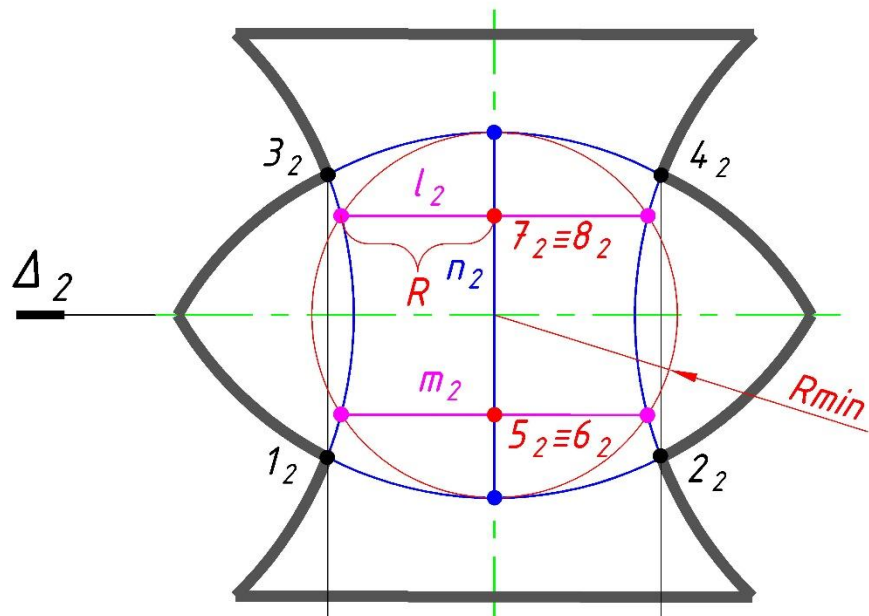


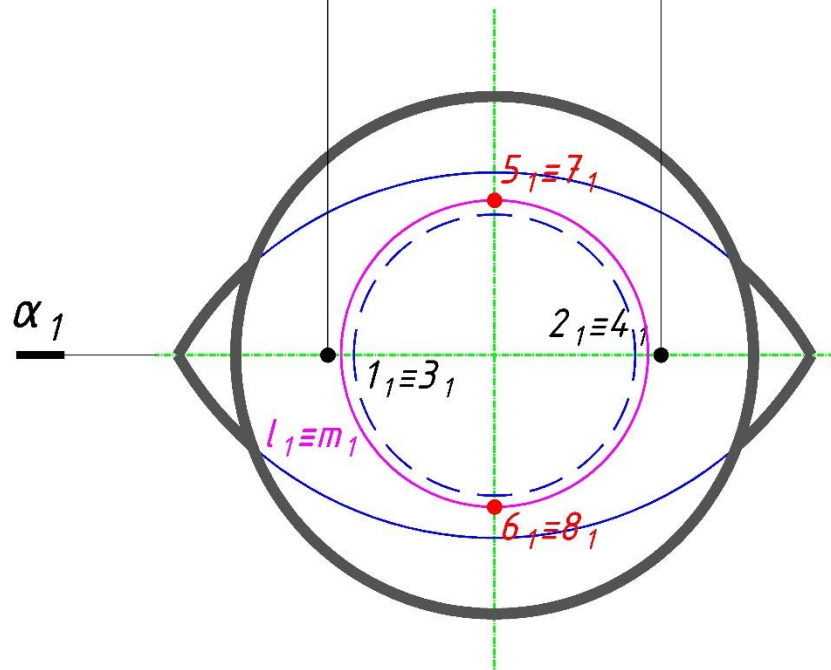
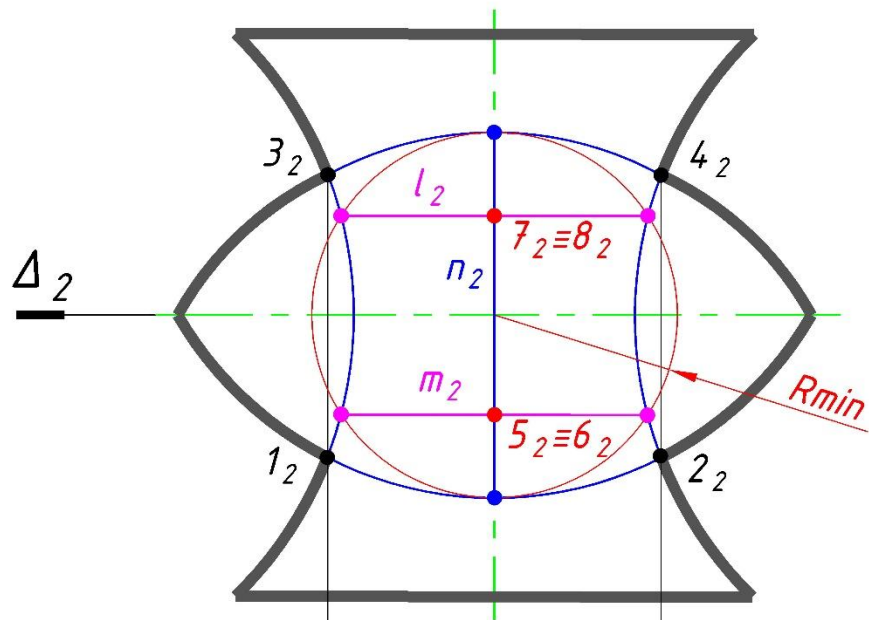


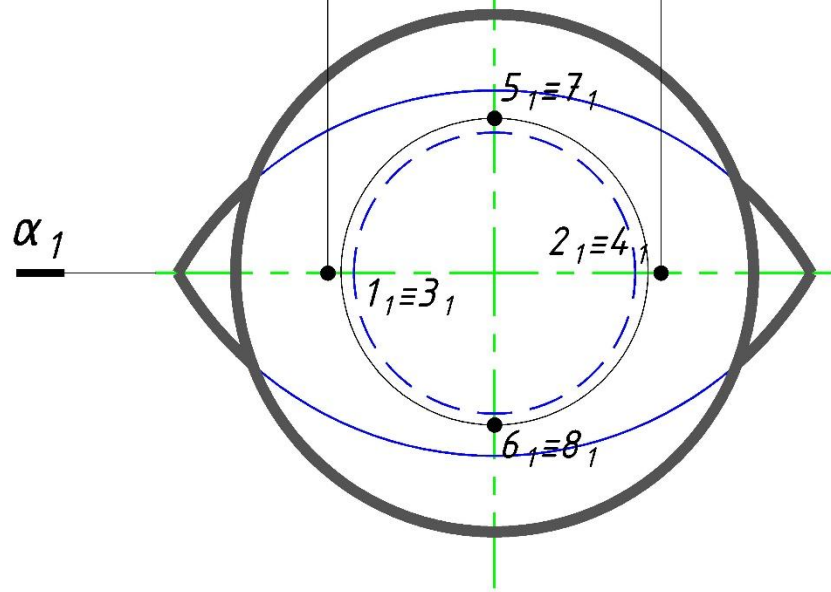
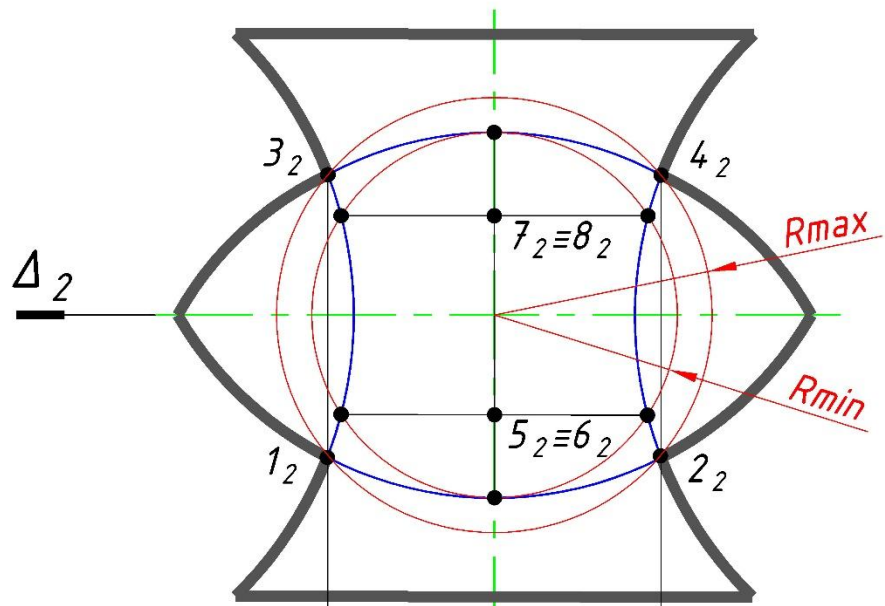


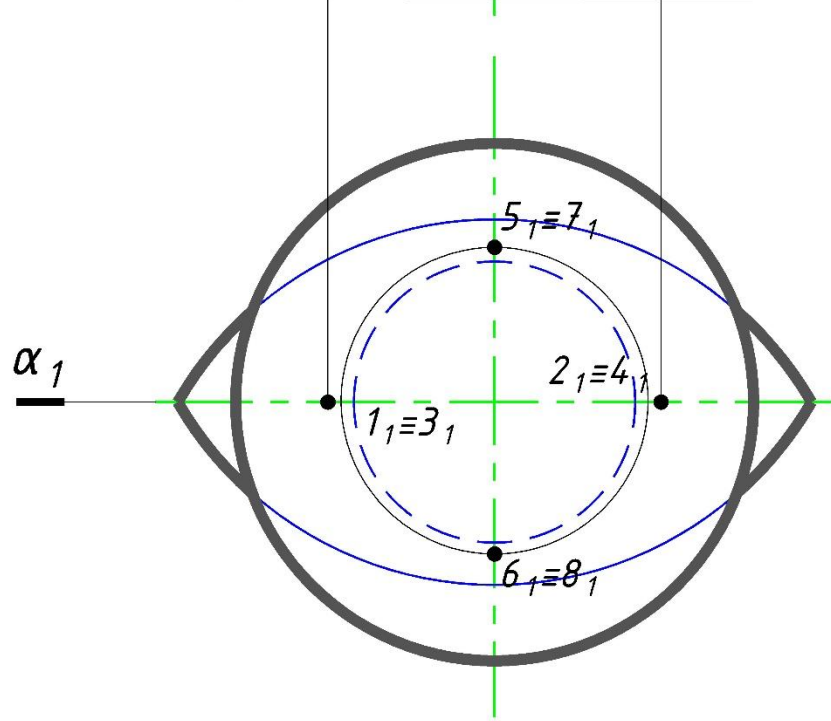
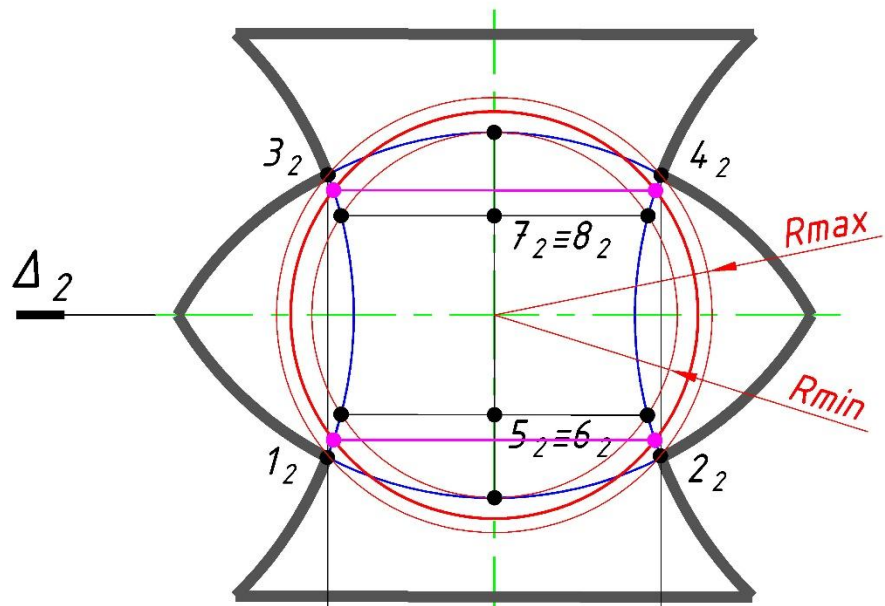


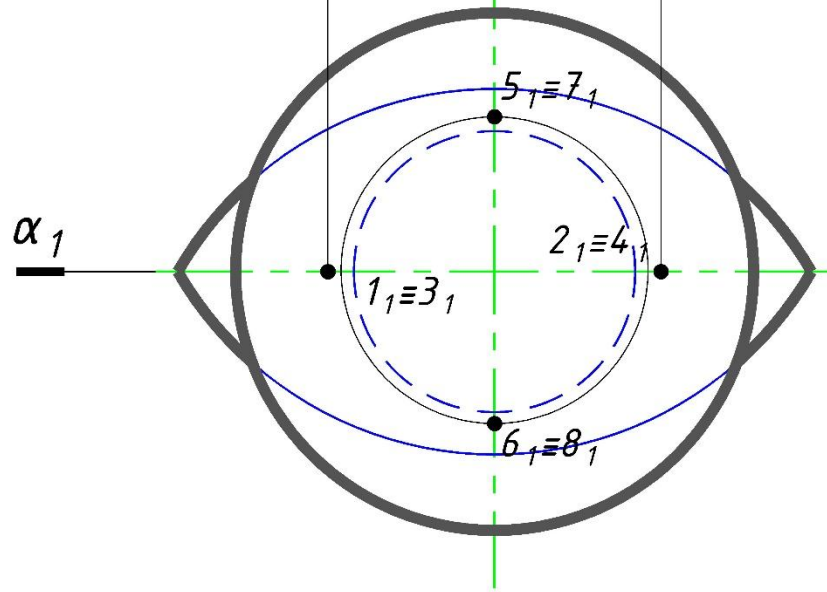
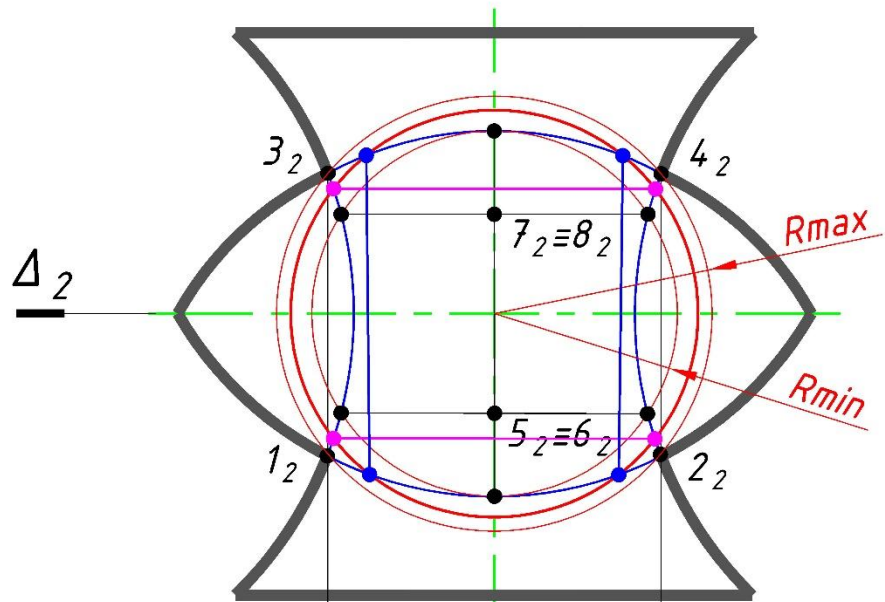


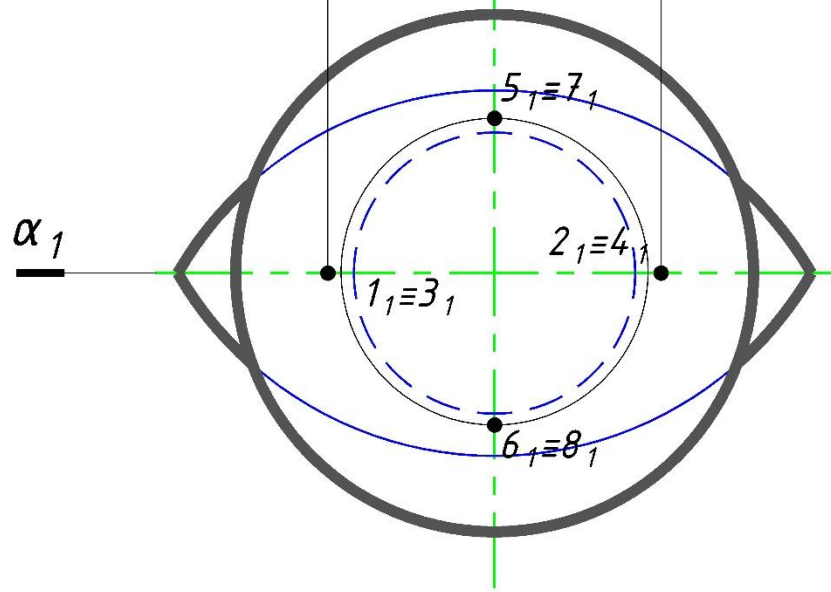
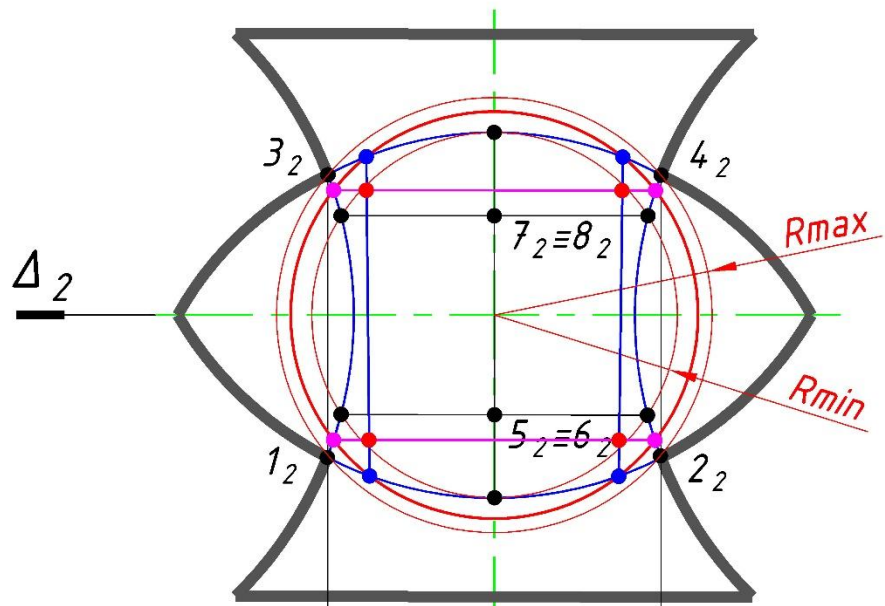


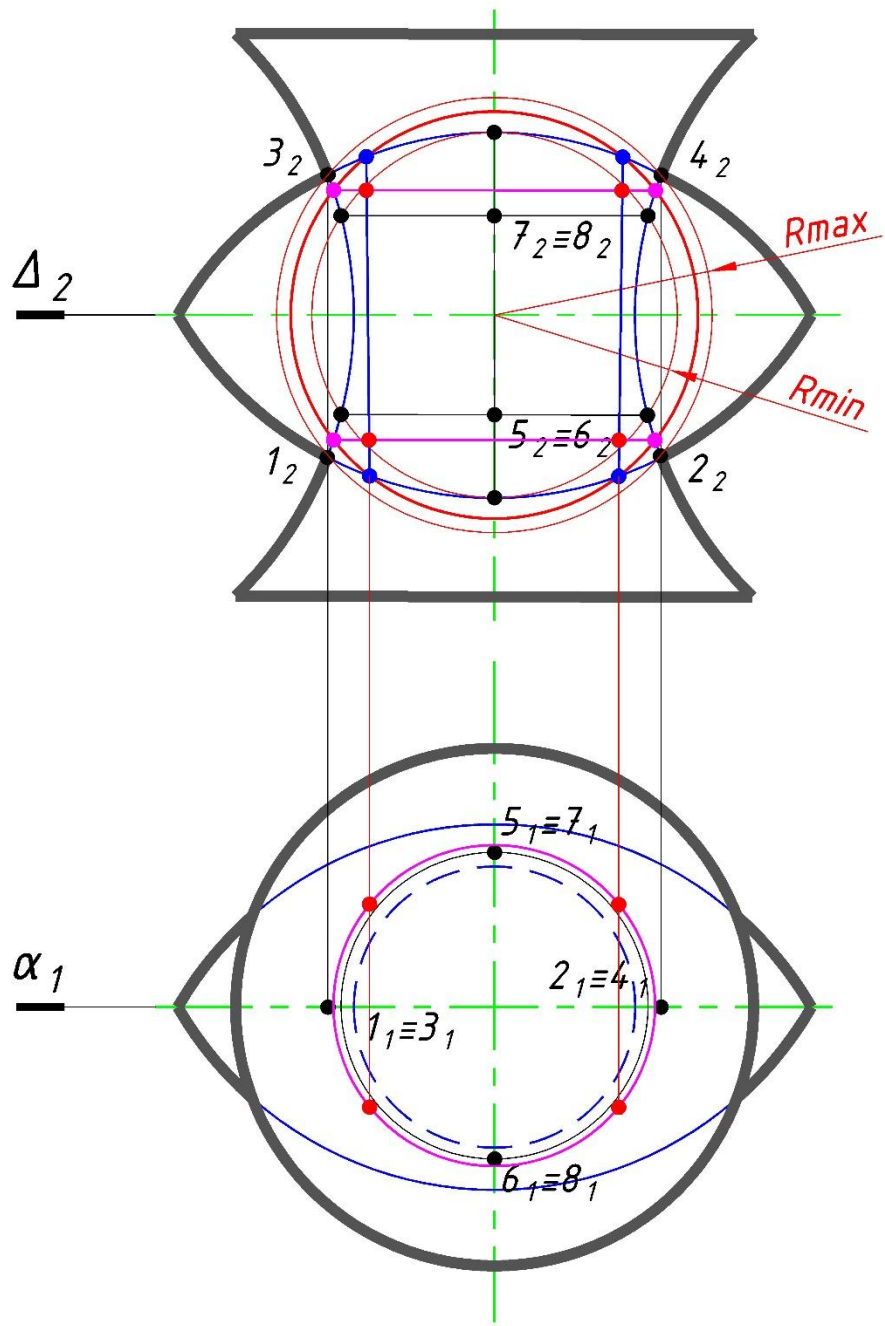


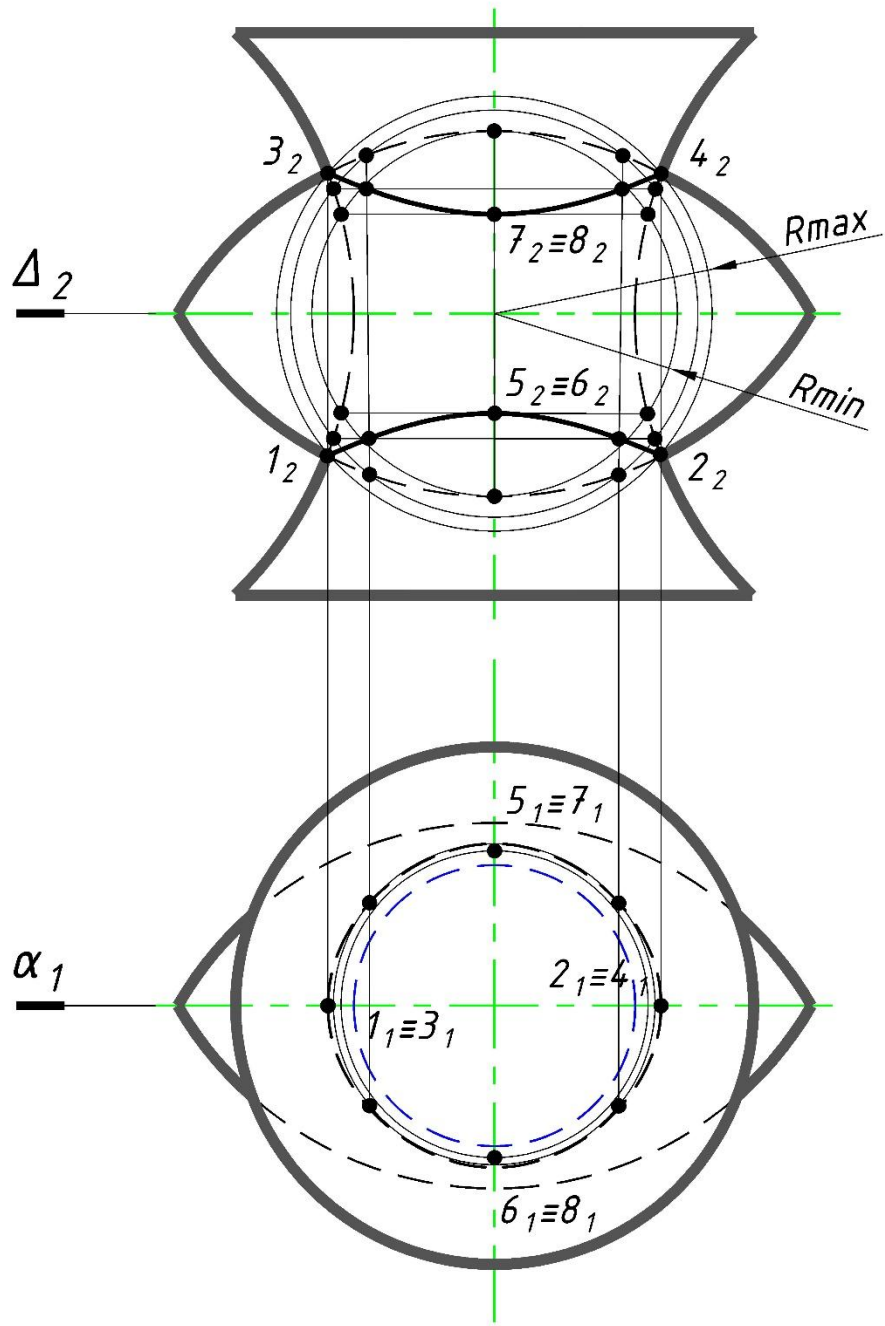




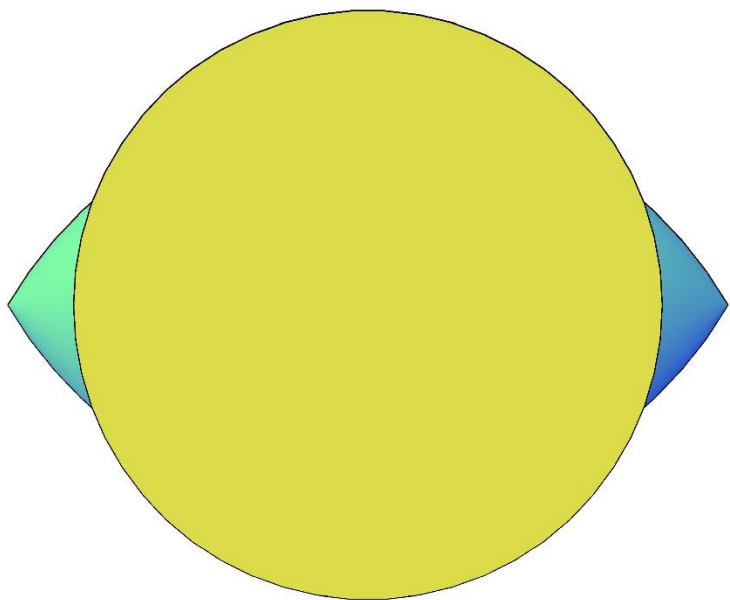
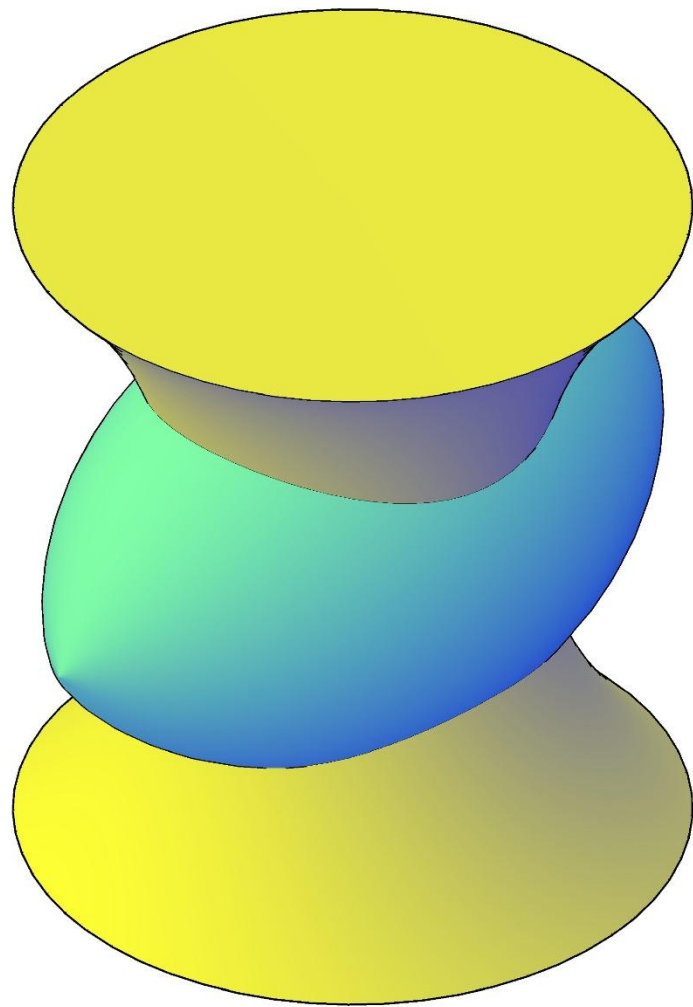
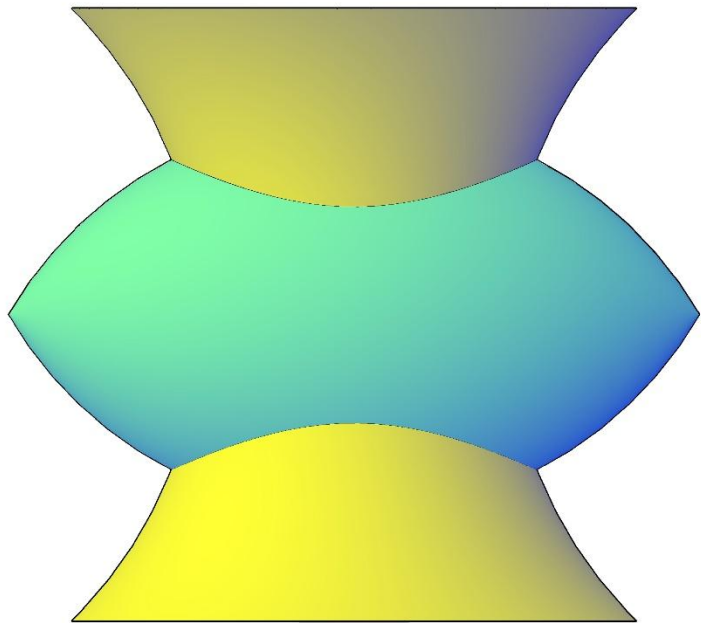


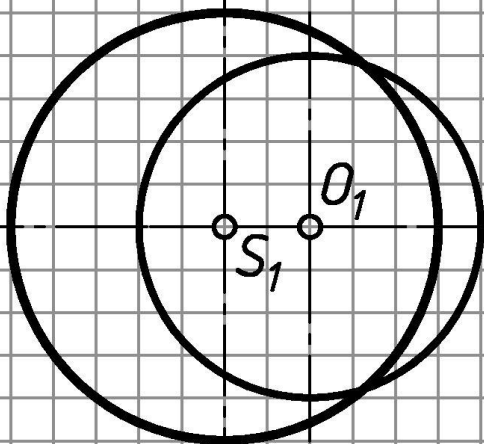
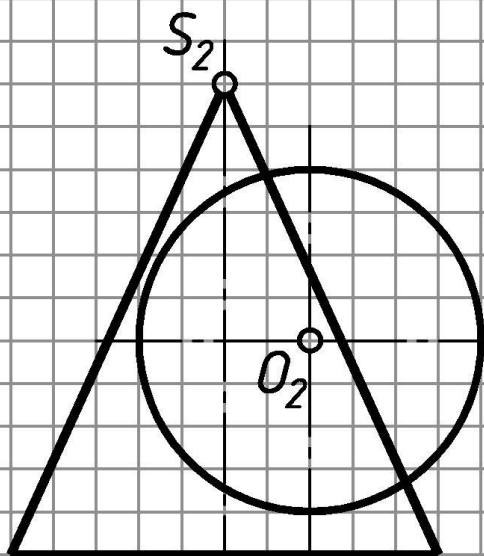


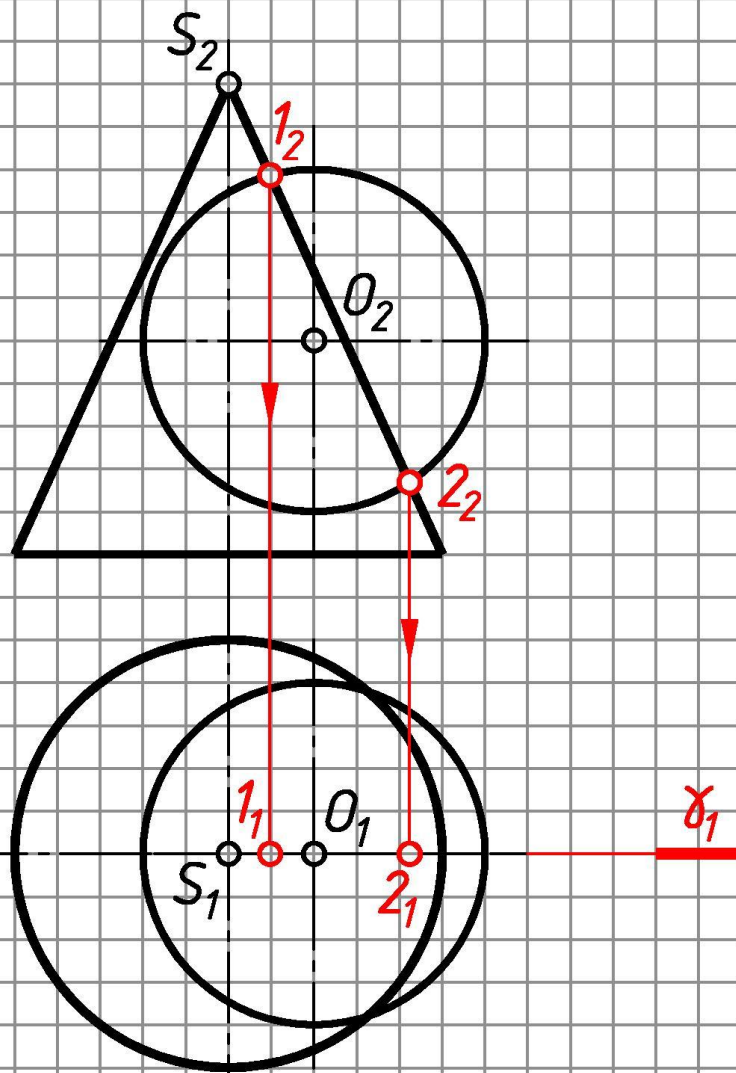


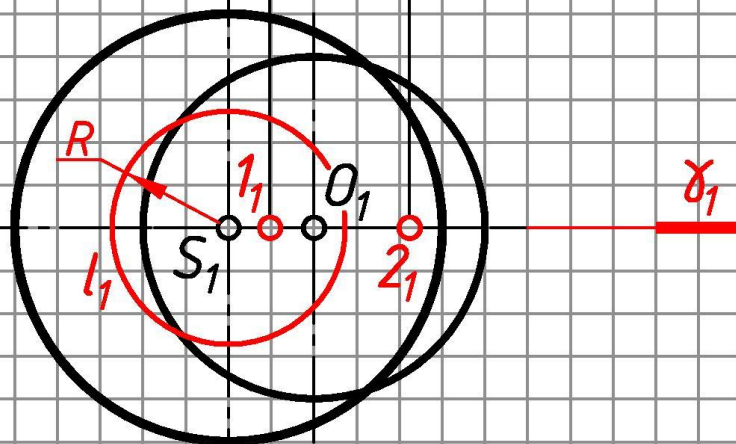
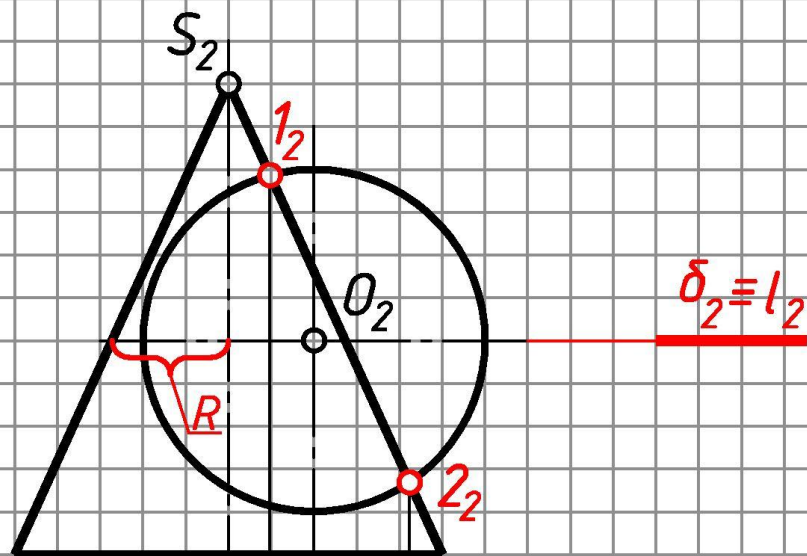


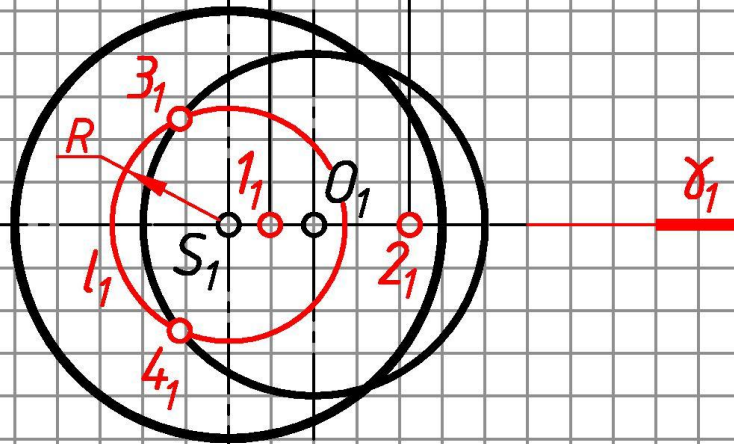
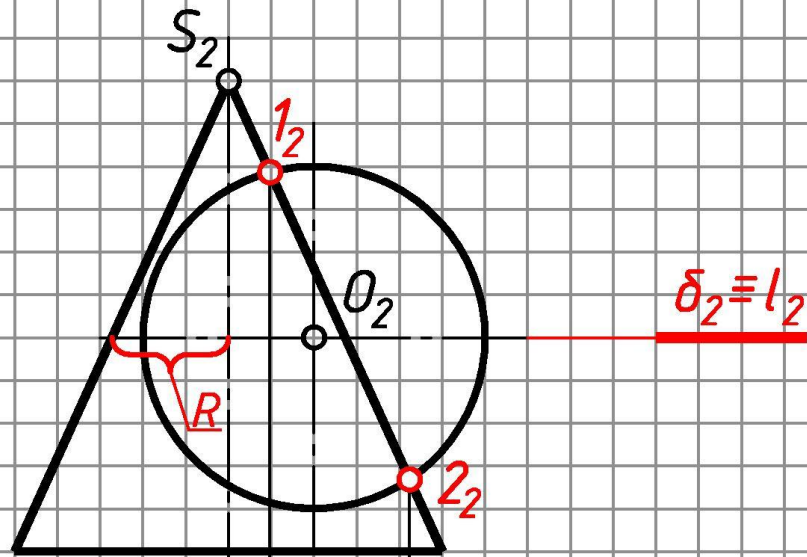


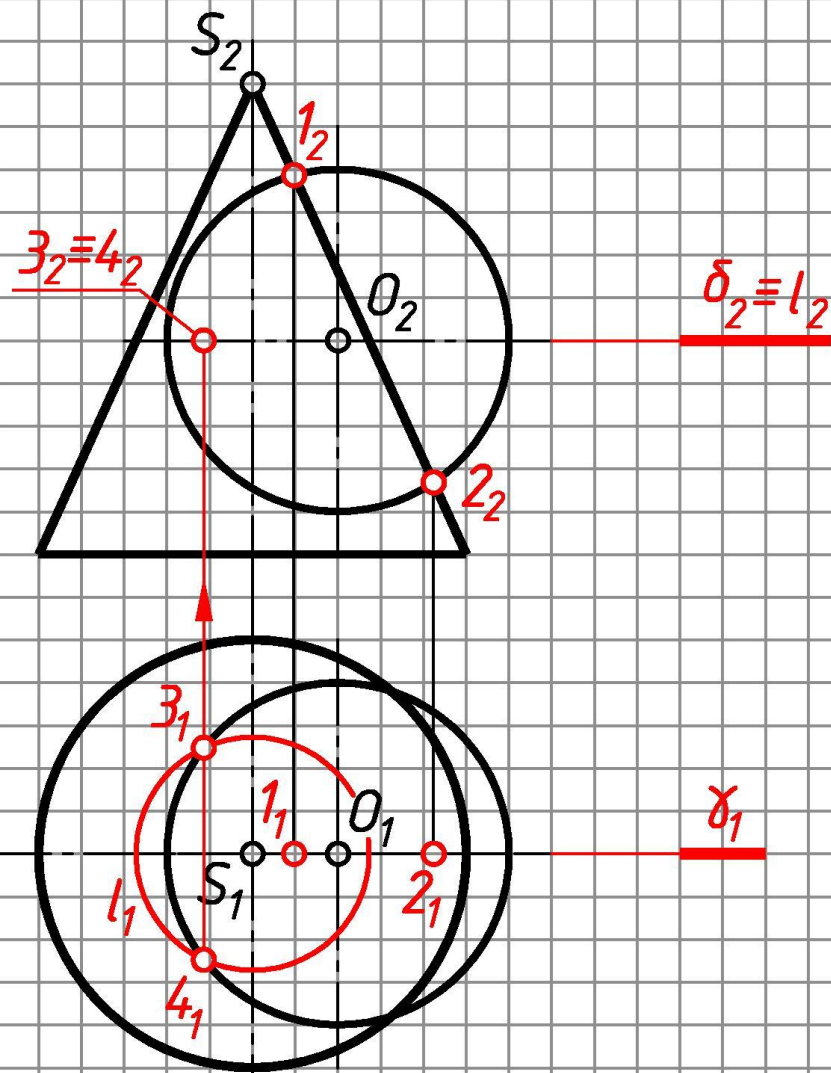


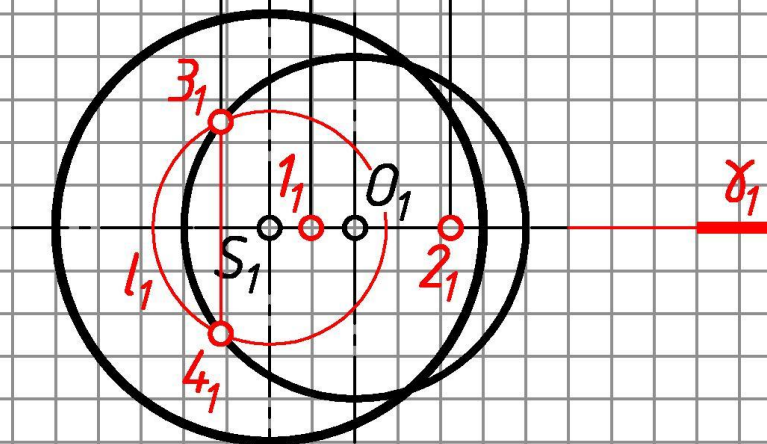
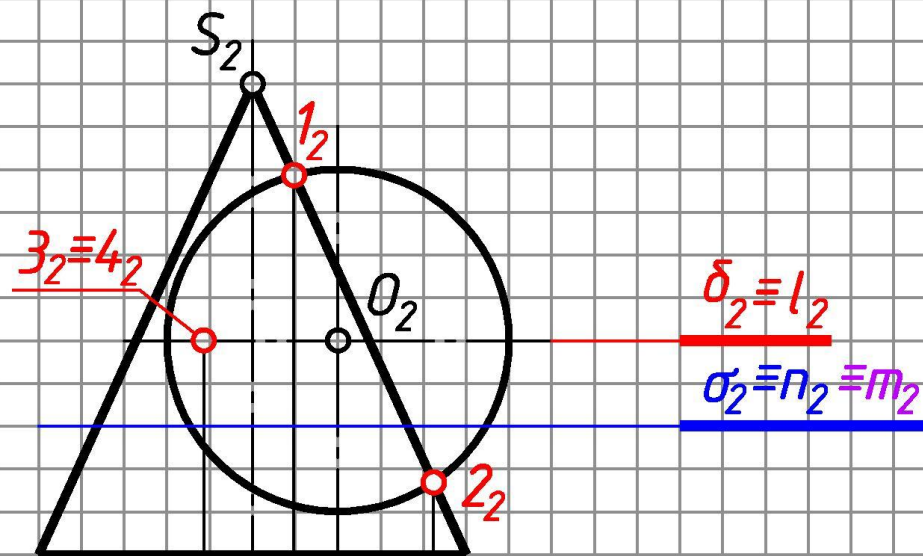


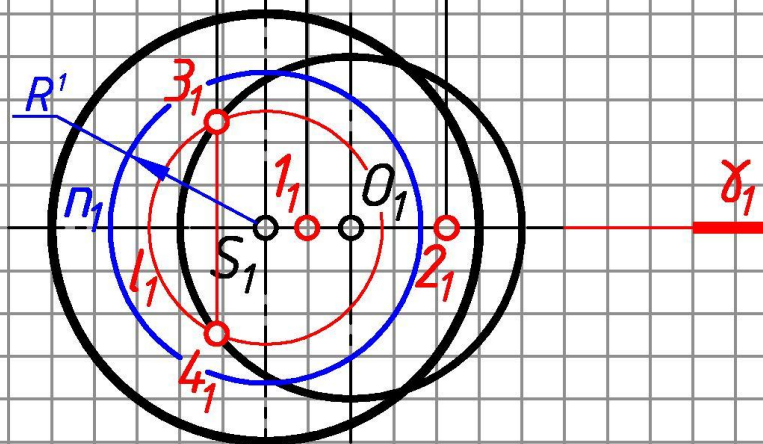
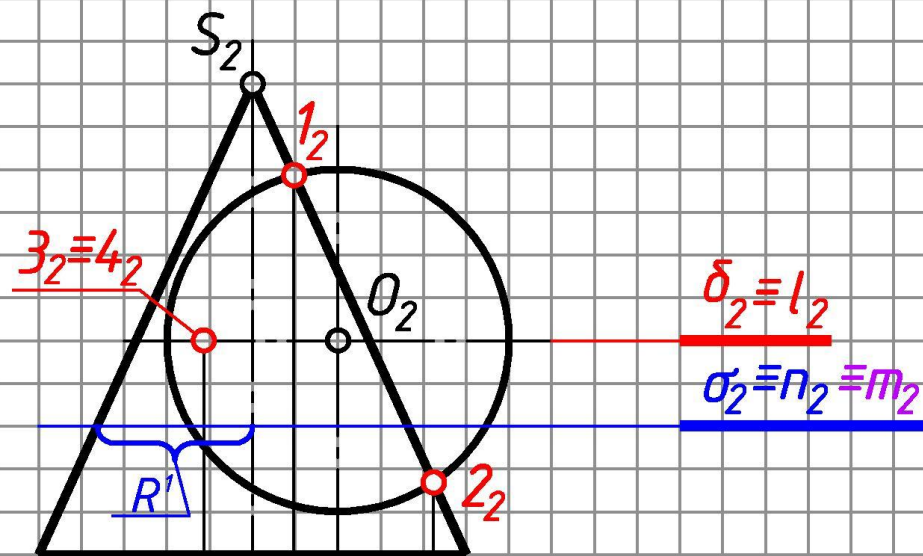




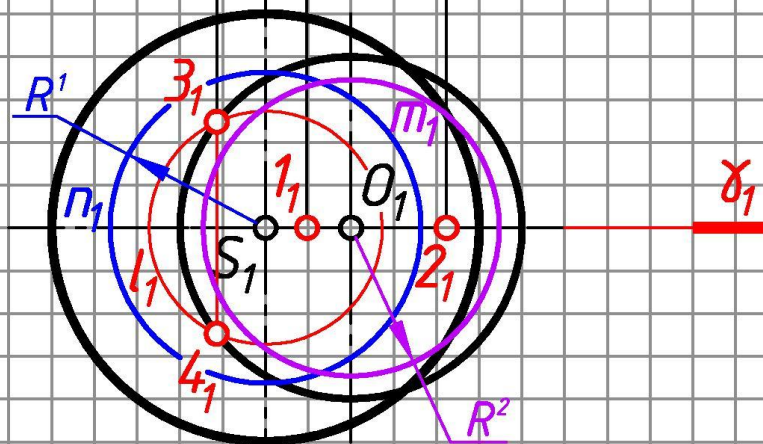
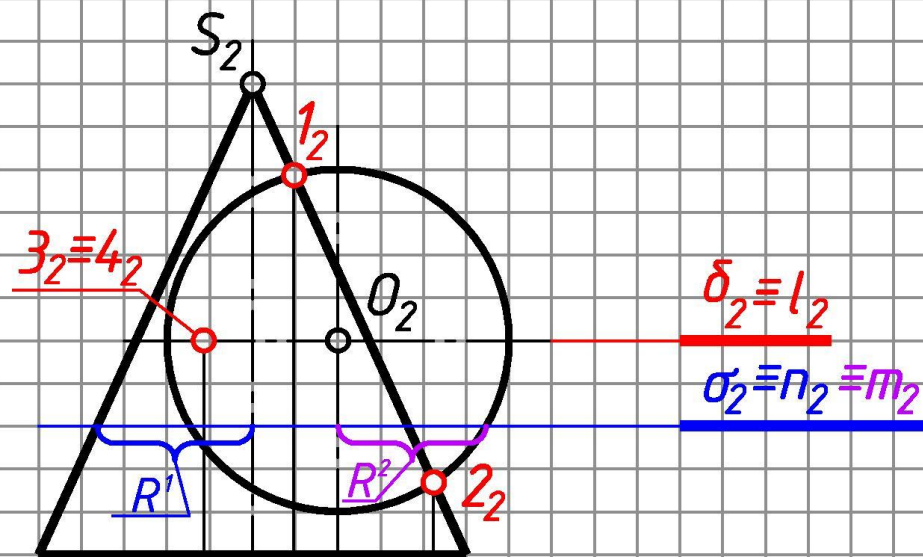


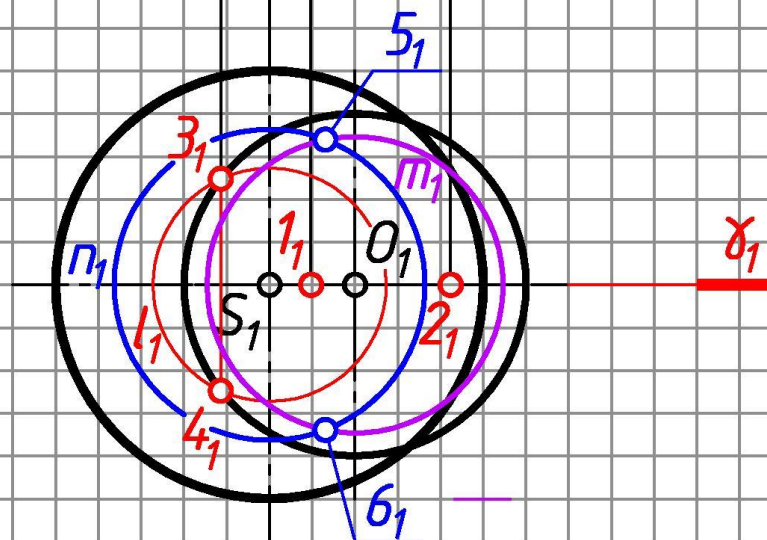
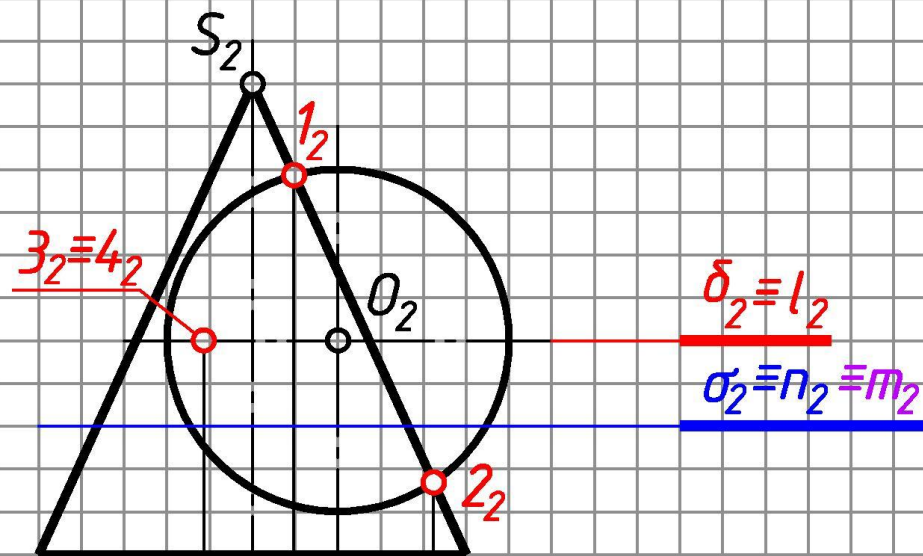


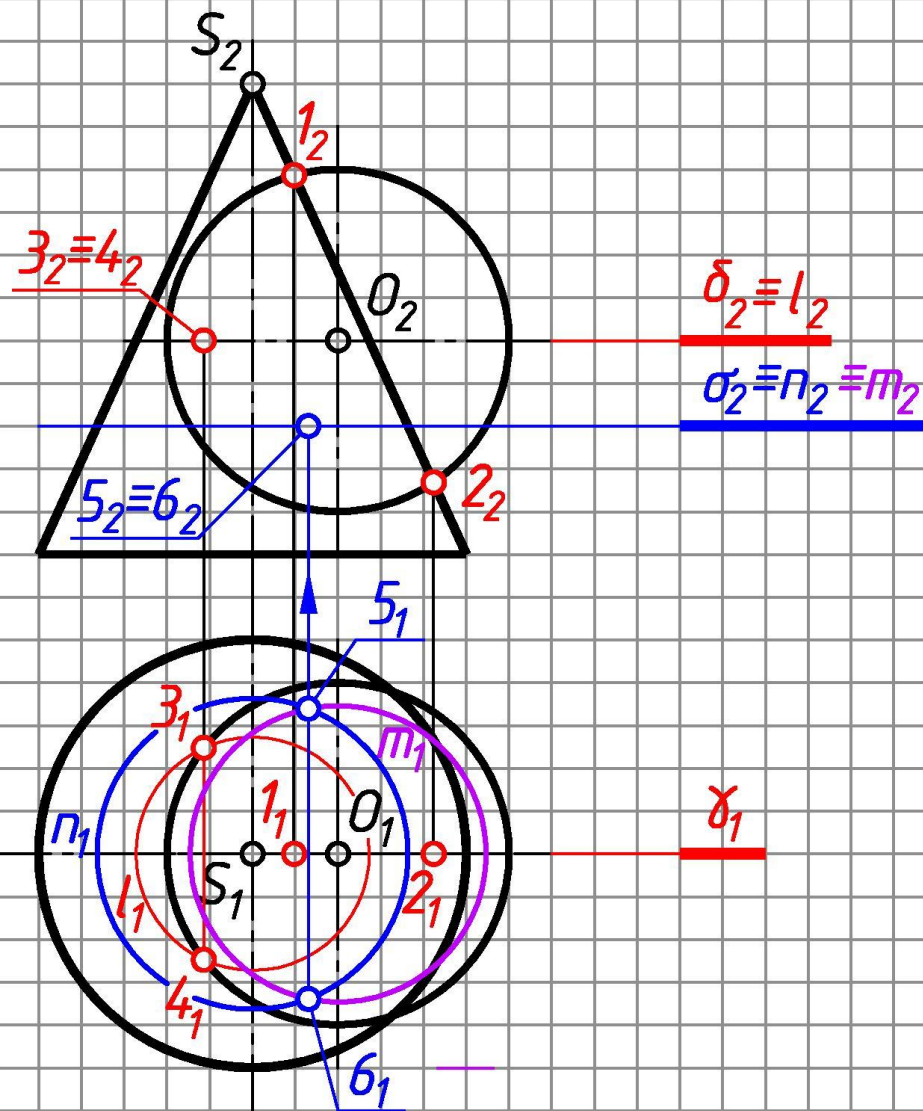


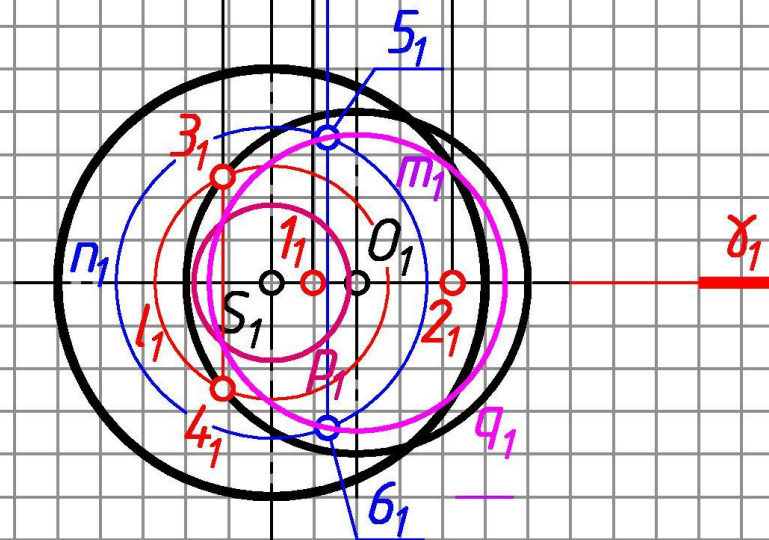
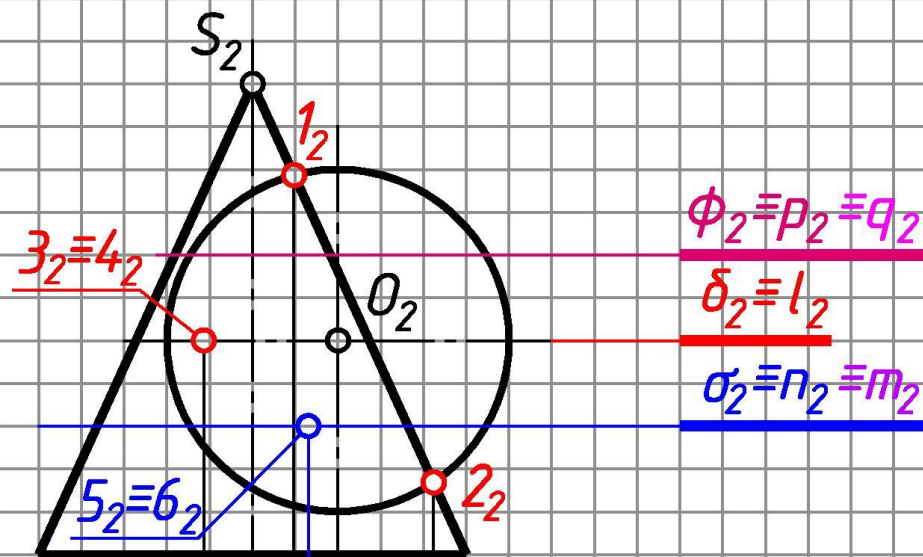


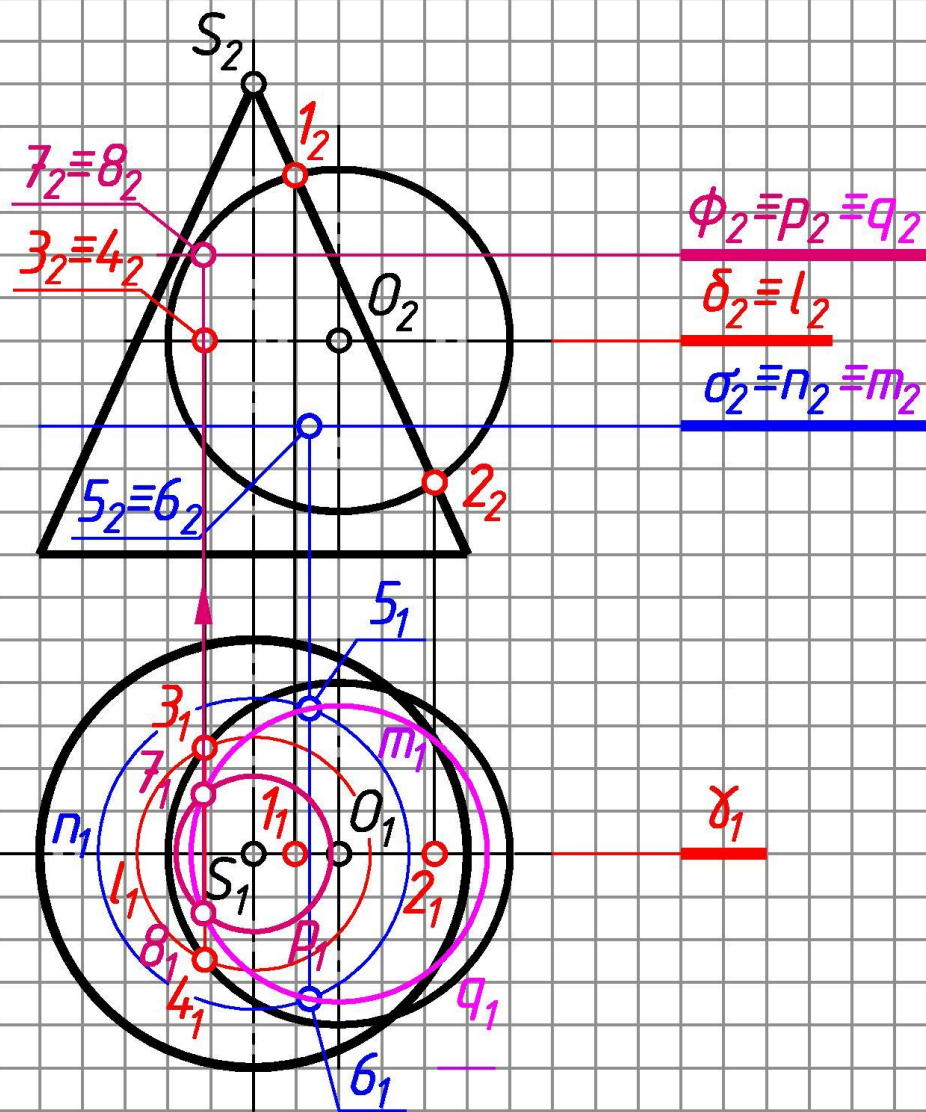


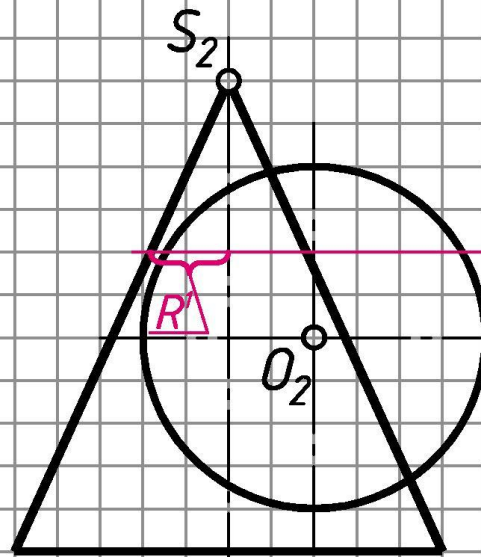




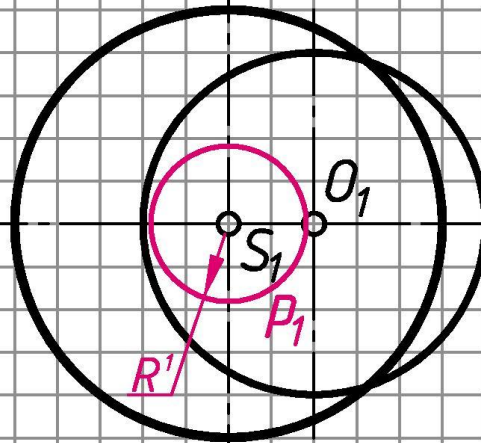


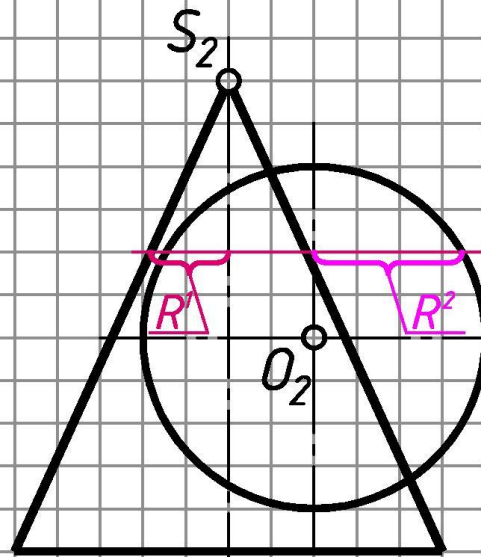




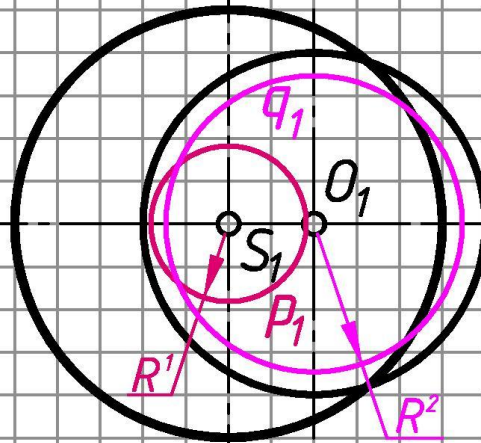


$$\phi_2 \equiv p_2 \equiv q_2$$

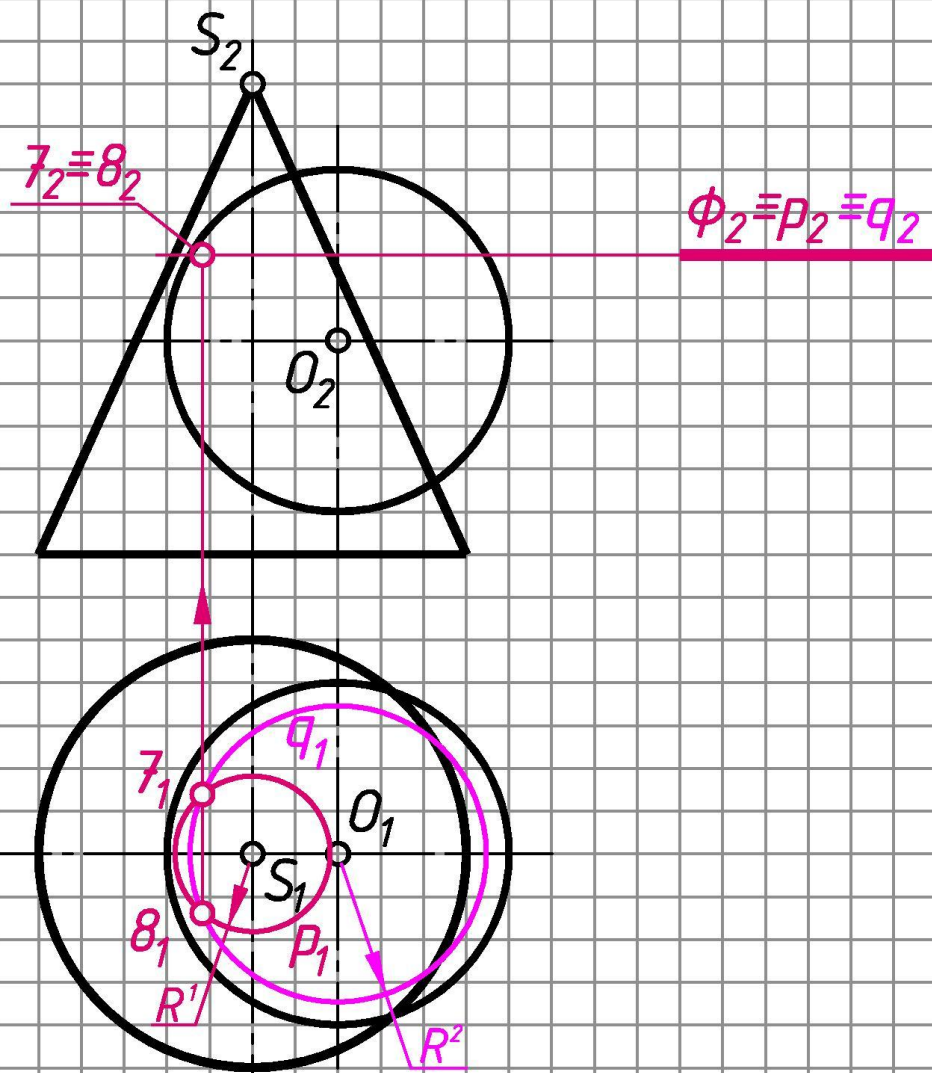




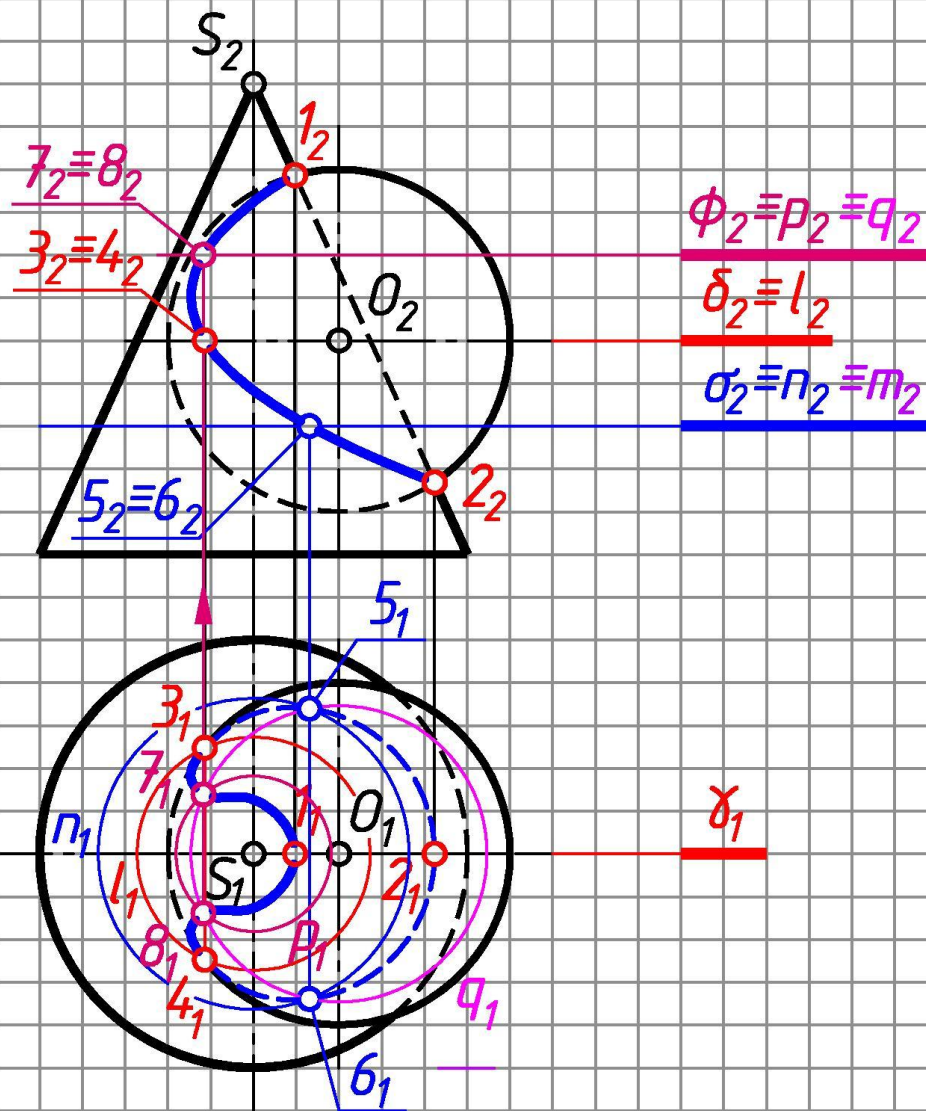
$$\phi_2 \equiv p_2 \equiv q_2$$

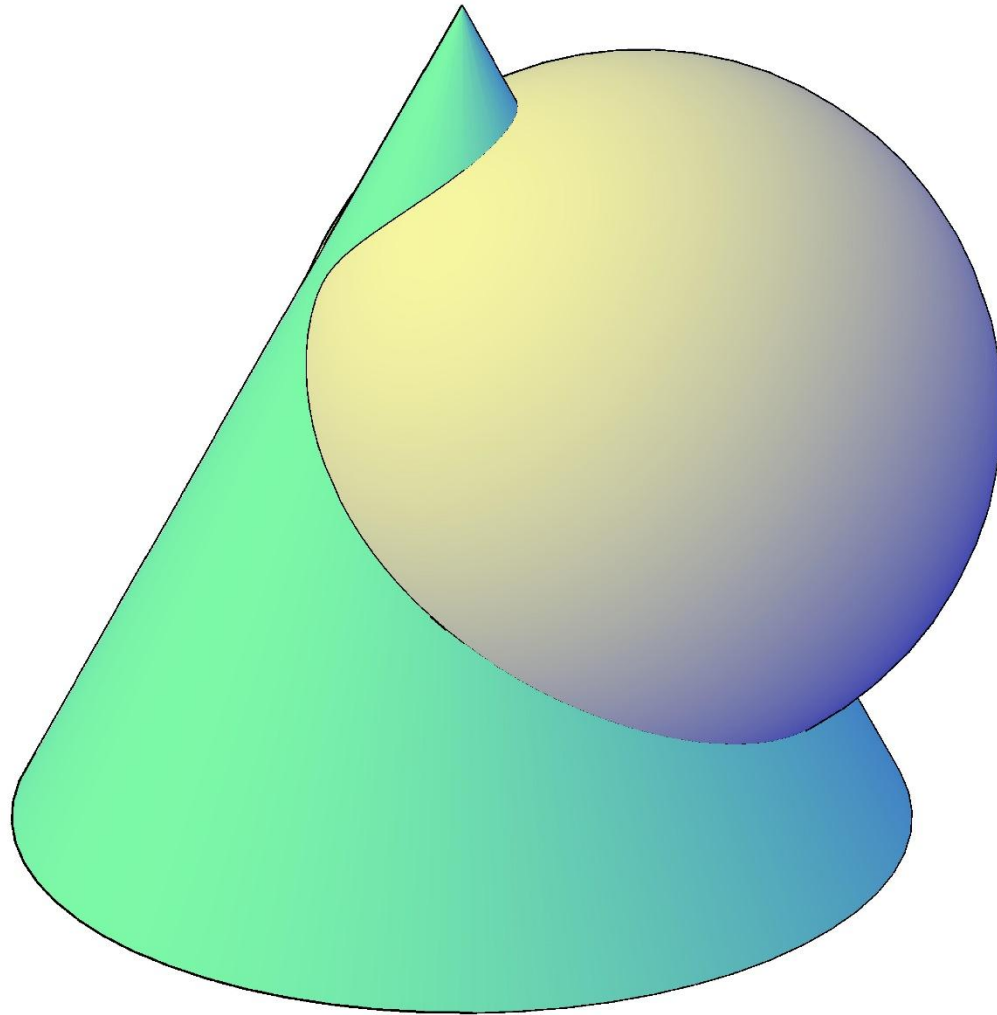


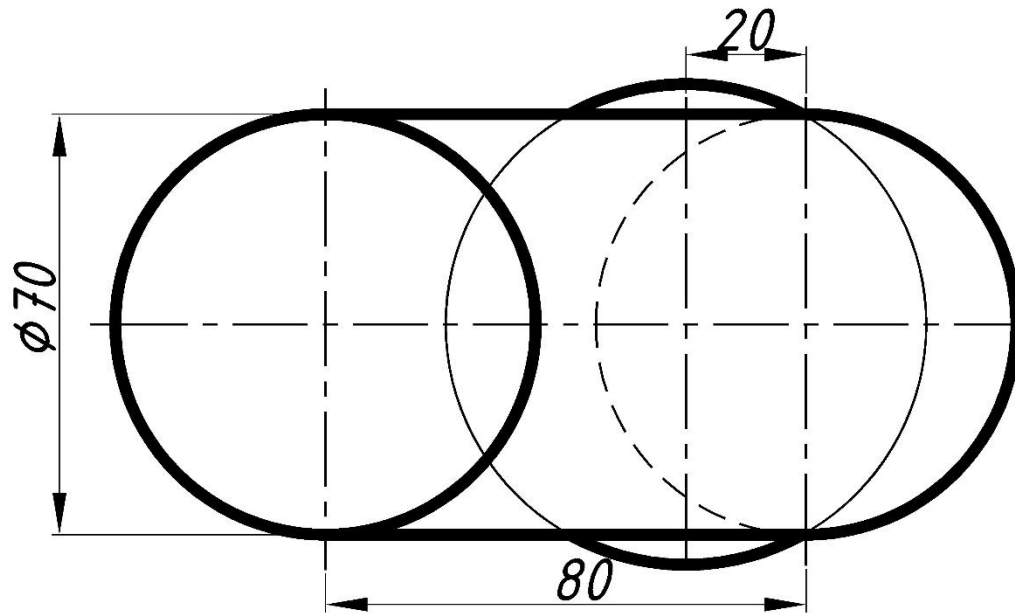
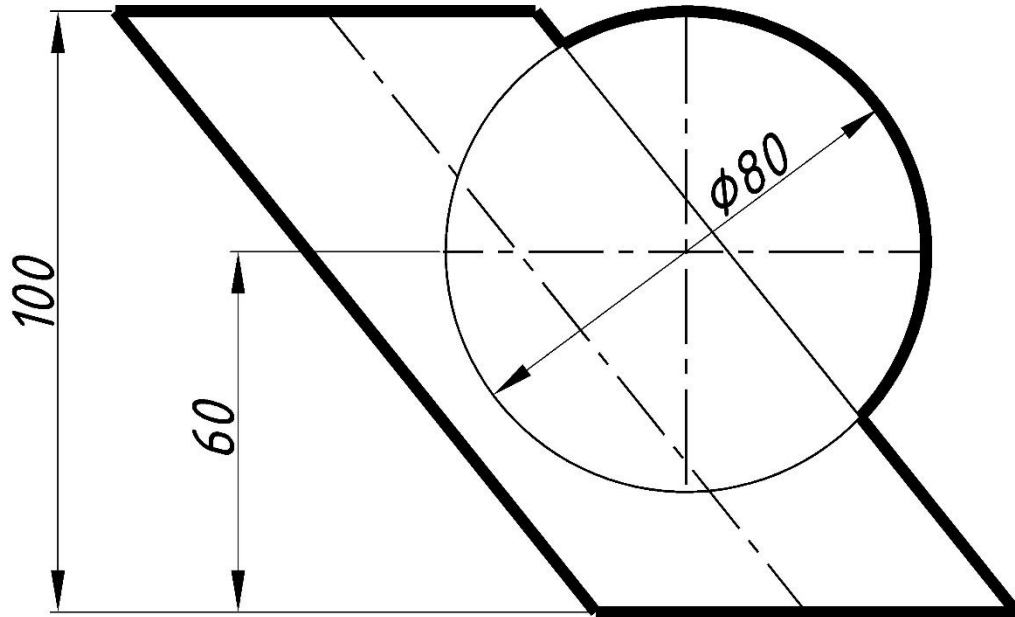


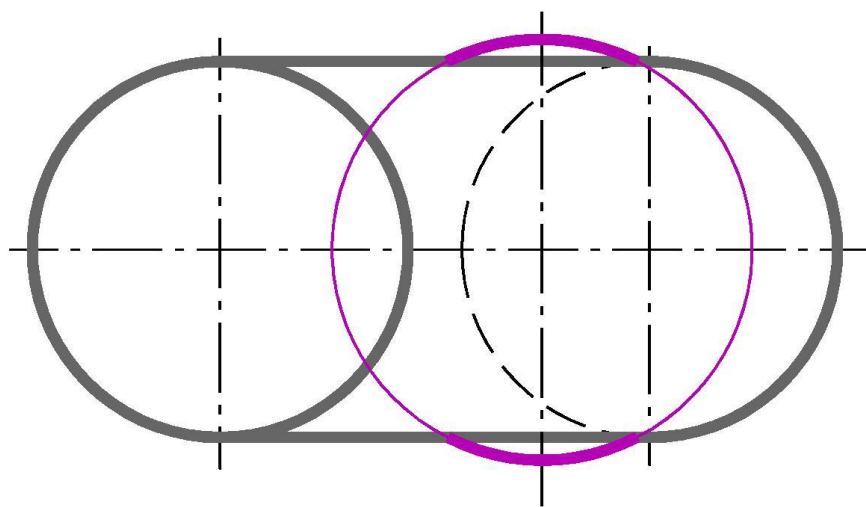
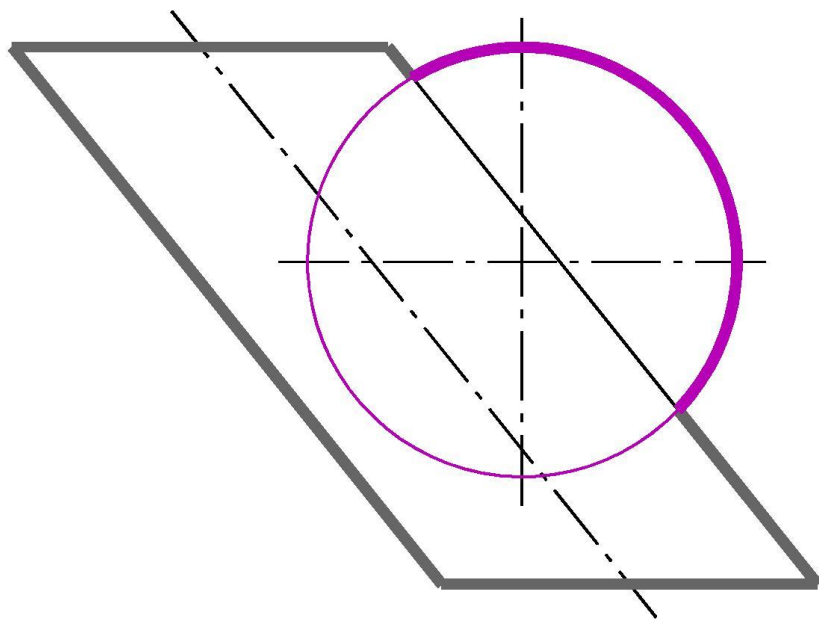


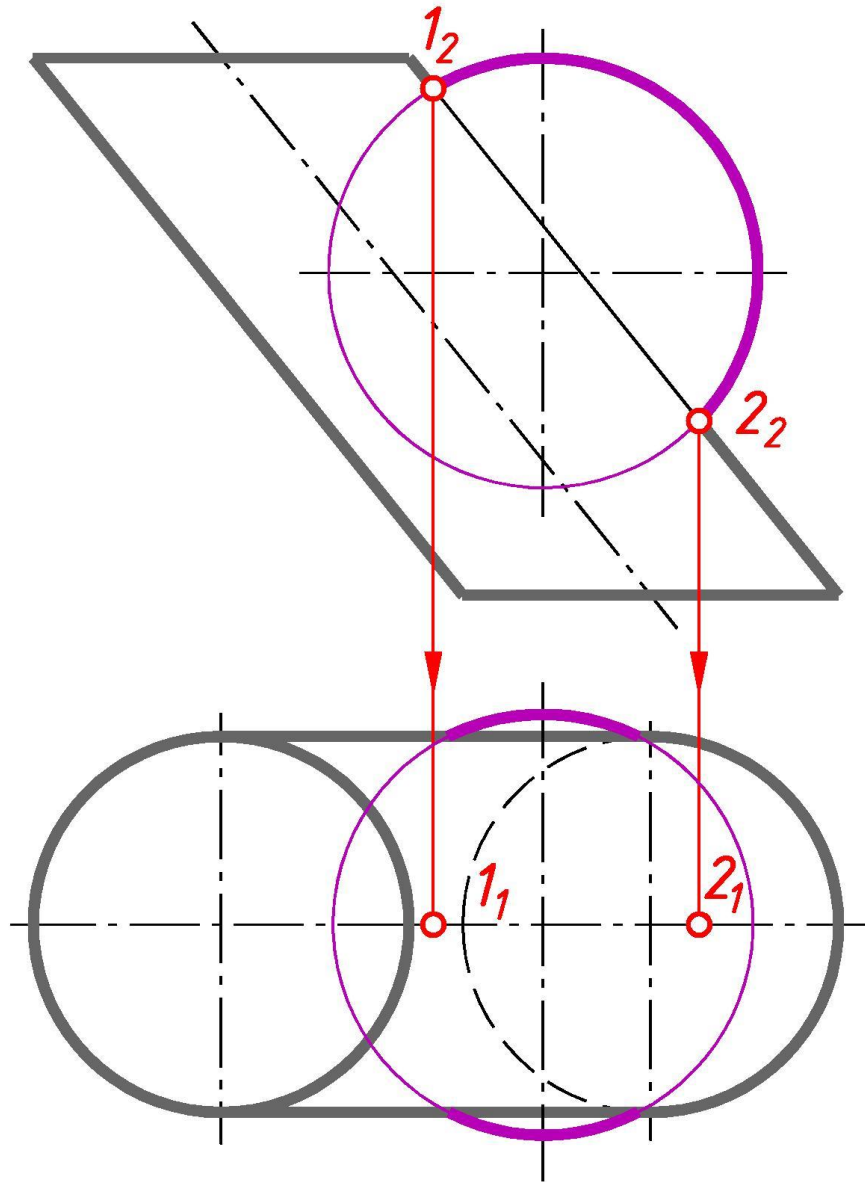


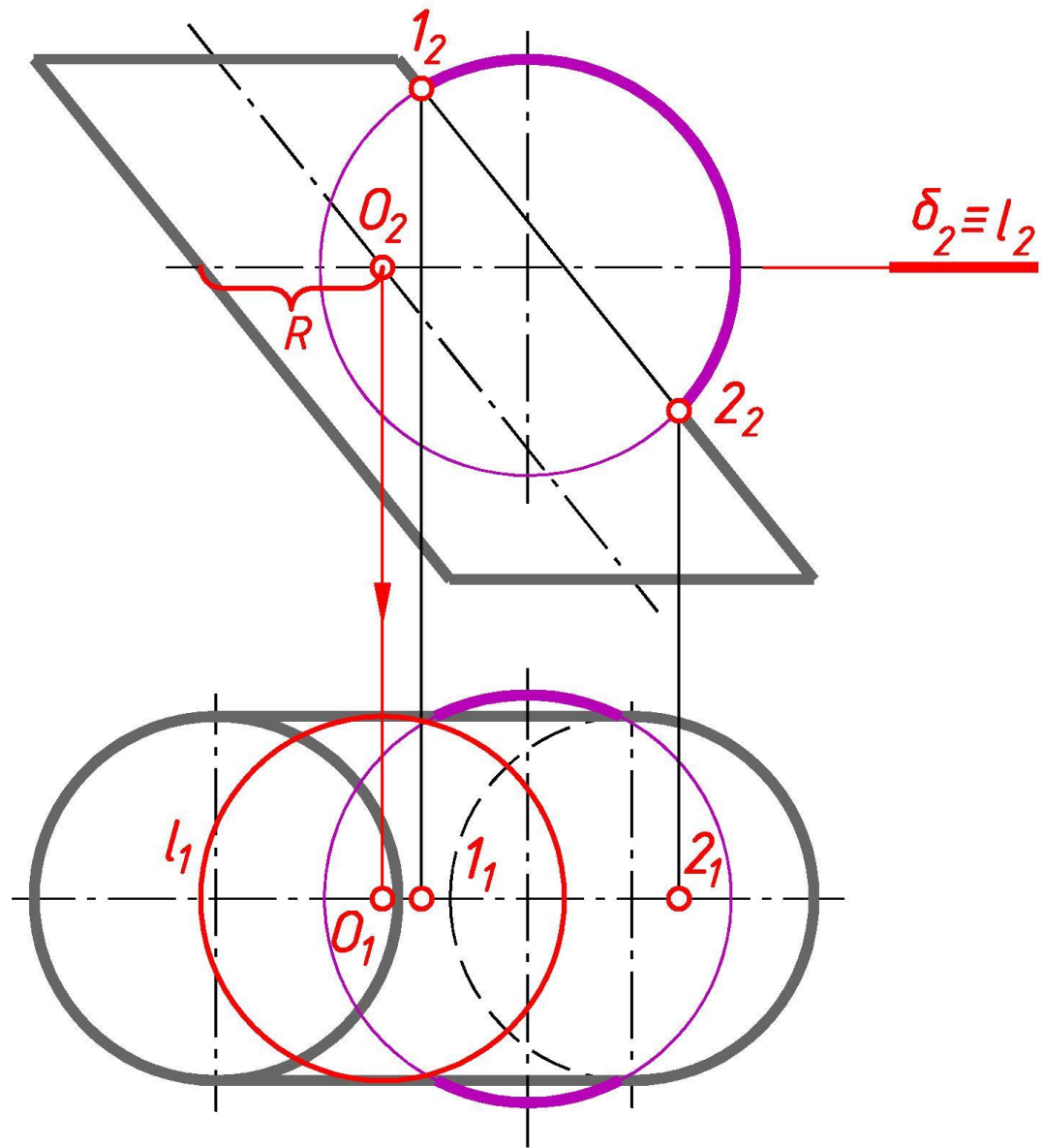


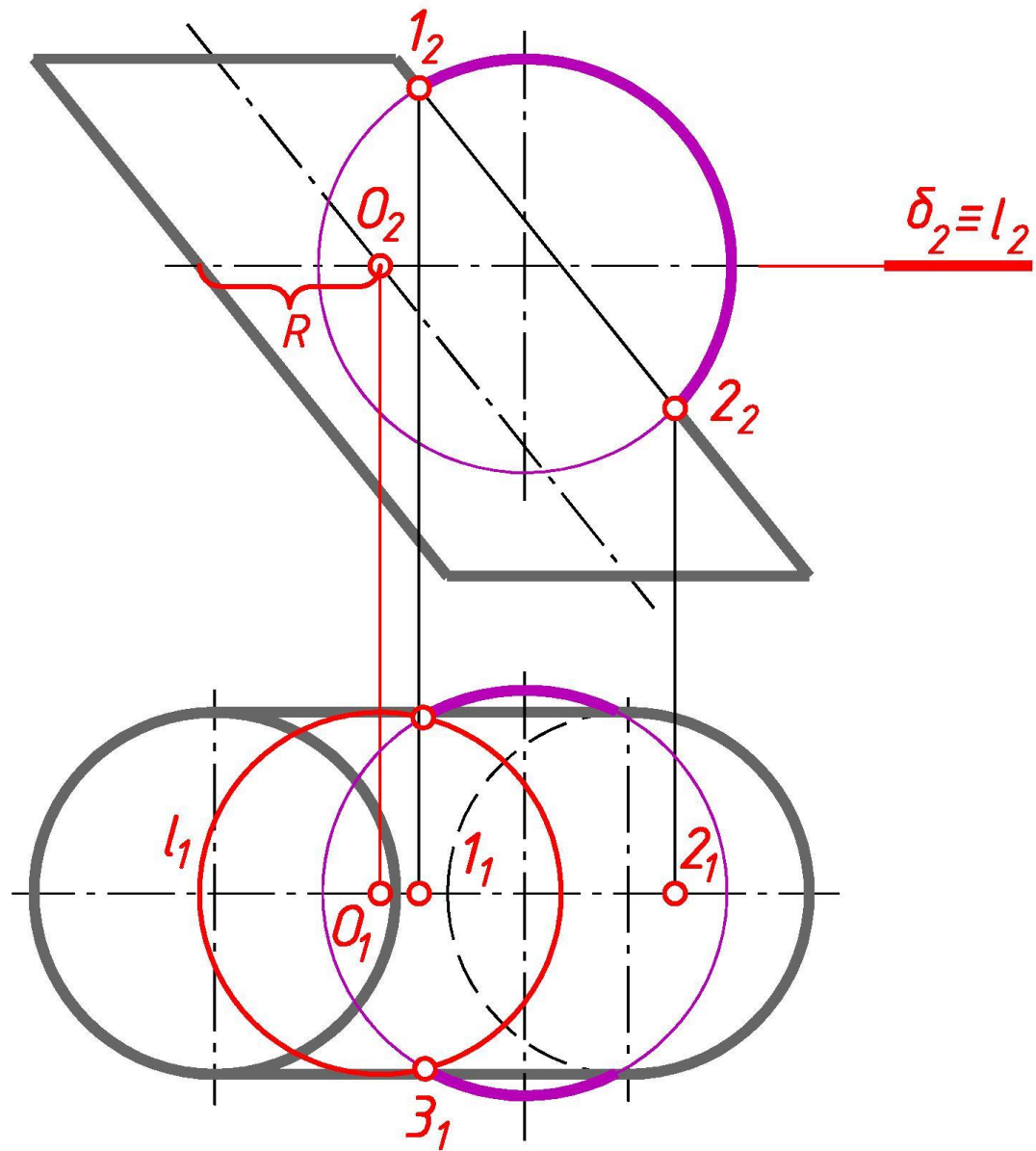


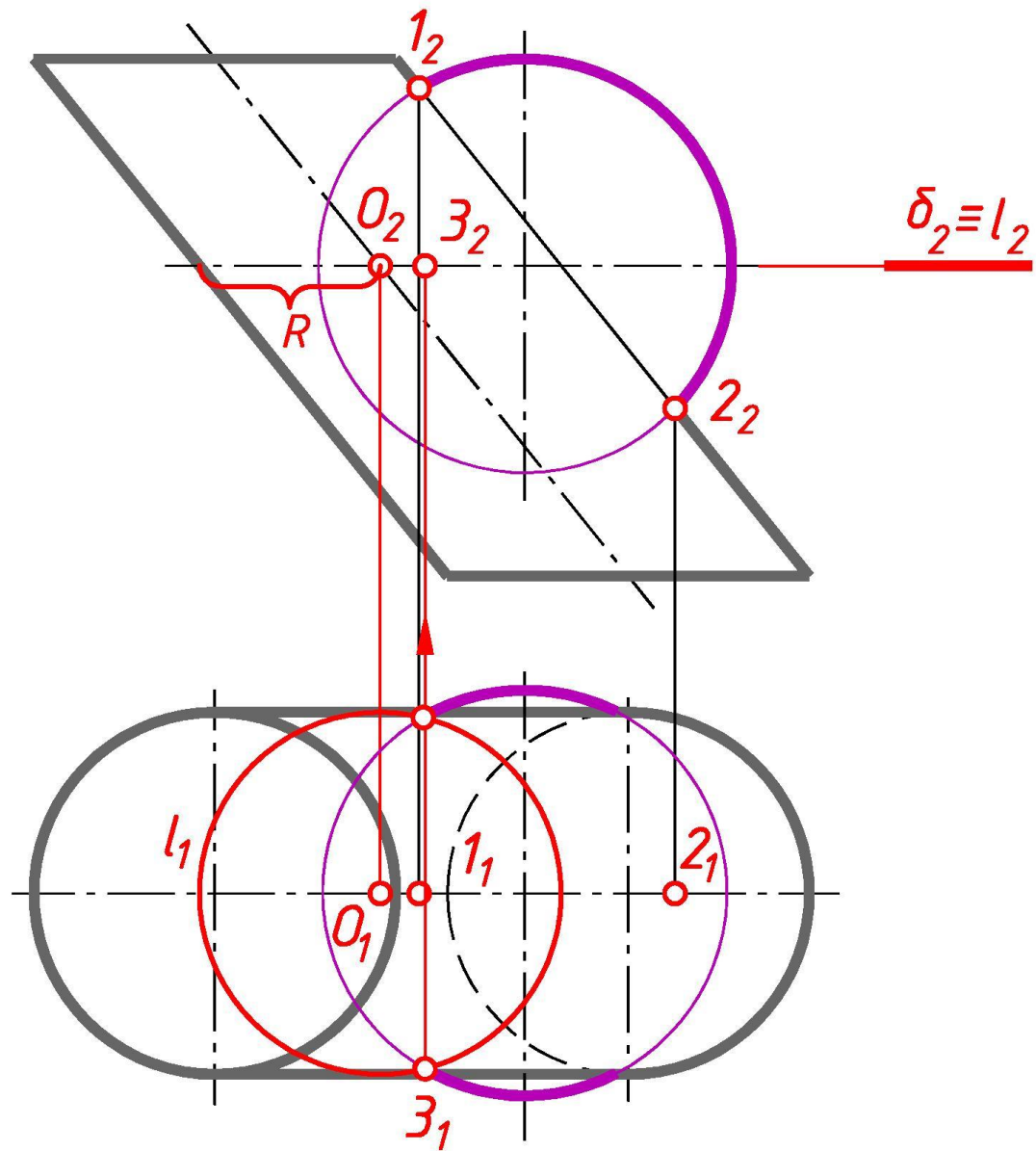




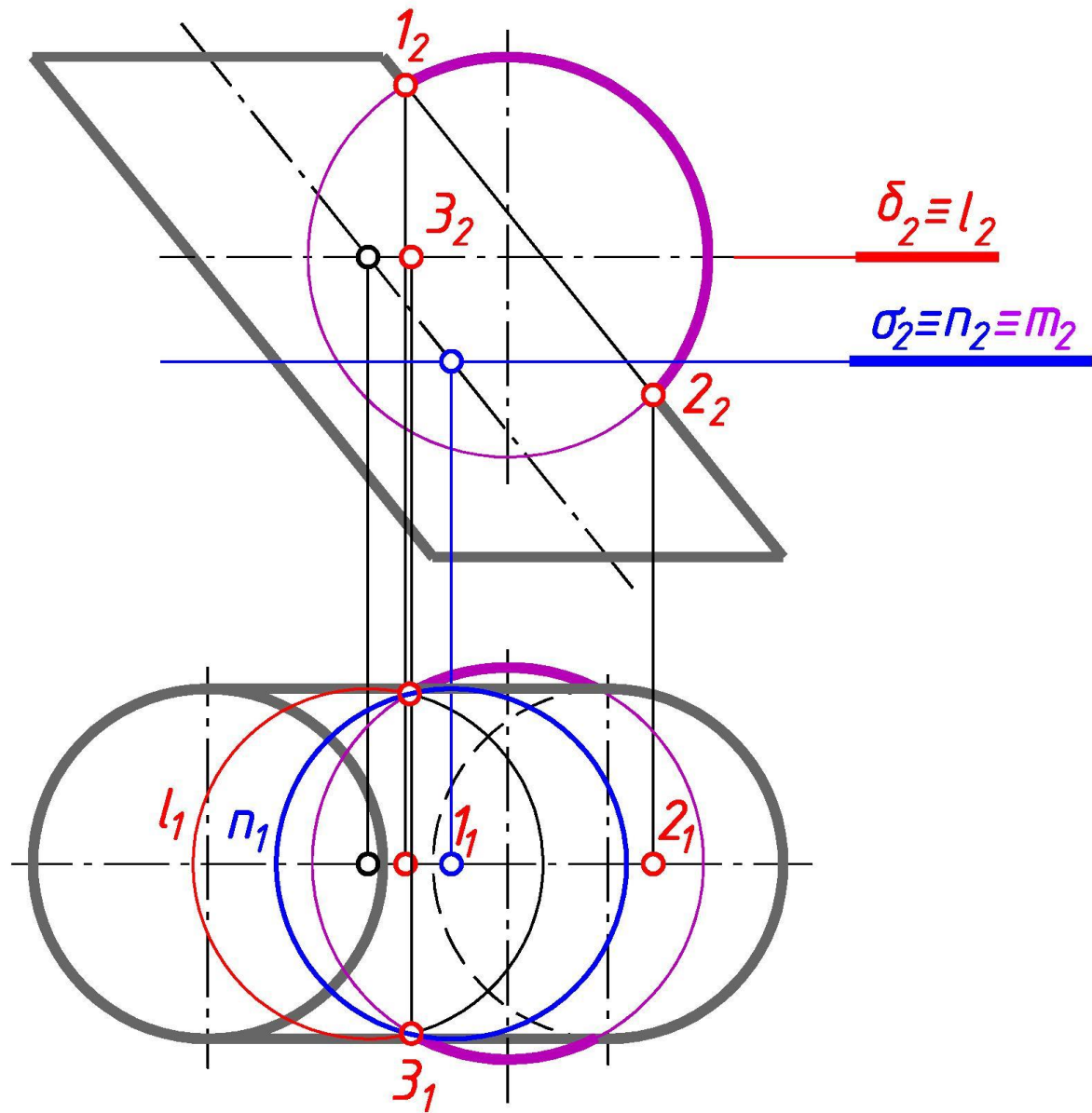


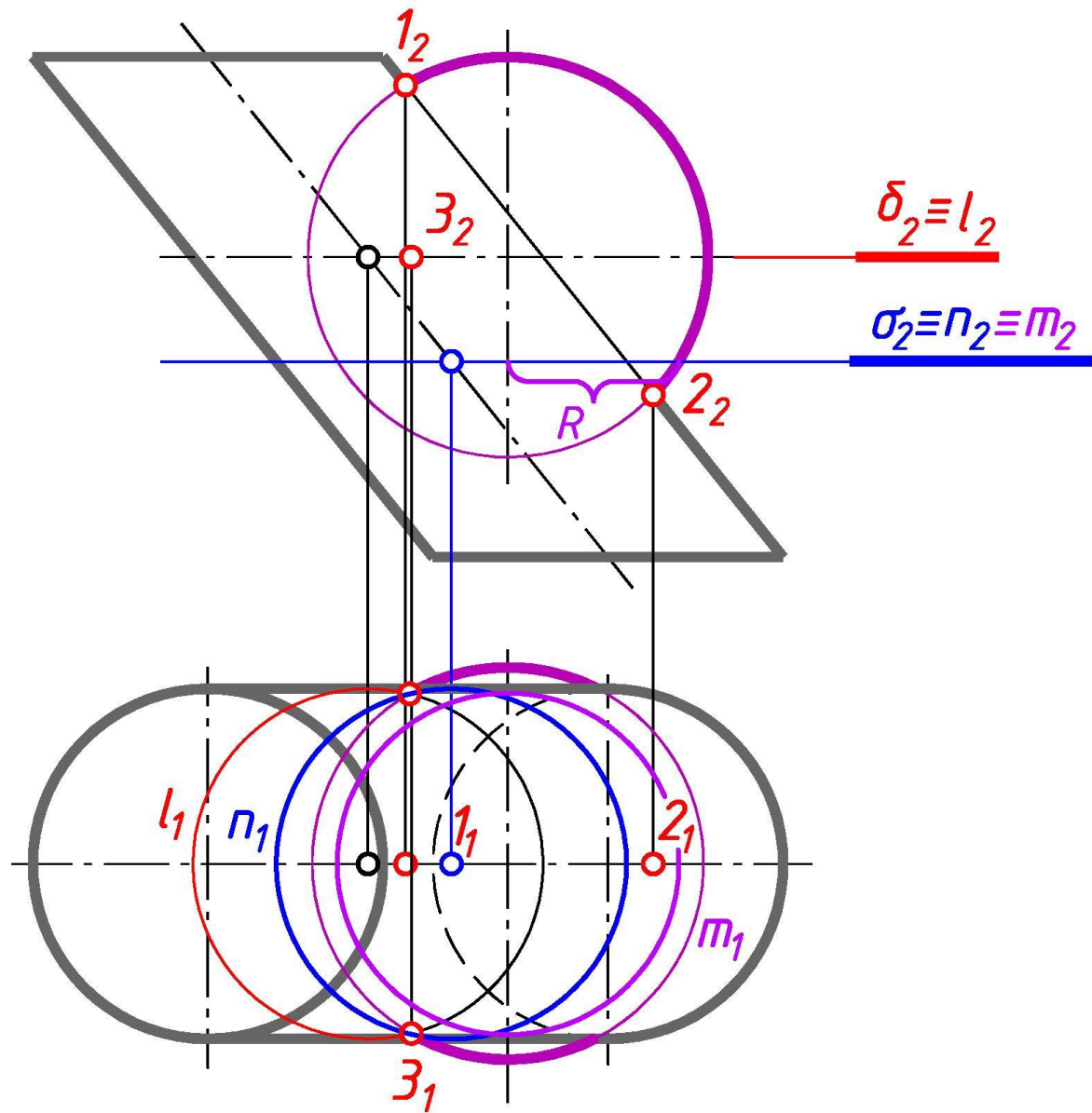


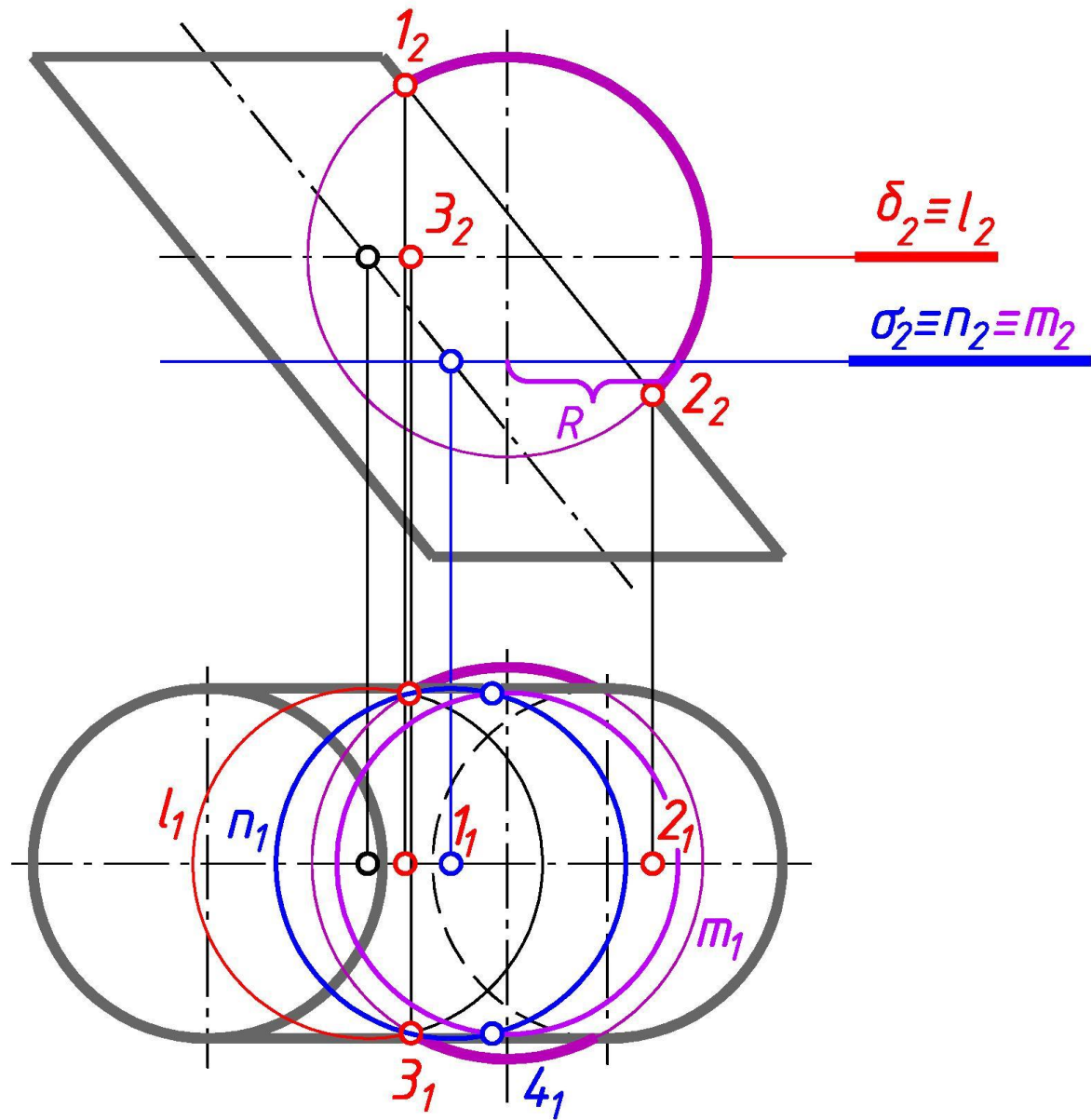


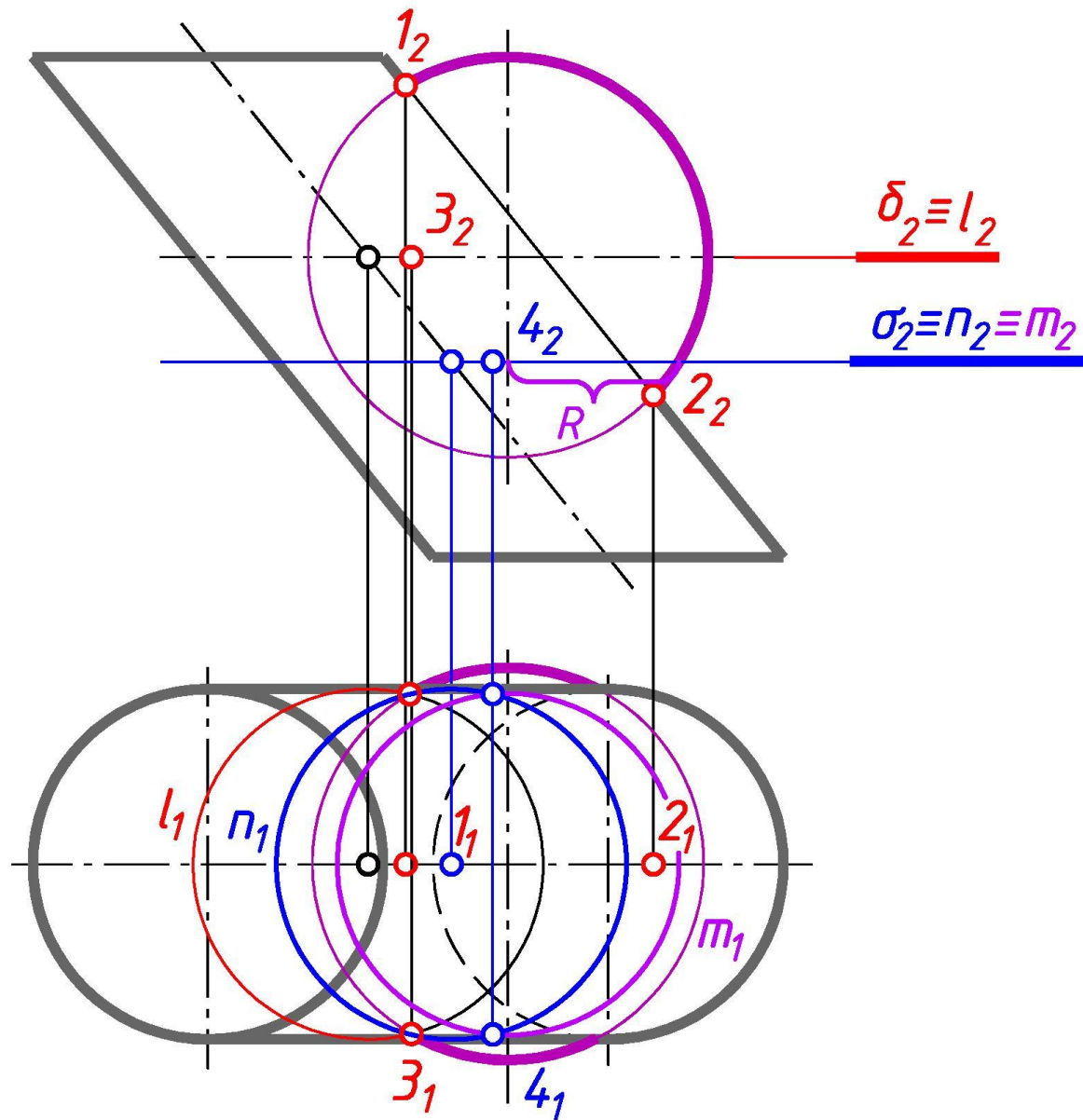


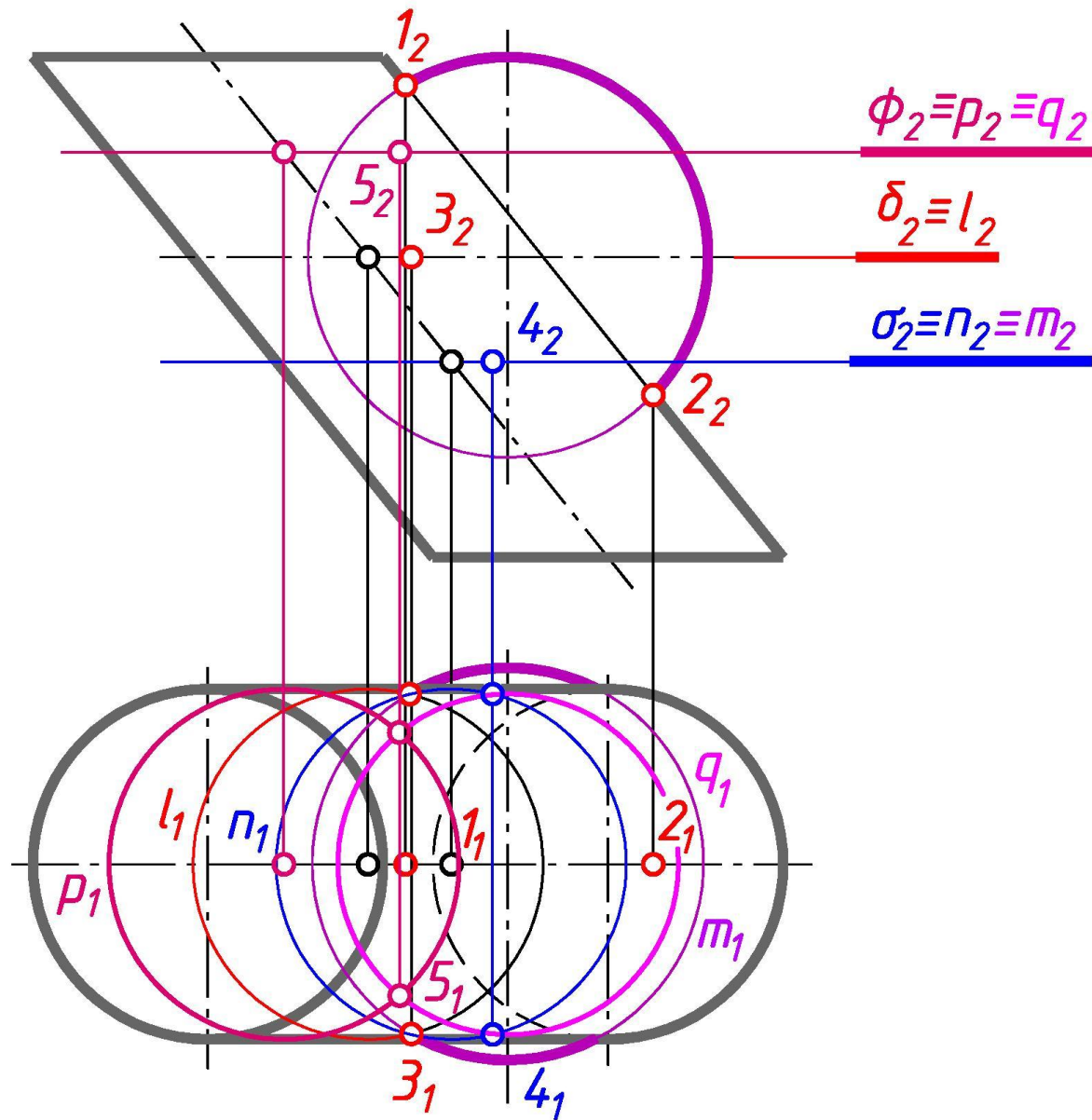


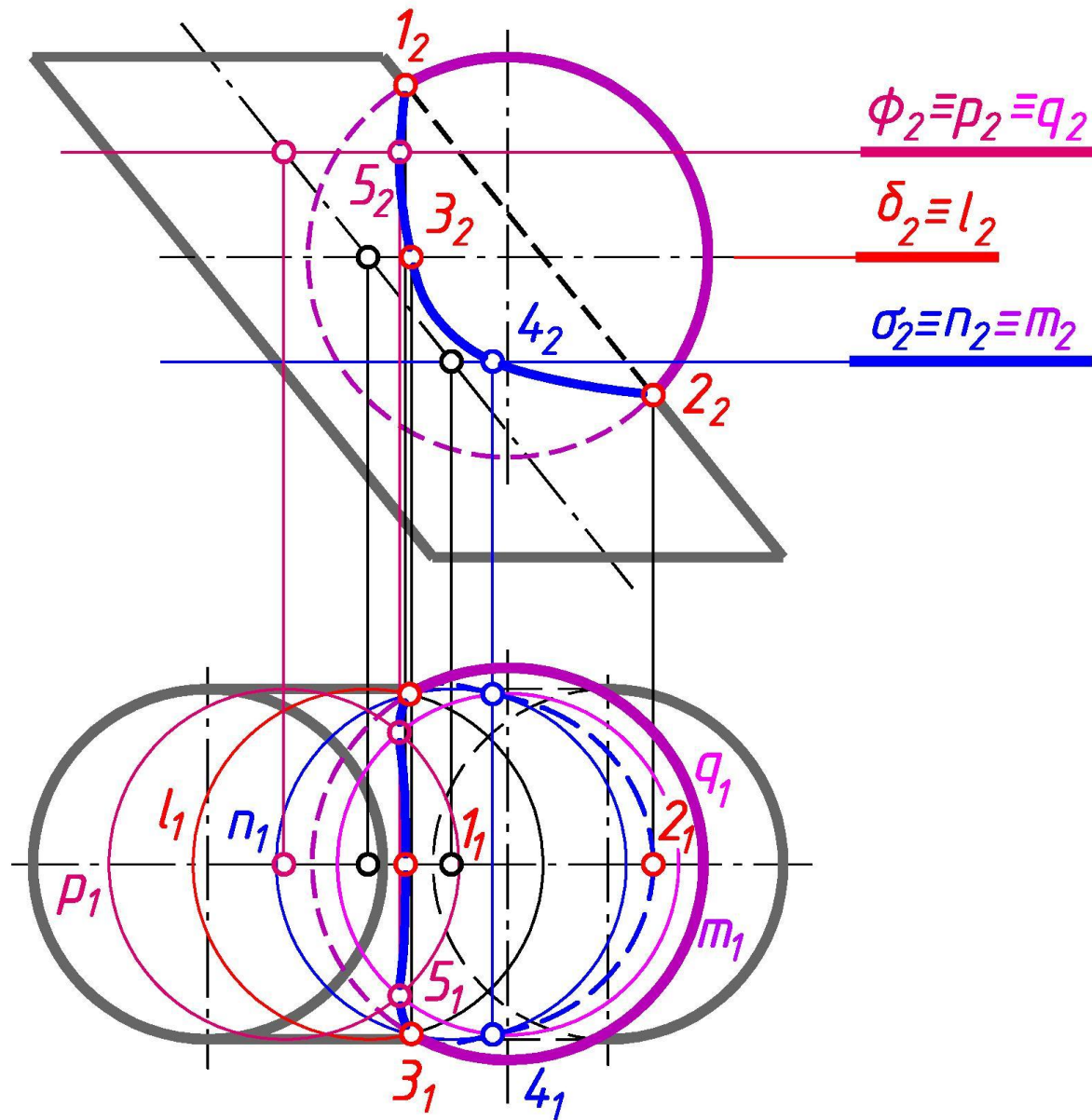


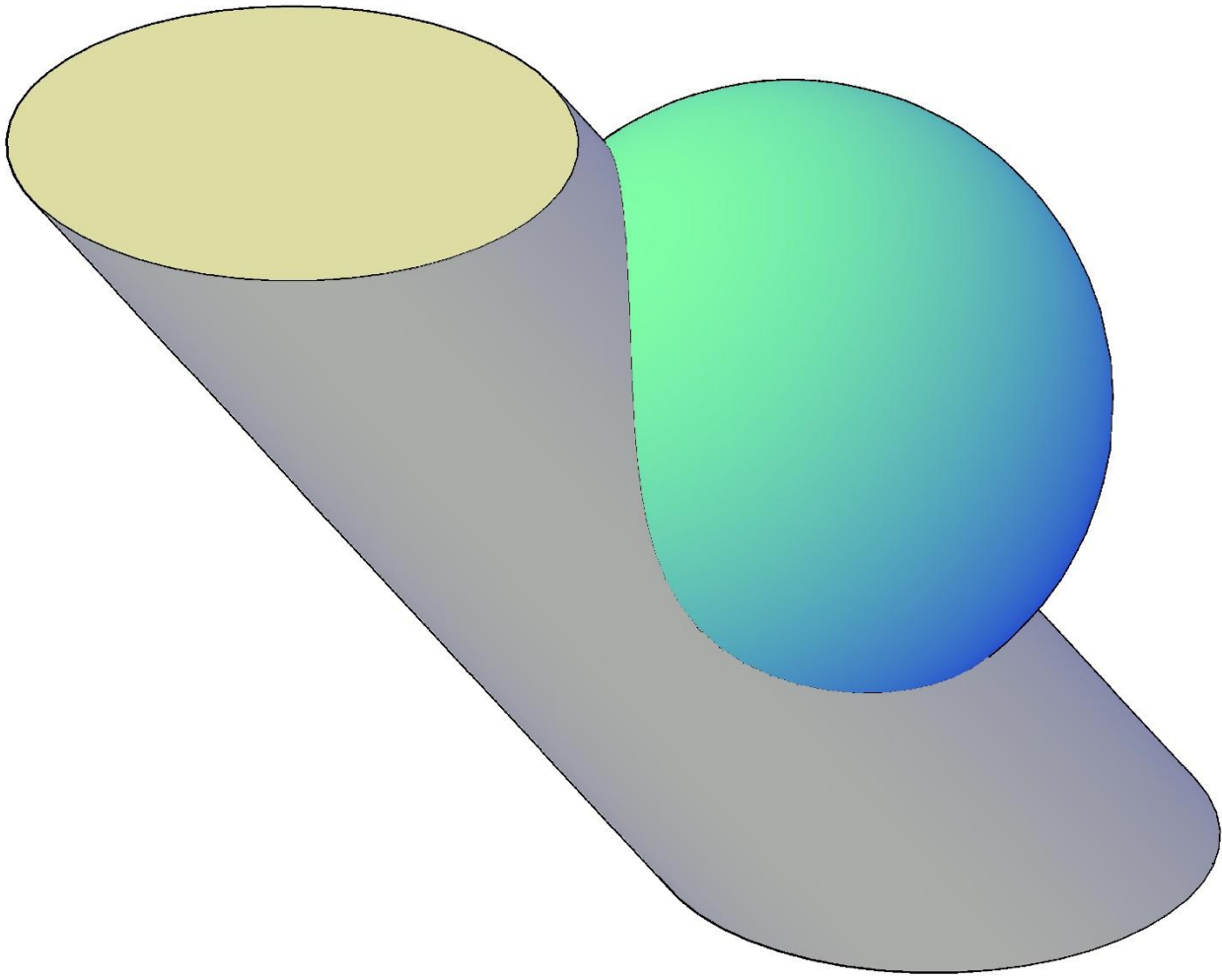




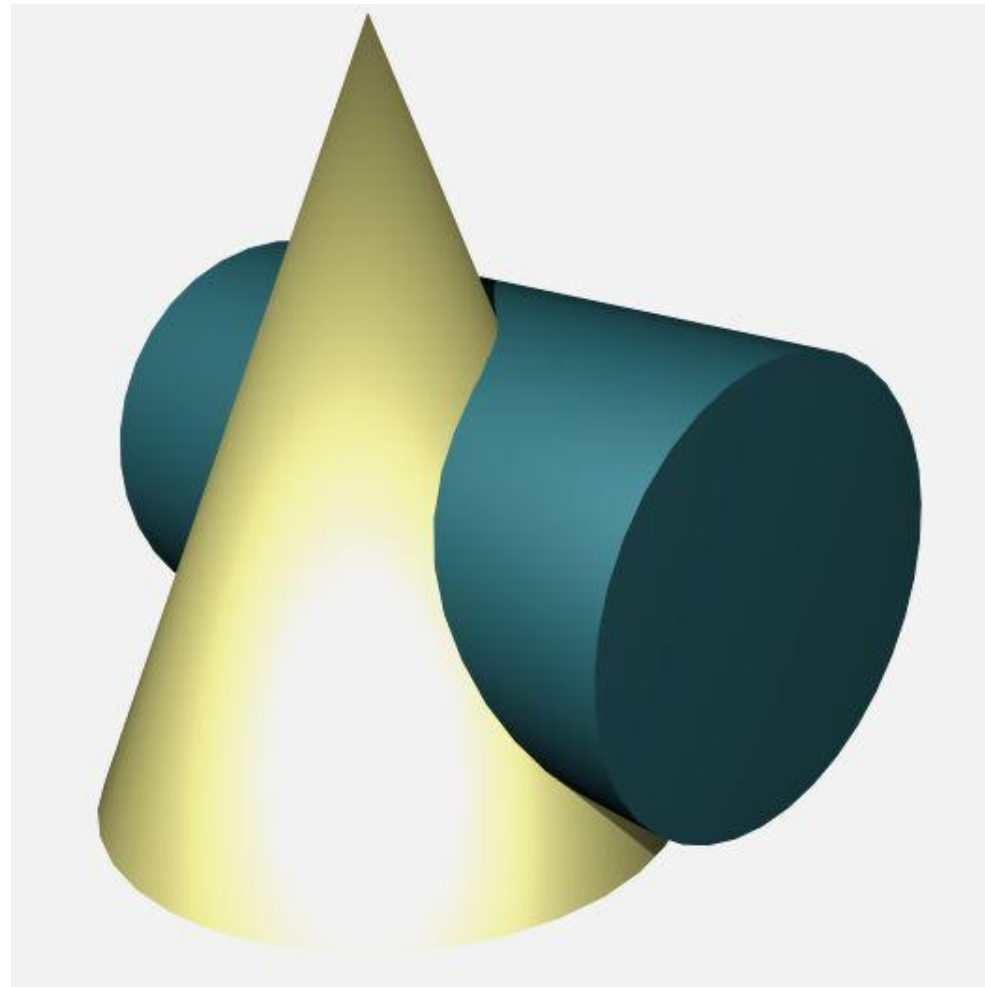
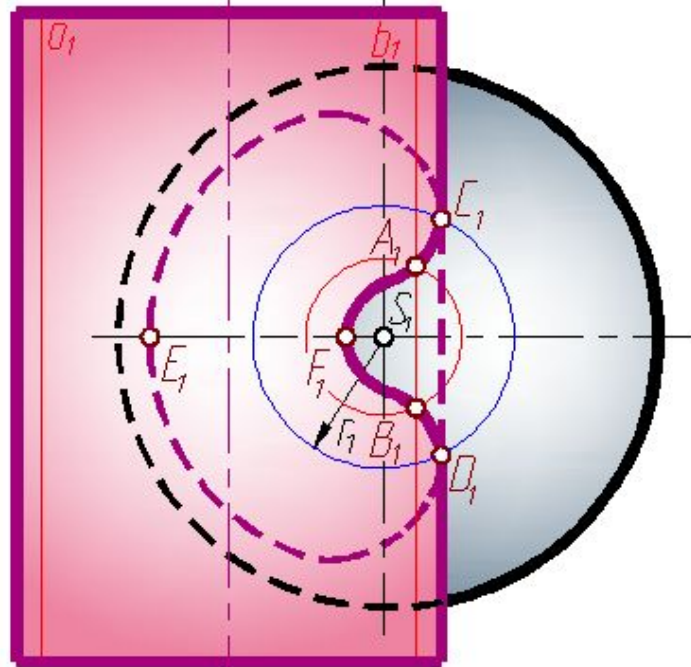
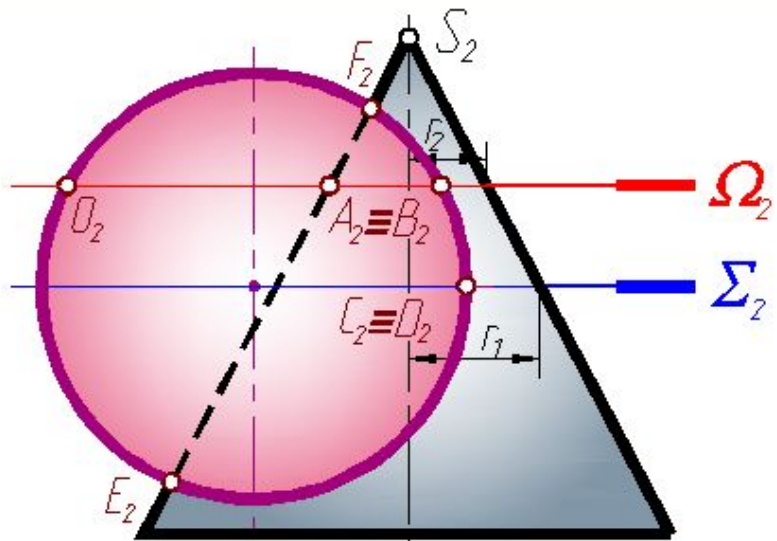




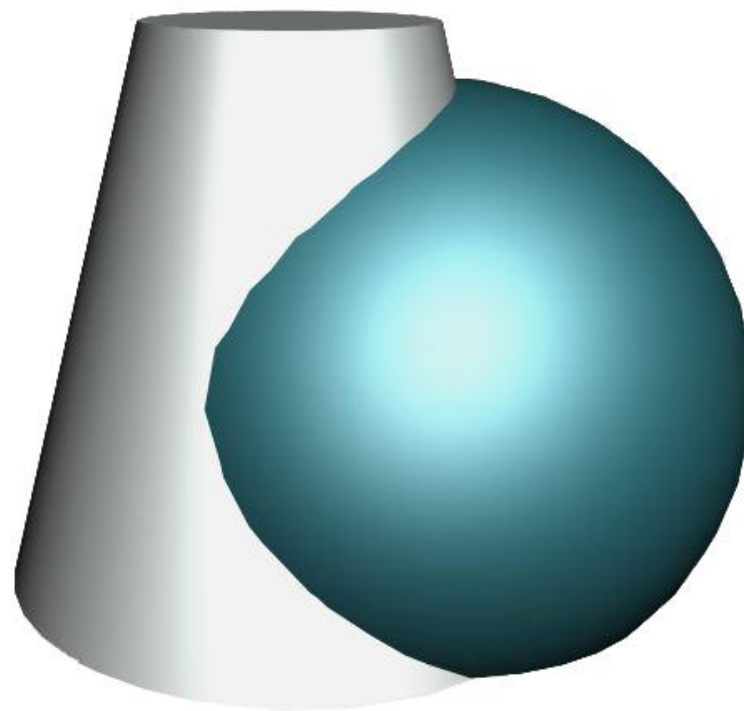
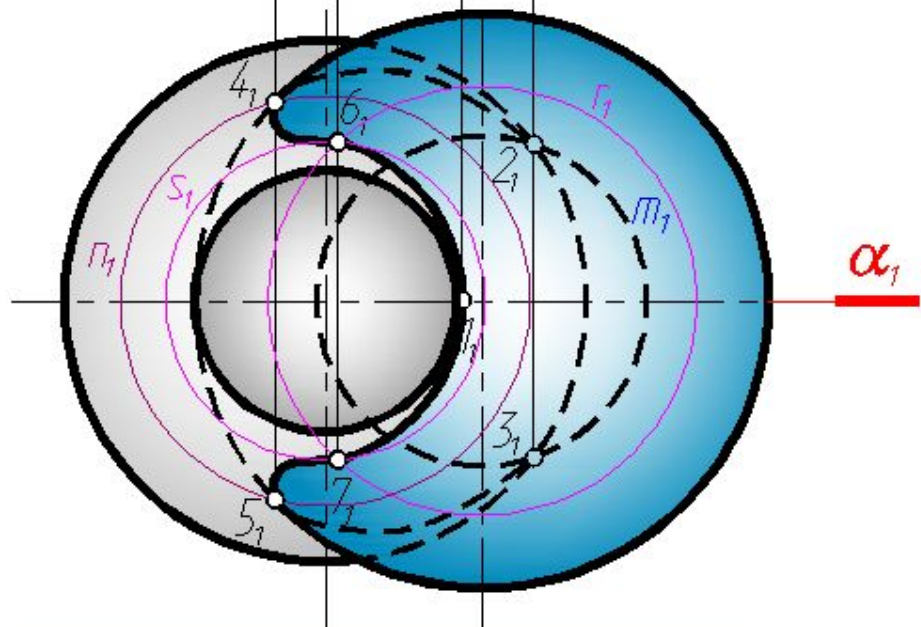
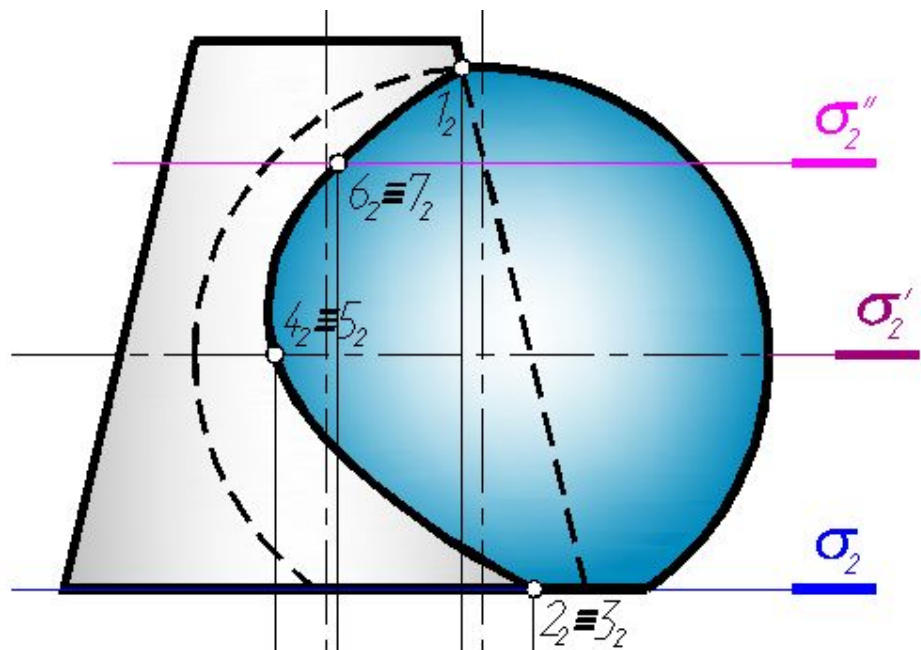










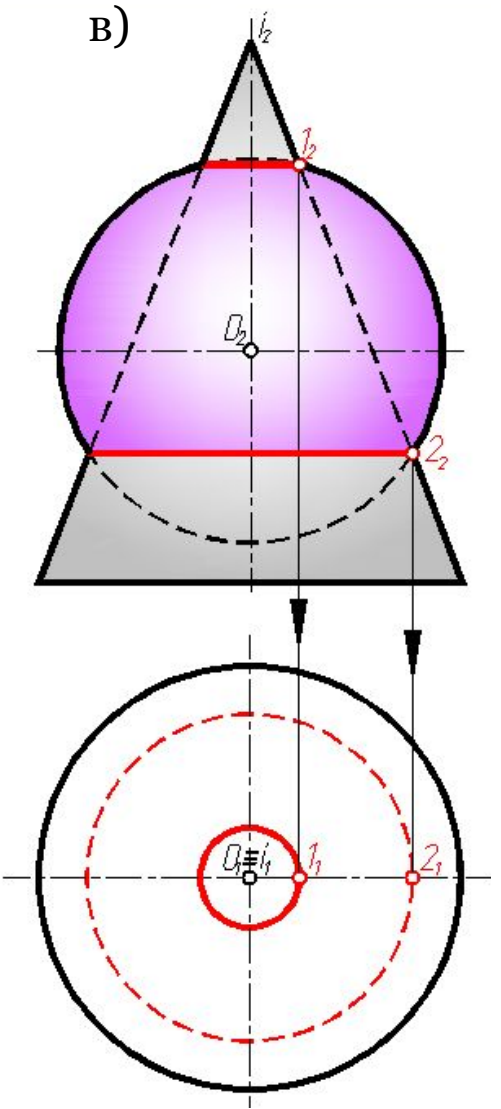
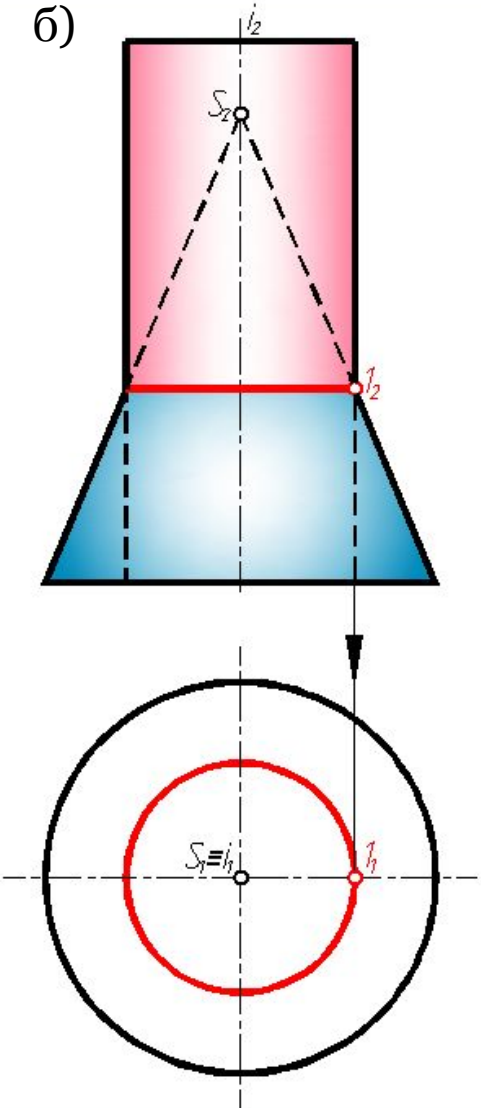
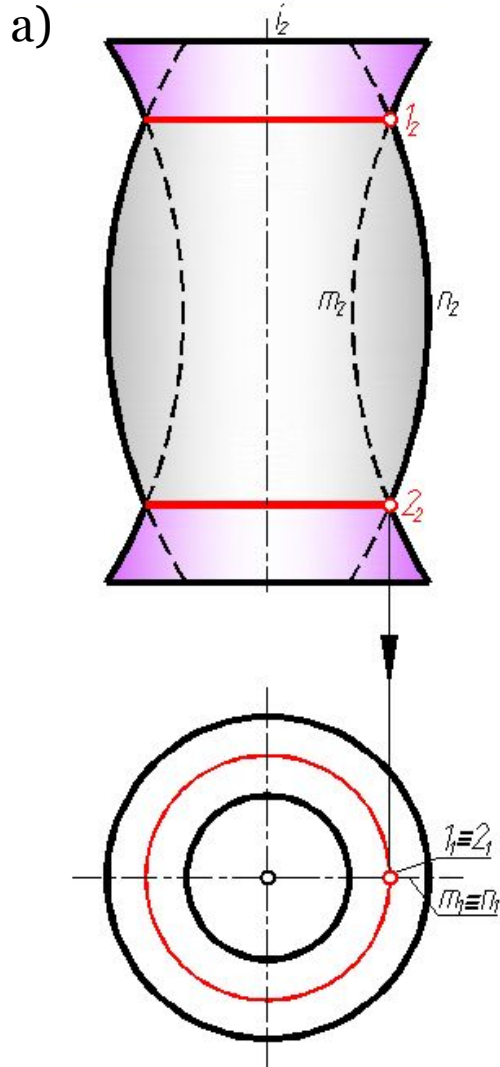


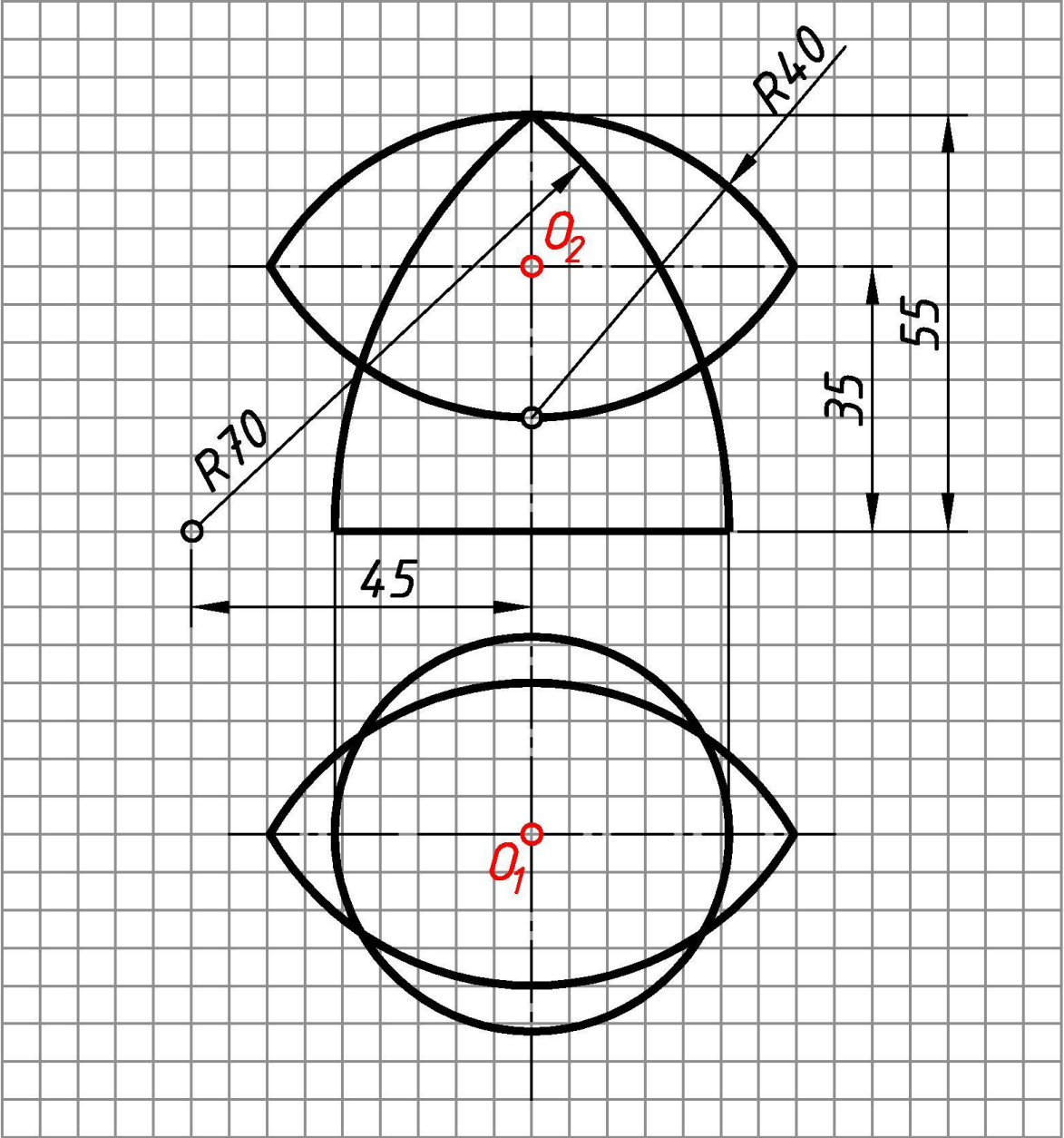
## **Б. Метод концентрических сфер-посредников**

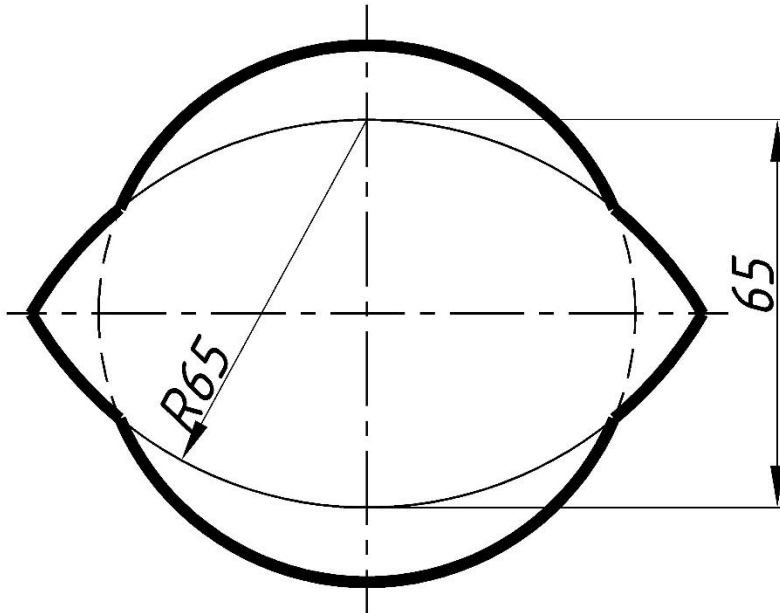
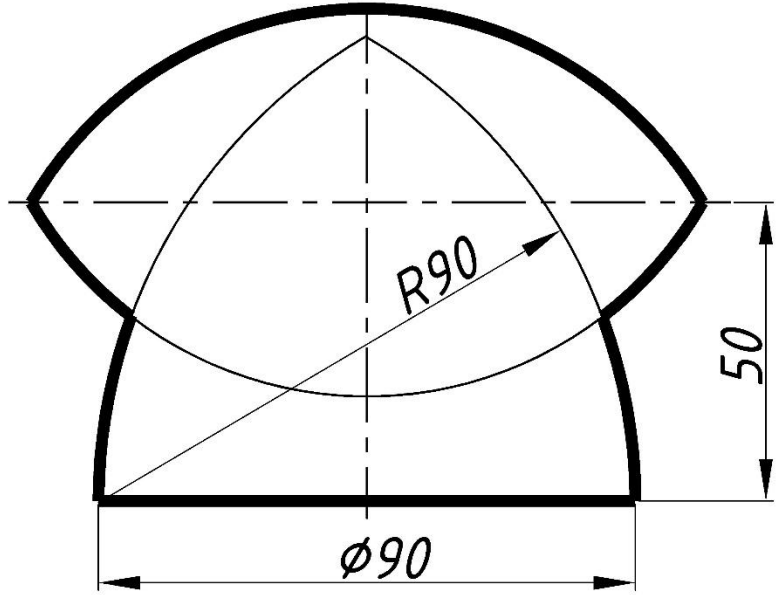
**Общий подход к составлению алгоритма решения задач:**

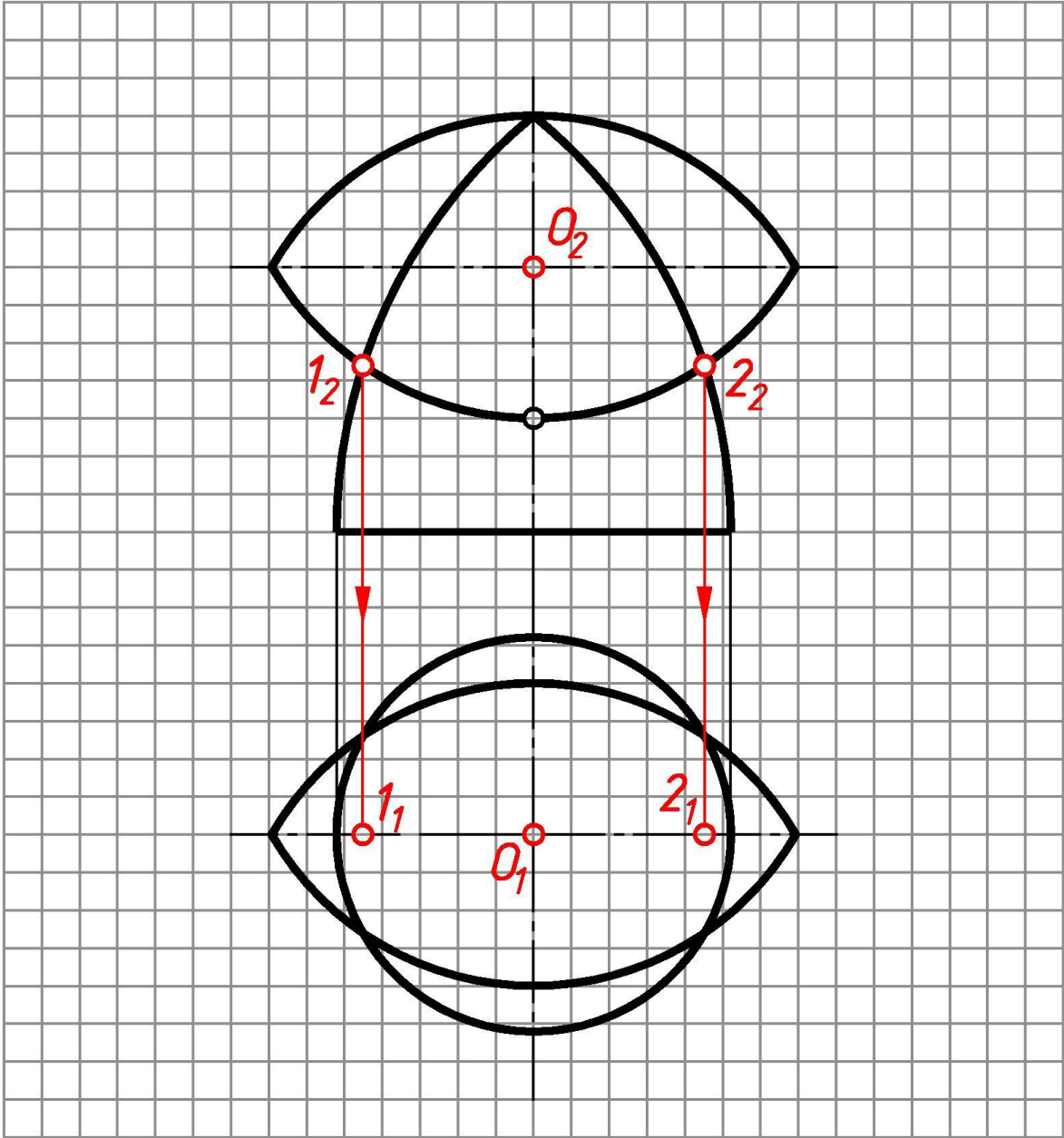
- 1 Проводят анализ заданных поверхностей по способу их расположения относительно плоскостей проекций.
- 2 Определяют характерные точки, принадлежащие линии пересечения;
- 3 Для определения промежуточных точек определяют область проведения концентрических сфер, которые находятся между сферами ( $R_{max}$ ,  $R_{min}$ ), при этом:
  - $R_{max}$  – радиус сферы, равный расстоянию от центра проведения сферы до самой удаленной характерной точки линии пересечения;
  - $R_{min}$  – радиус сферы, которая касается одной пересекаемой поверхности и одновременно пересекает другую поверхность.
- 4 Соединяют полученные точки плавной кривой линией.
- 5 Определяют видимость линии пересечения и поверхностей.

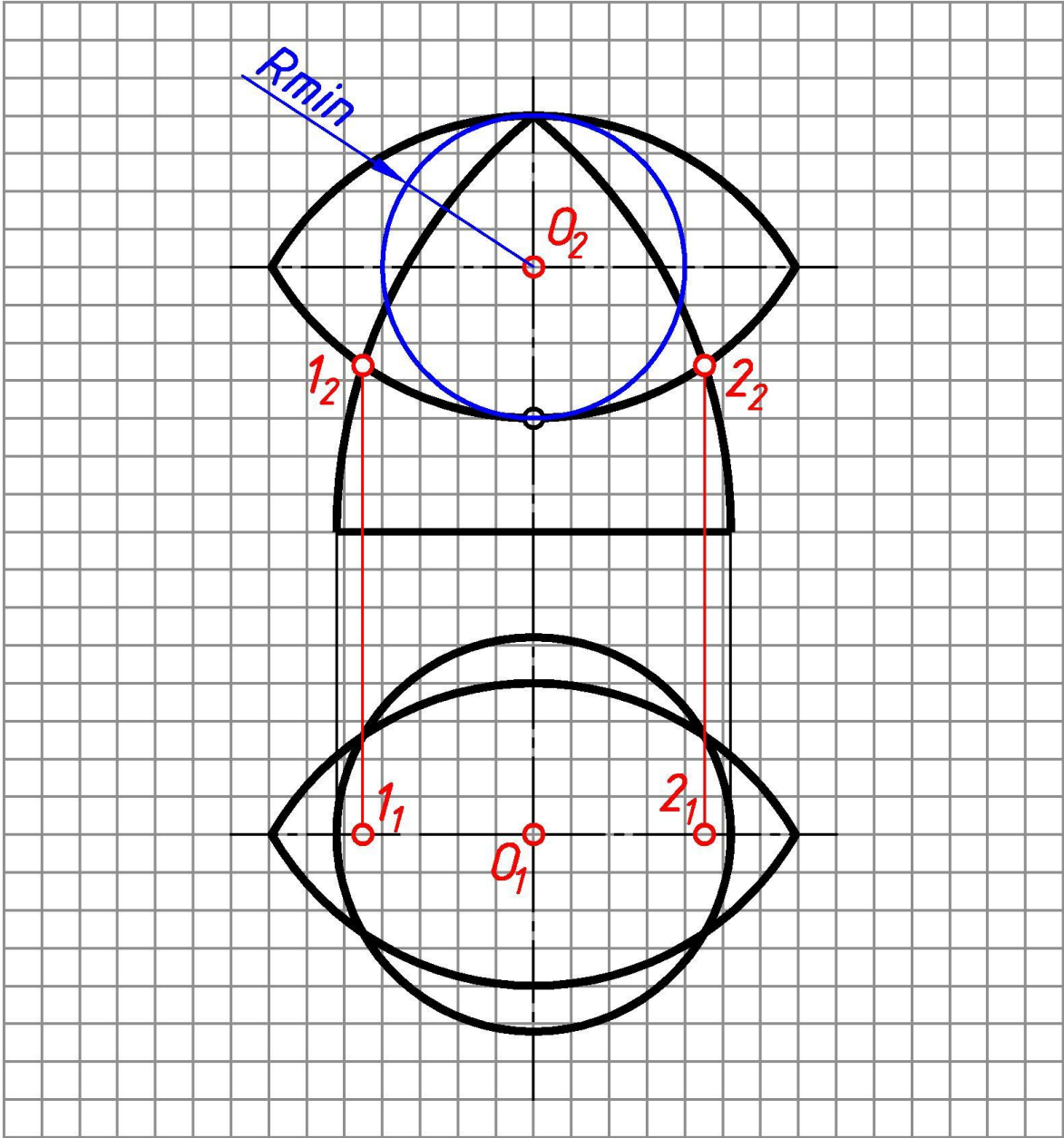
Сфера с центром в точке **O** пересечения осей двух поверхностей вращения будет соосна с каждой из этих поверхностей и пересечет их по окружностям **l** и **m**.

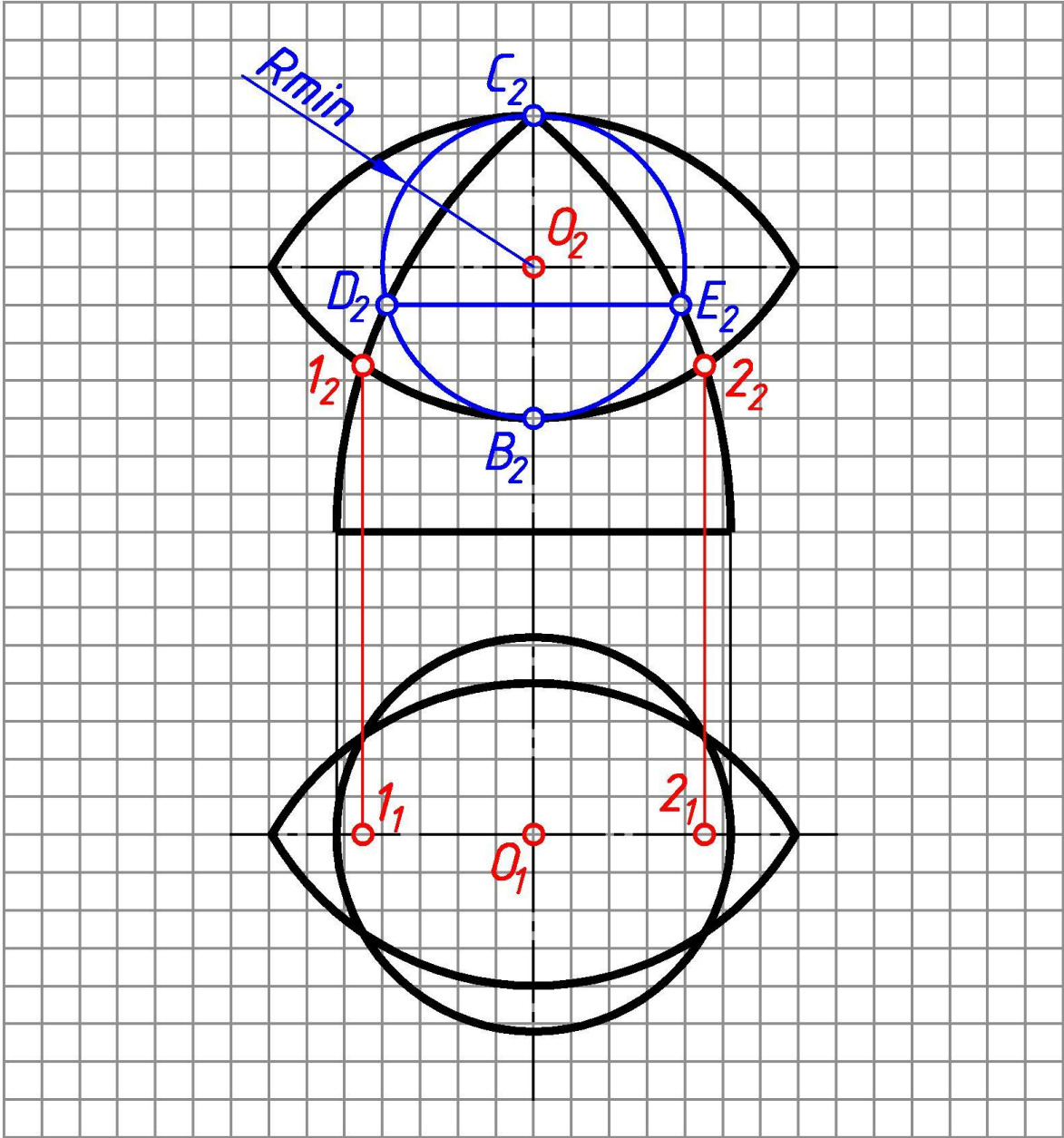




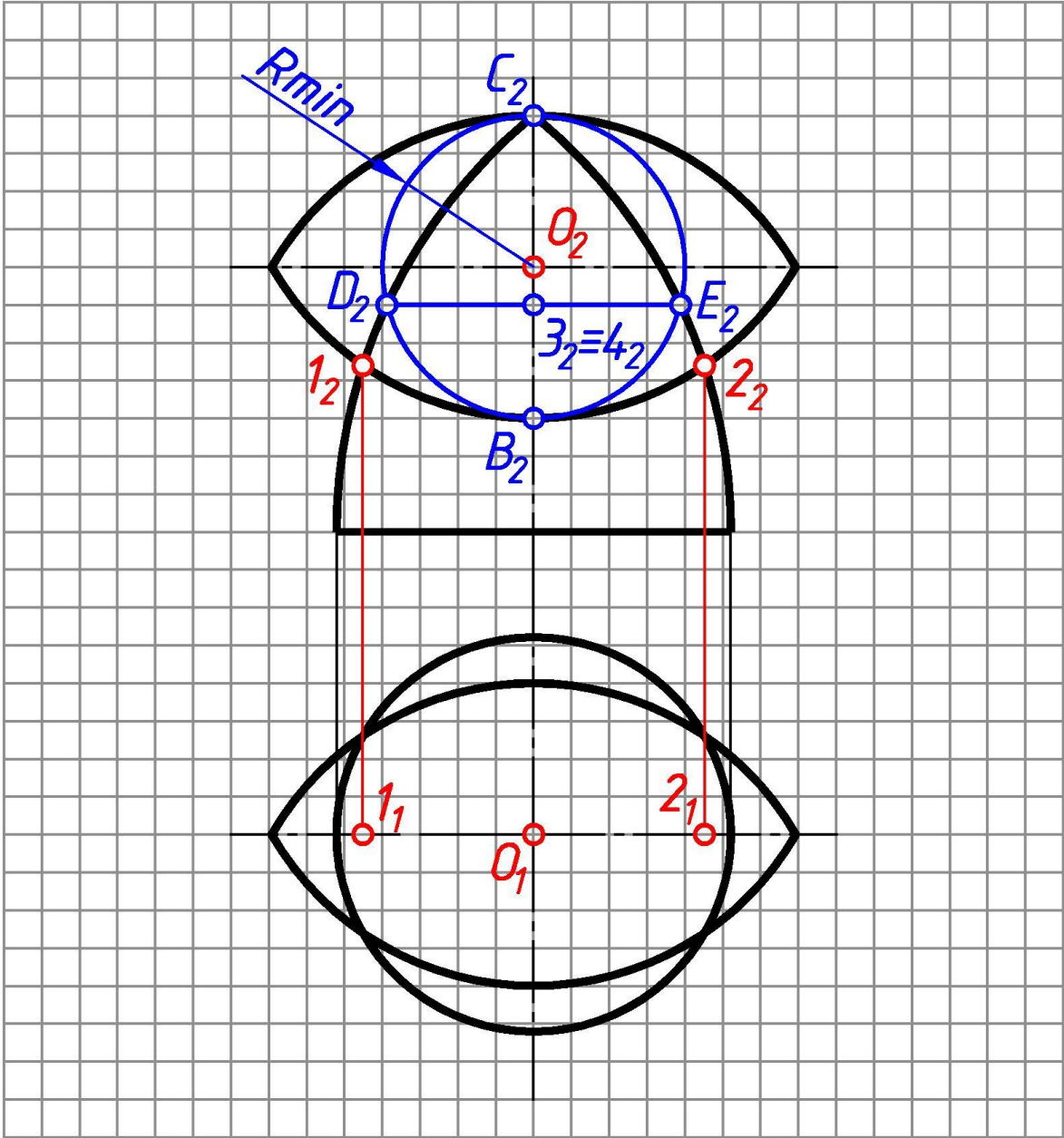


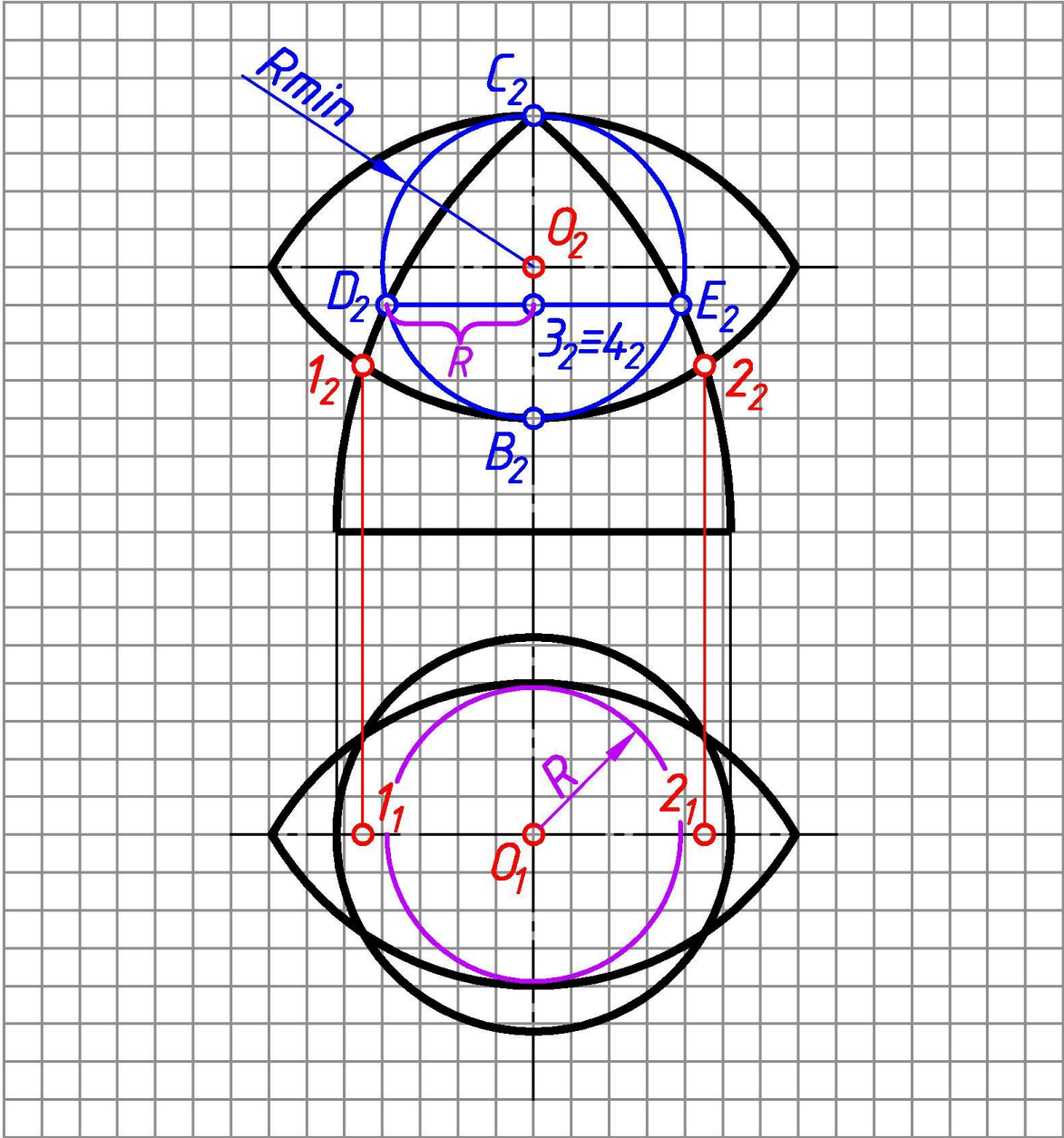


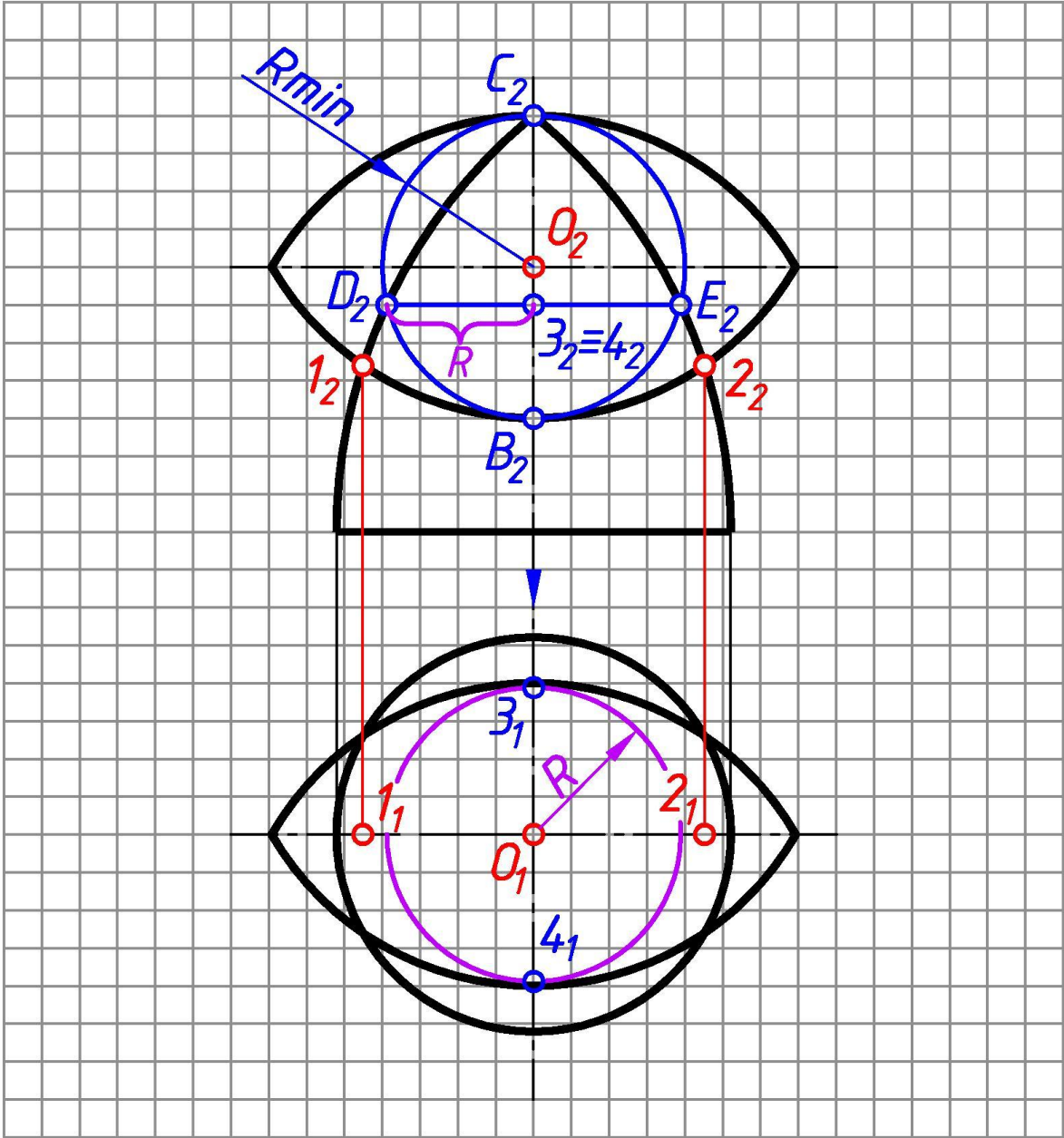


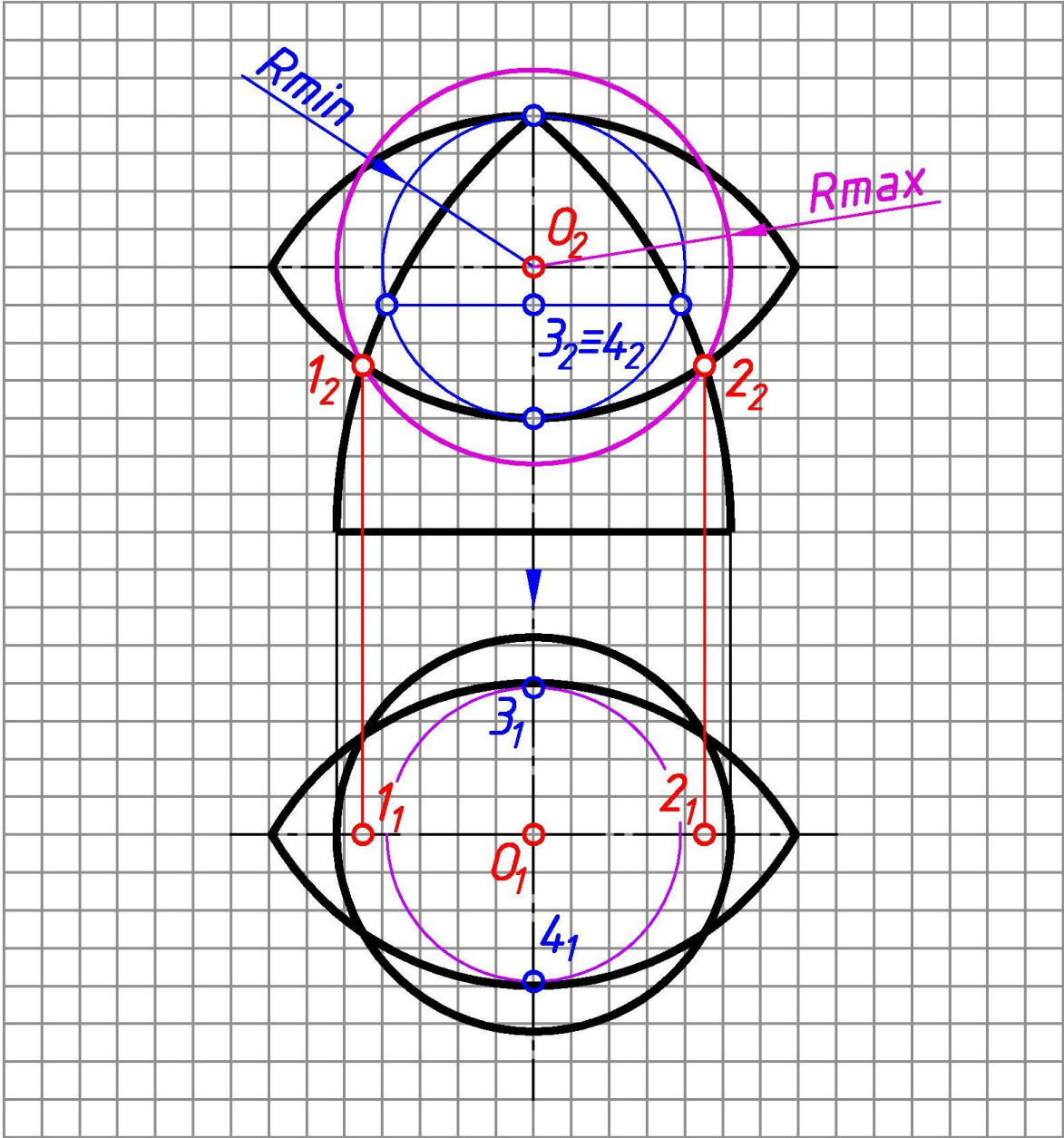


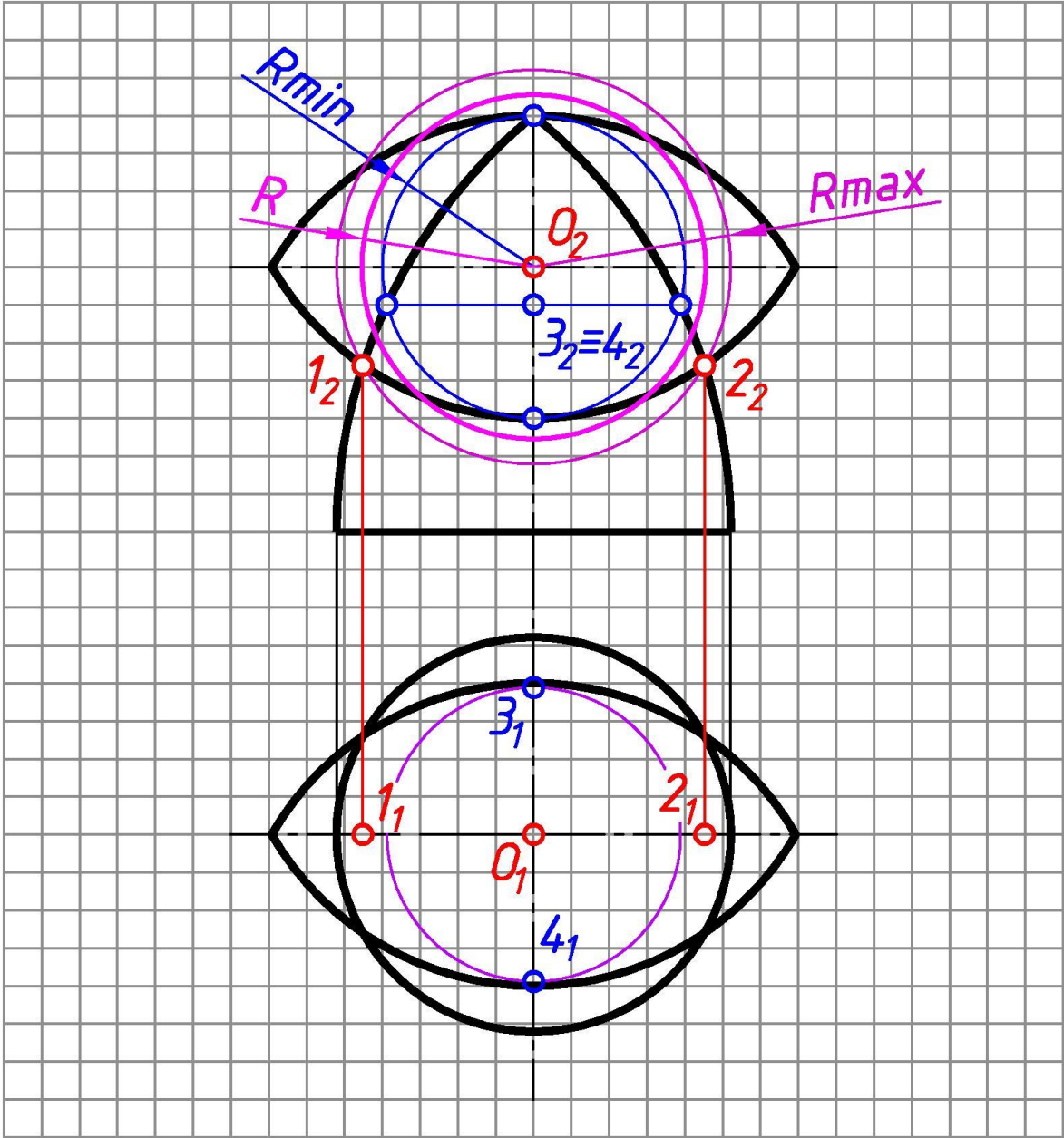


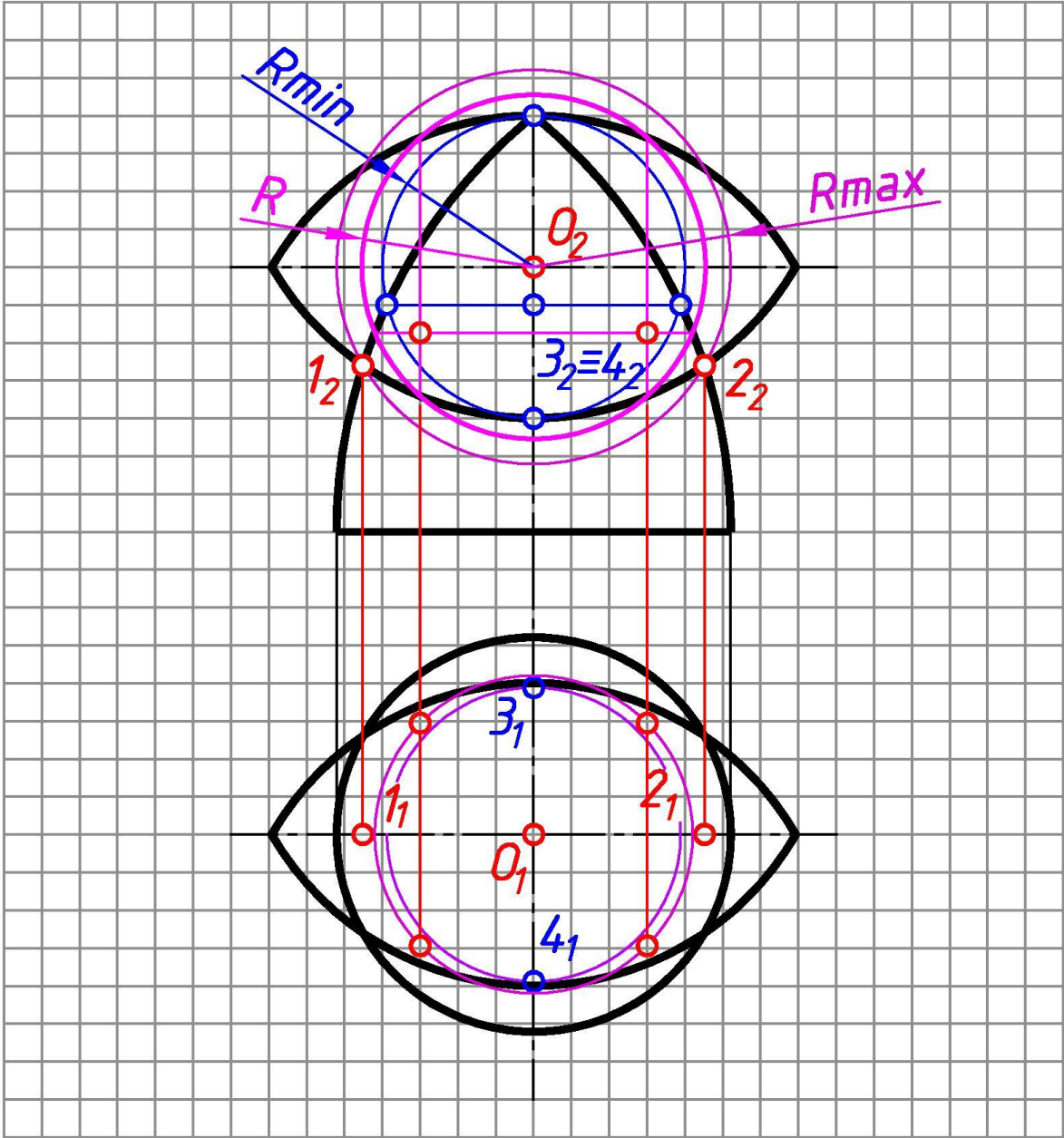


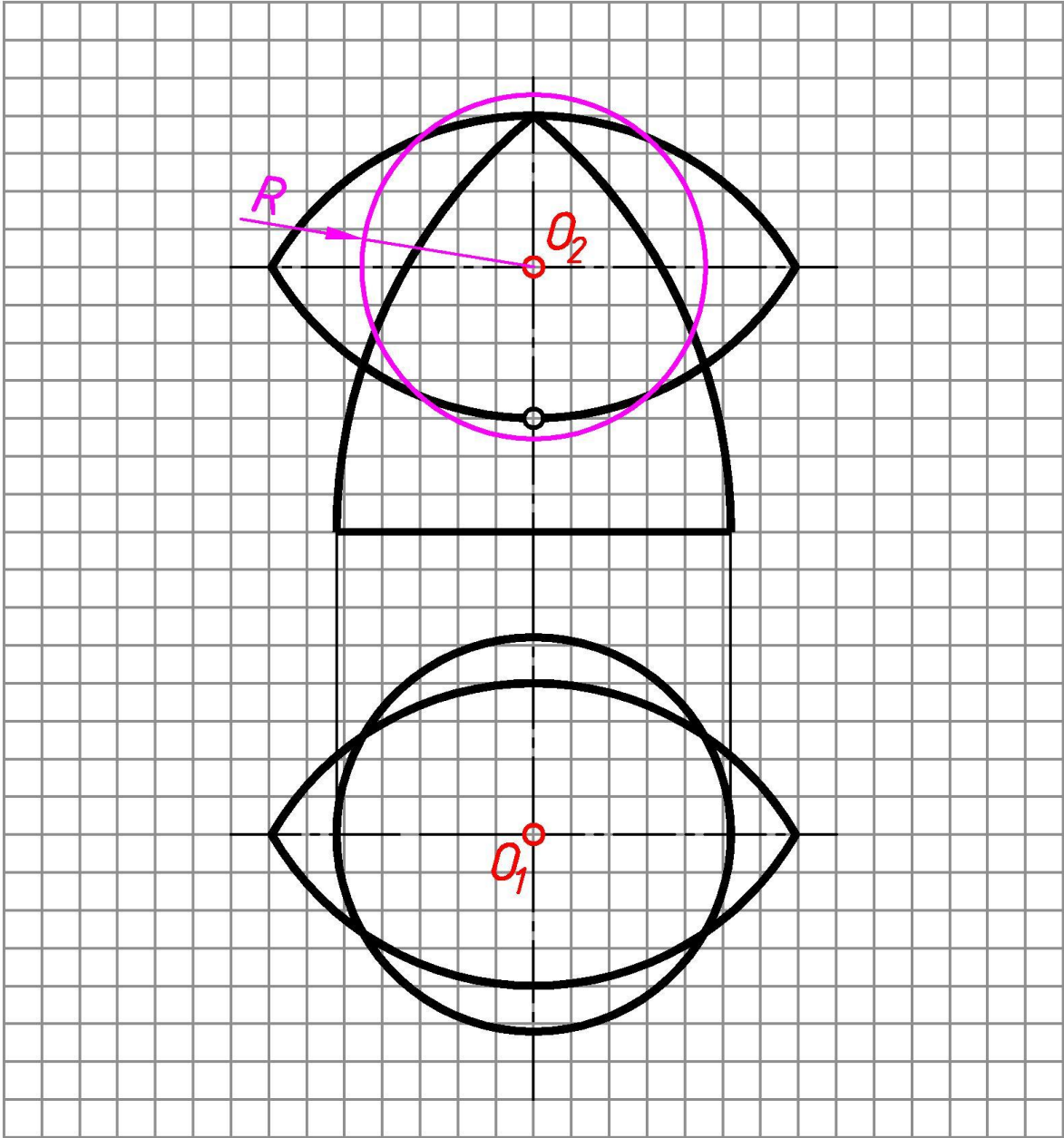


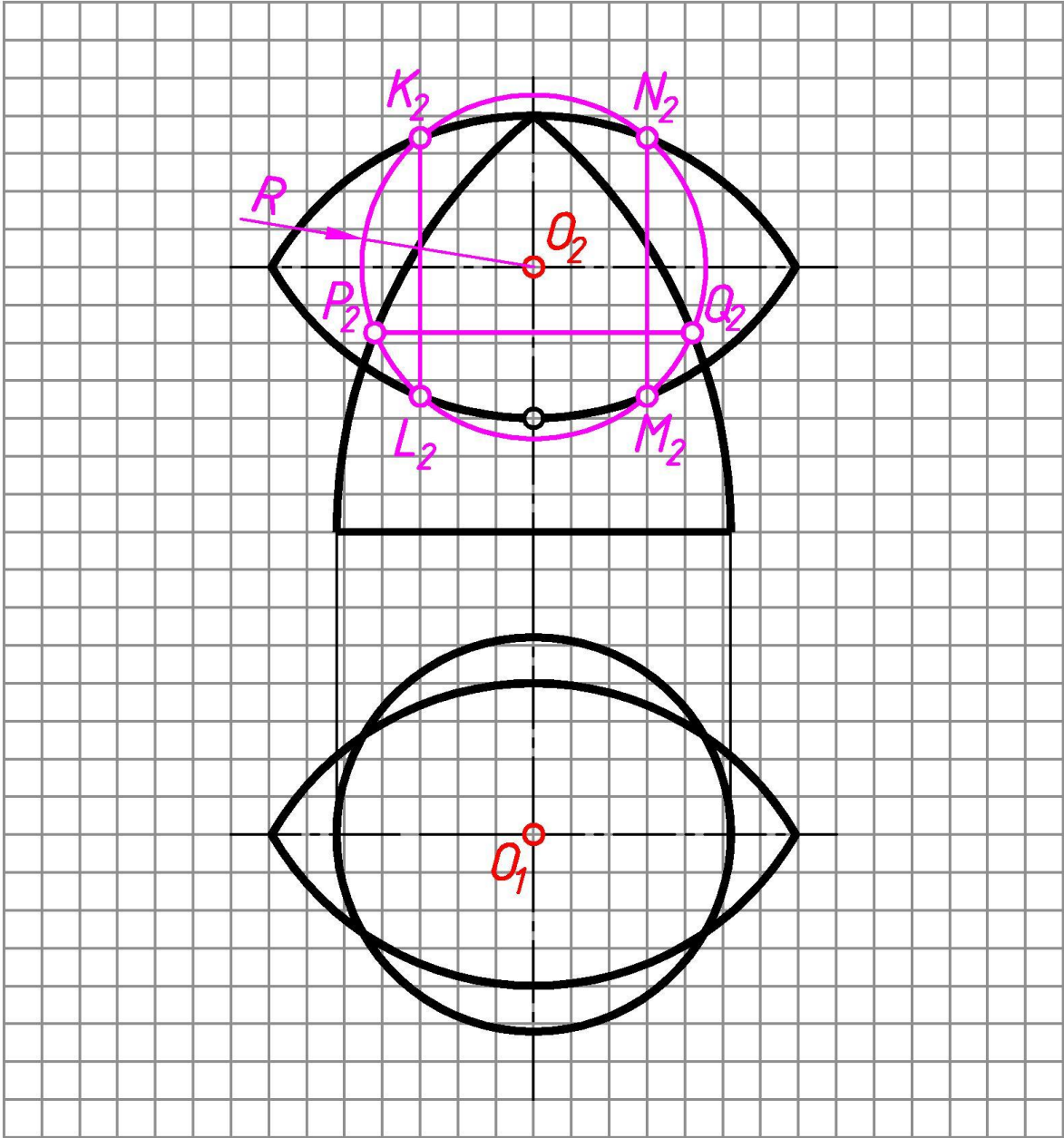




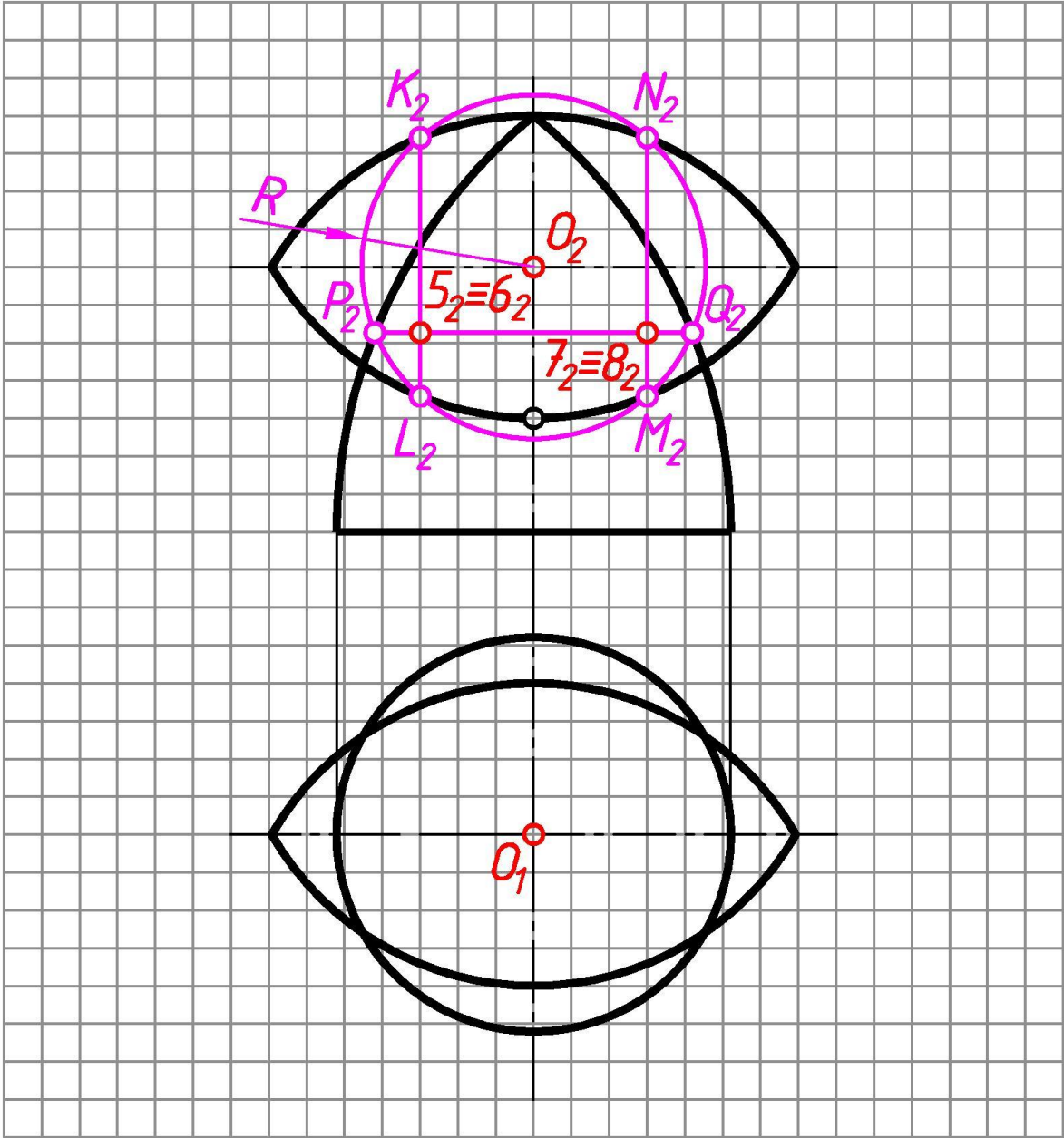


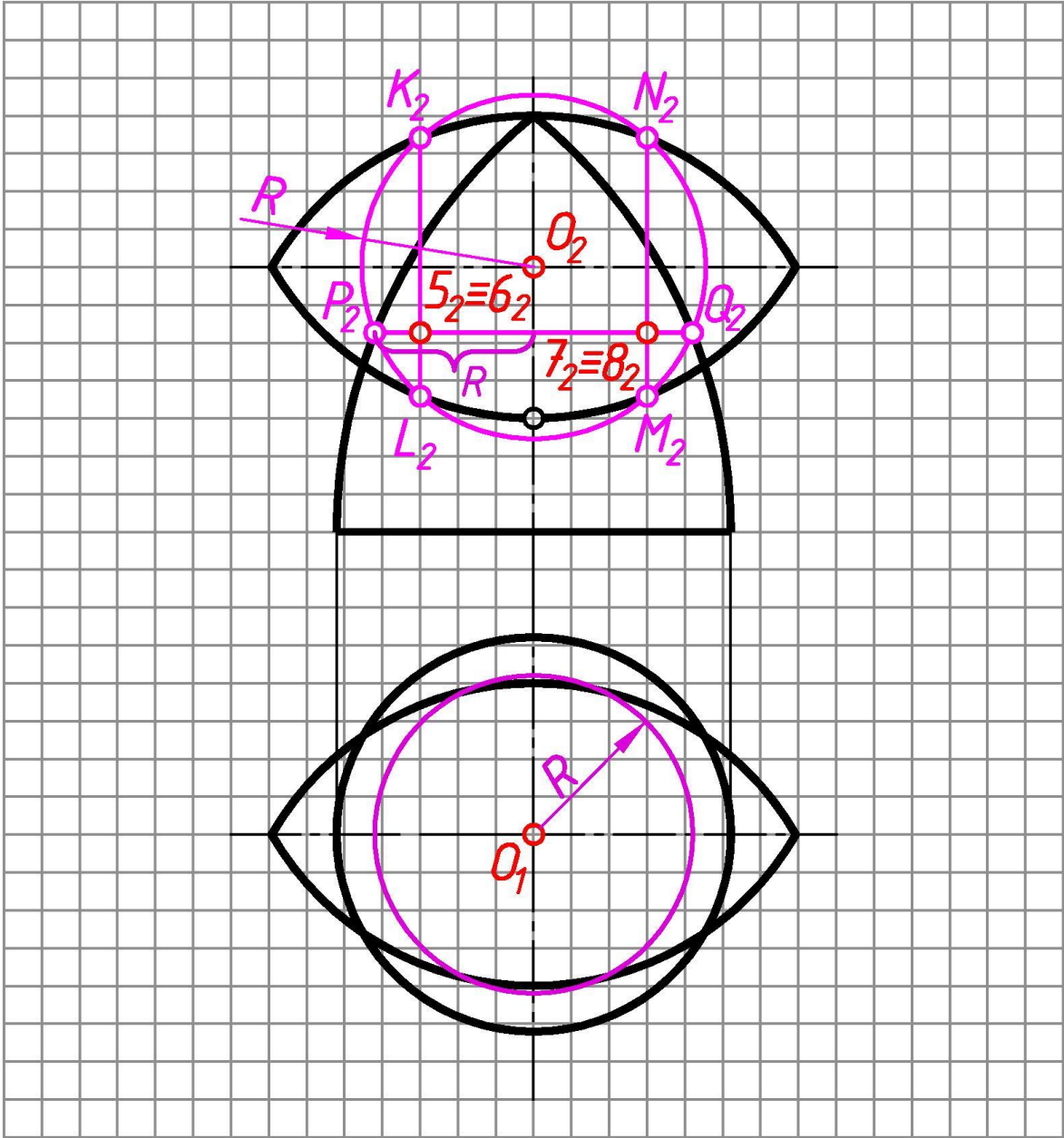


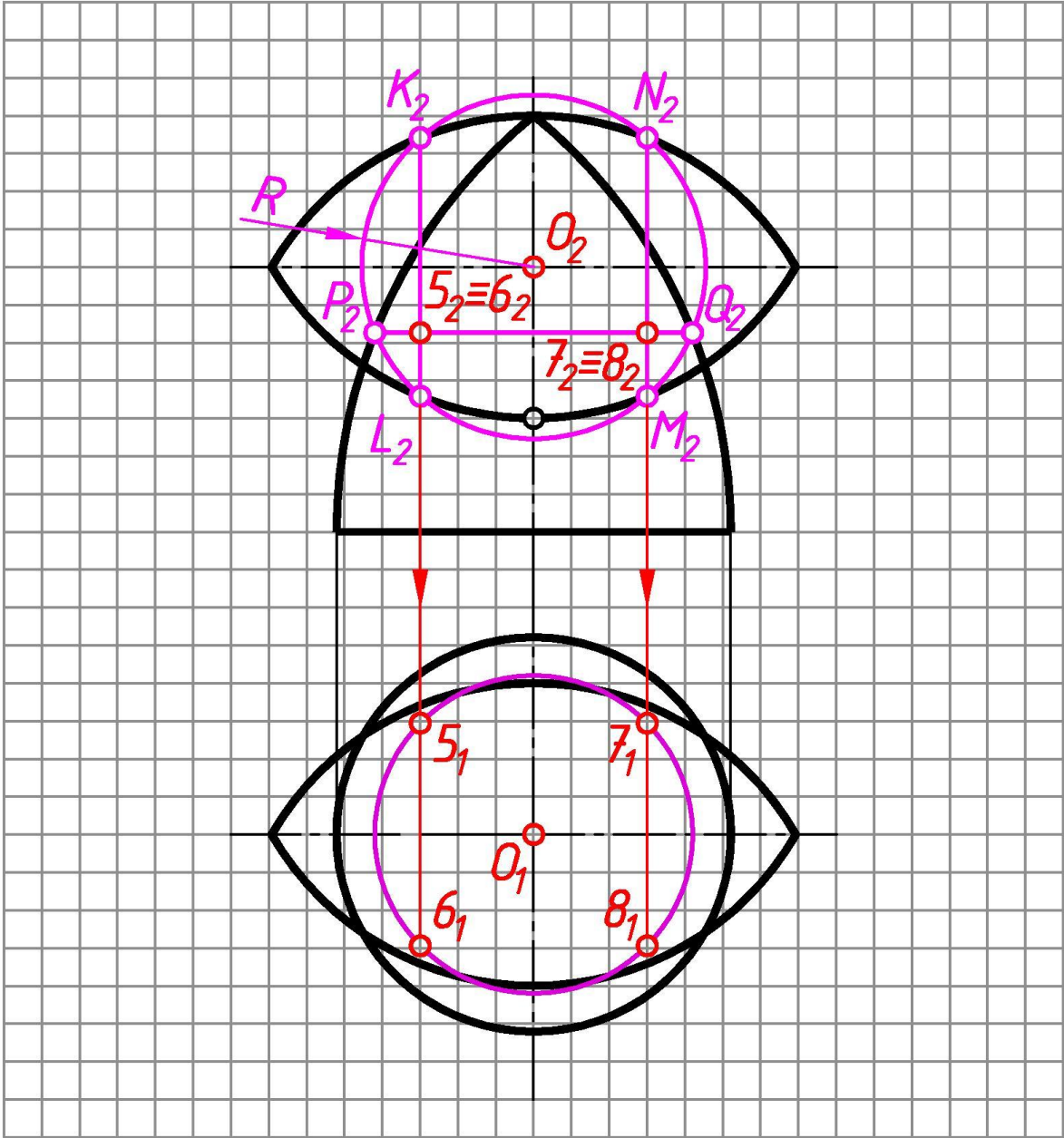


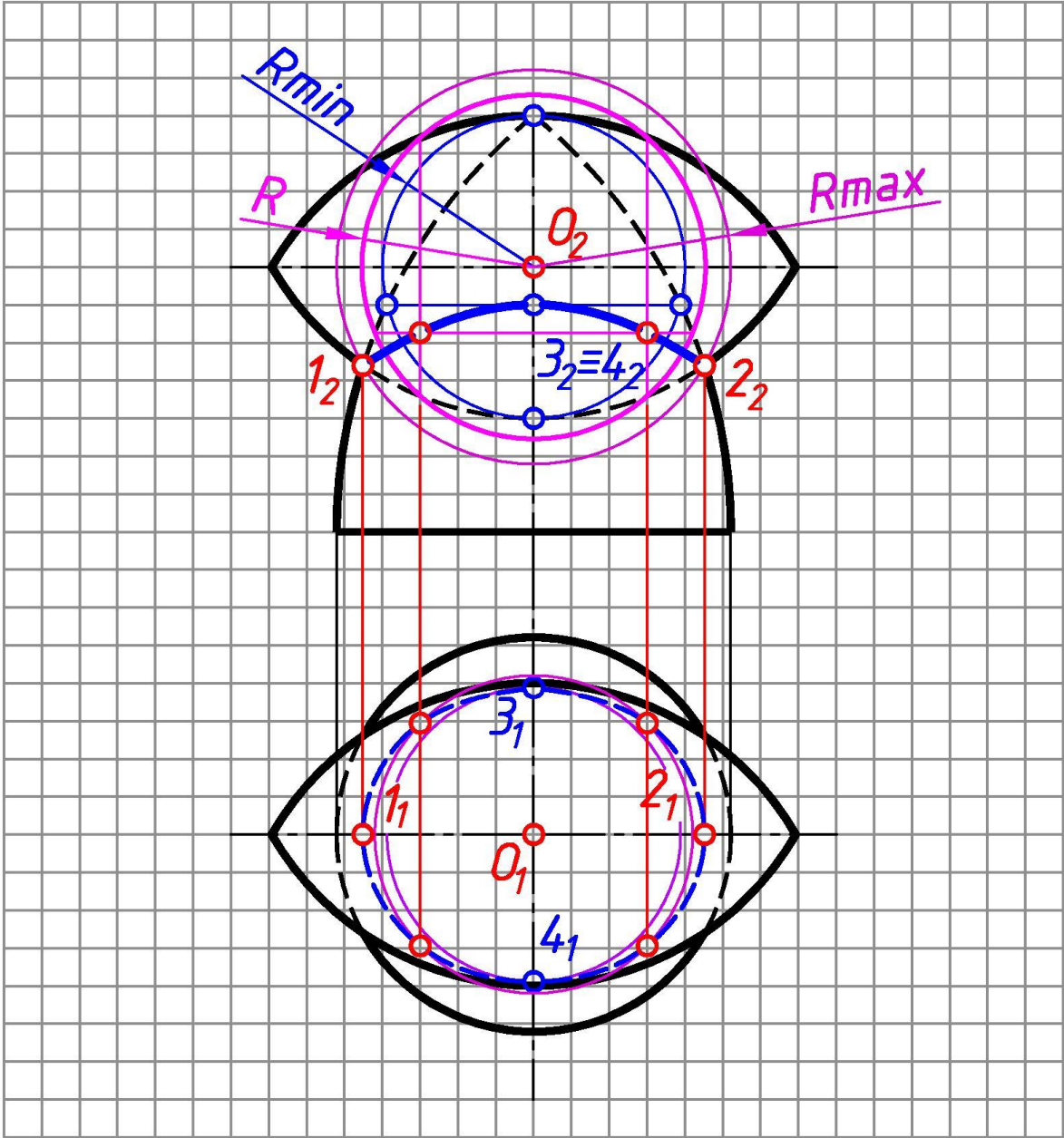


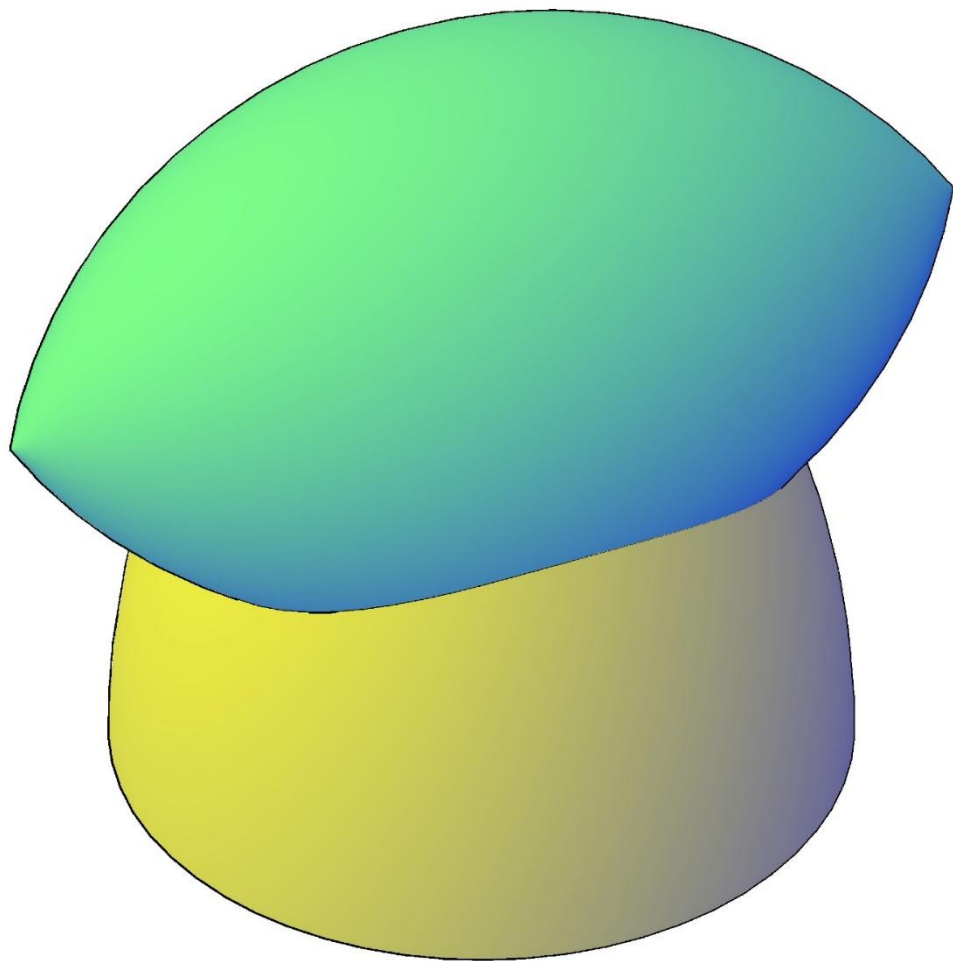


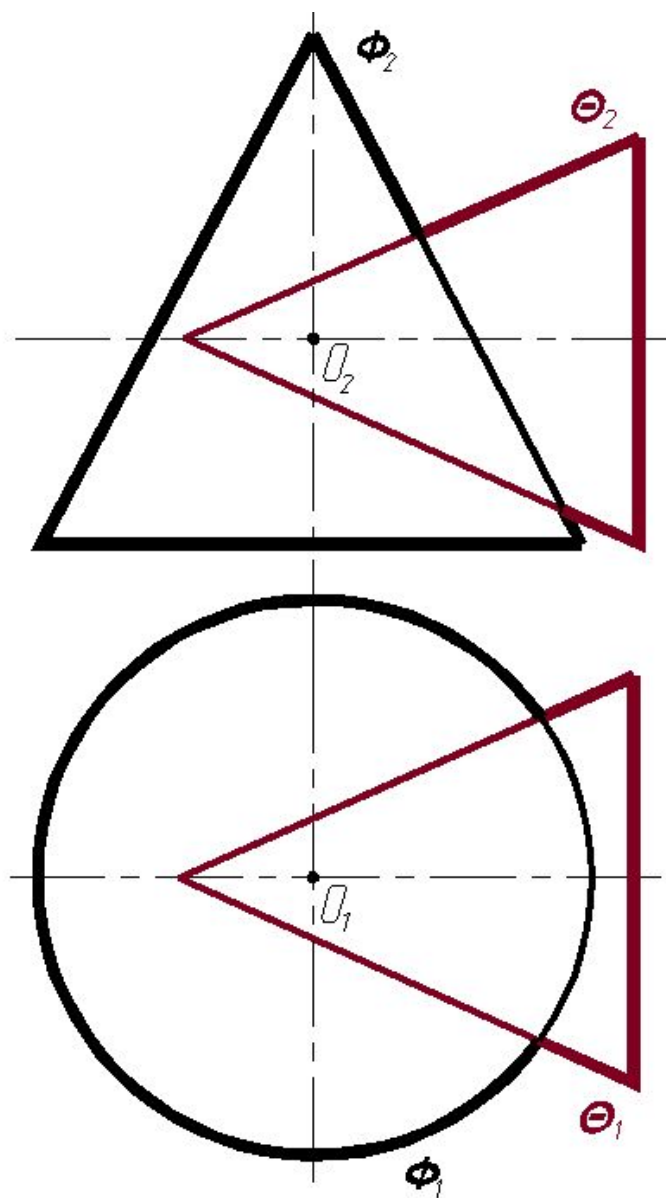




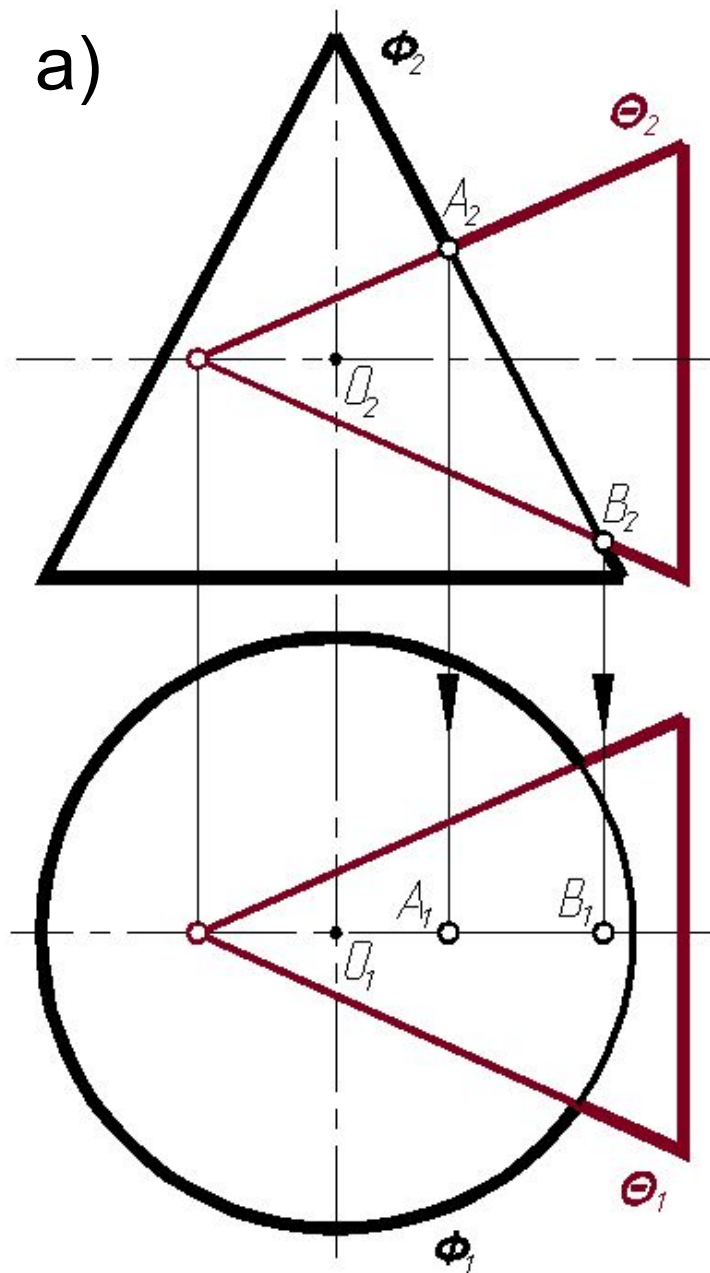








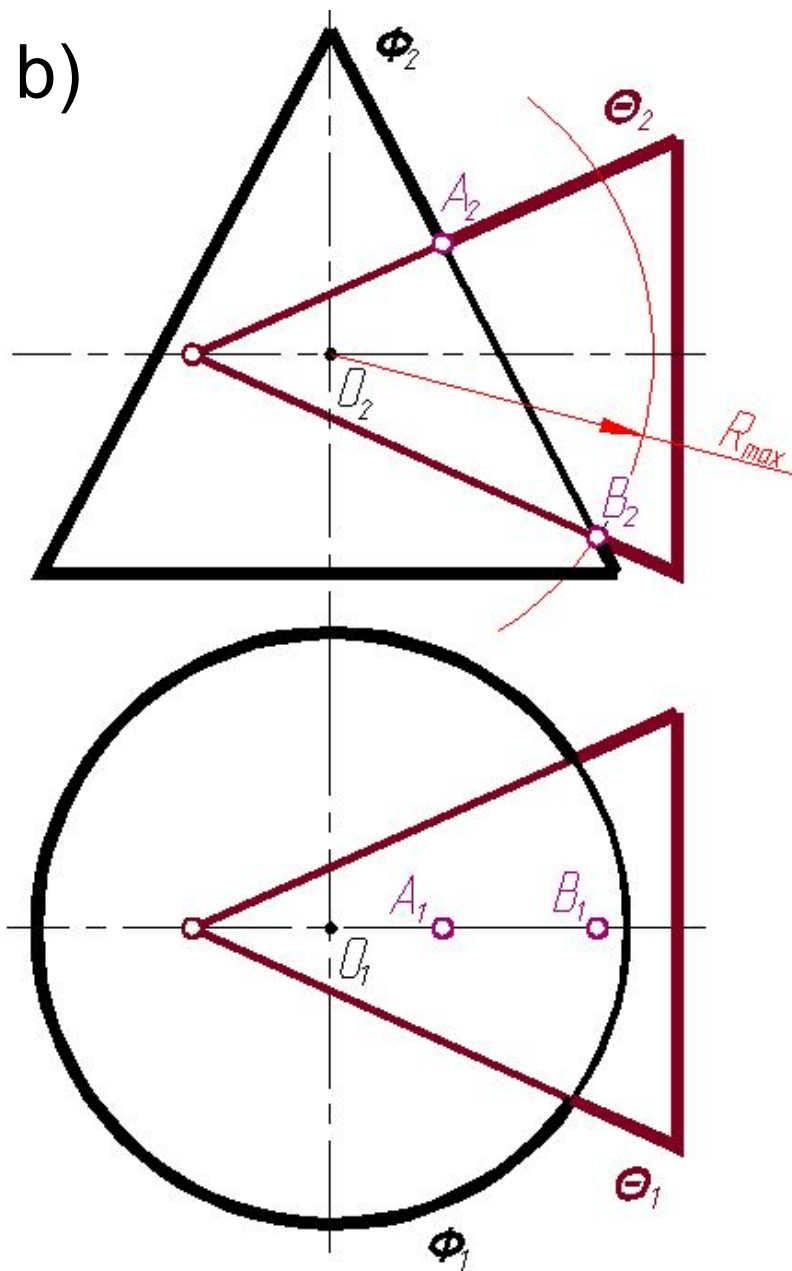
**ЗАДАЧА 13.8:** Построить линию пересечения поверхностей вращения. Обе поверхности общего положения. Оси вращения заданных поверхностей пересекаются и образуют плоскость, параллельную  $\Pi_2$  и перпендикулярную  $\Pi_1$  (см. рисунок 13.12).



### **Алгоритм решения задачи:**

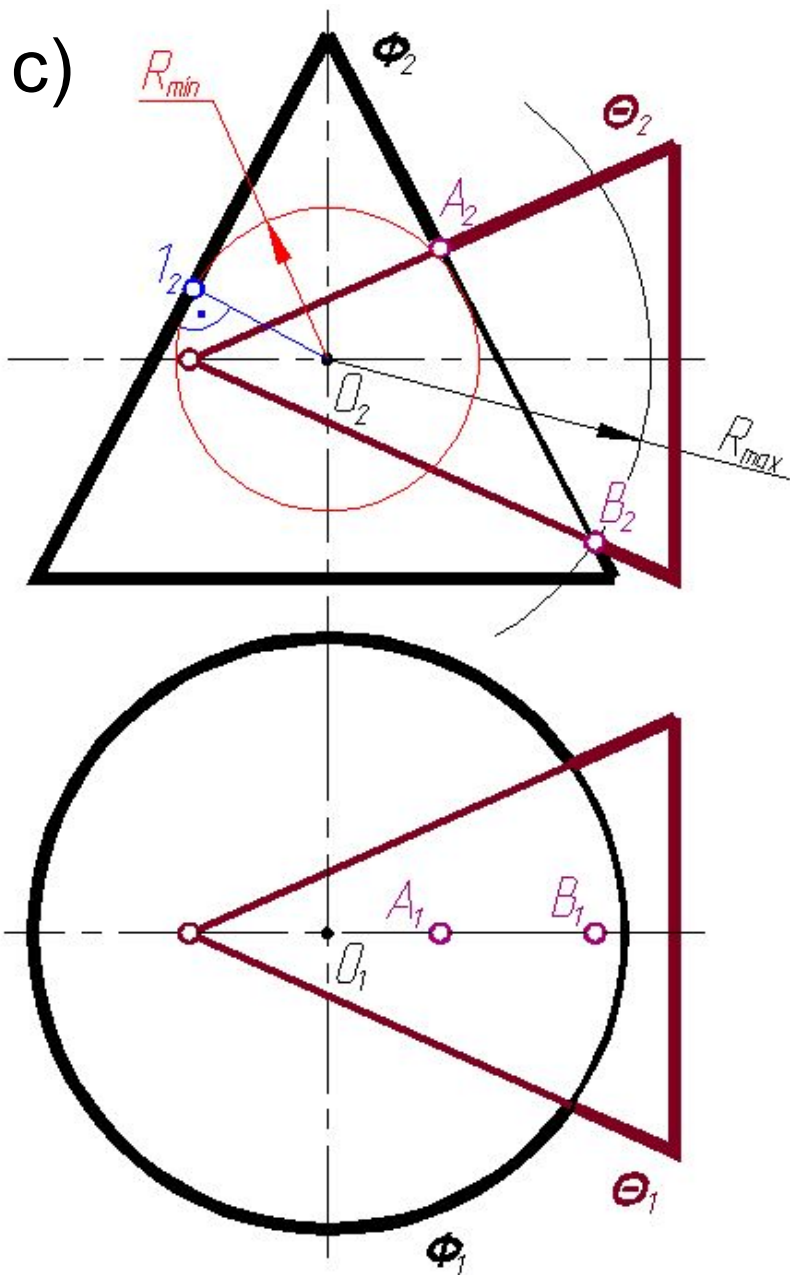
1 Характерными точками на чертеже являются  $A_2, B_2$  – точки пересечения очерковых образующих заданных поверхностей во фронтальной плоскости проекций. Горизонтальные их проекции определяем на основании принадлежности данных точек одной из поверхностей, методом простейших графических построений.

b)

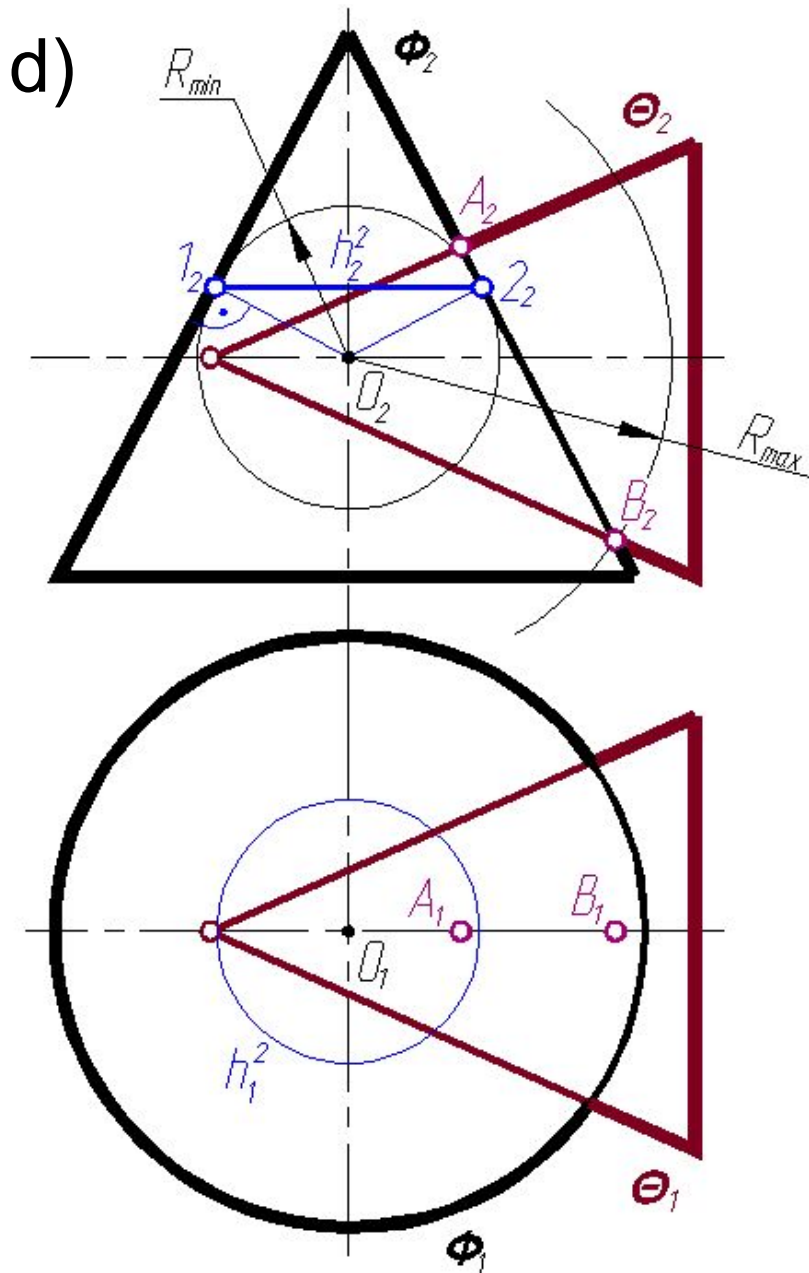


2 Выявляем область проведения концентрических сфер-посредников: Расстояние на фронтальной проекции чертежа от  $O_2$  до наиболее удаленной точки  $B_2$  является радиусом максимальной сферы ( $R_{max}$ ).





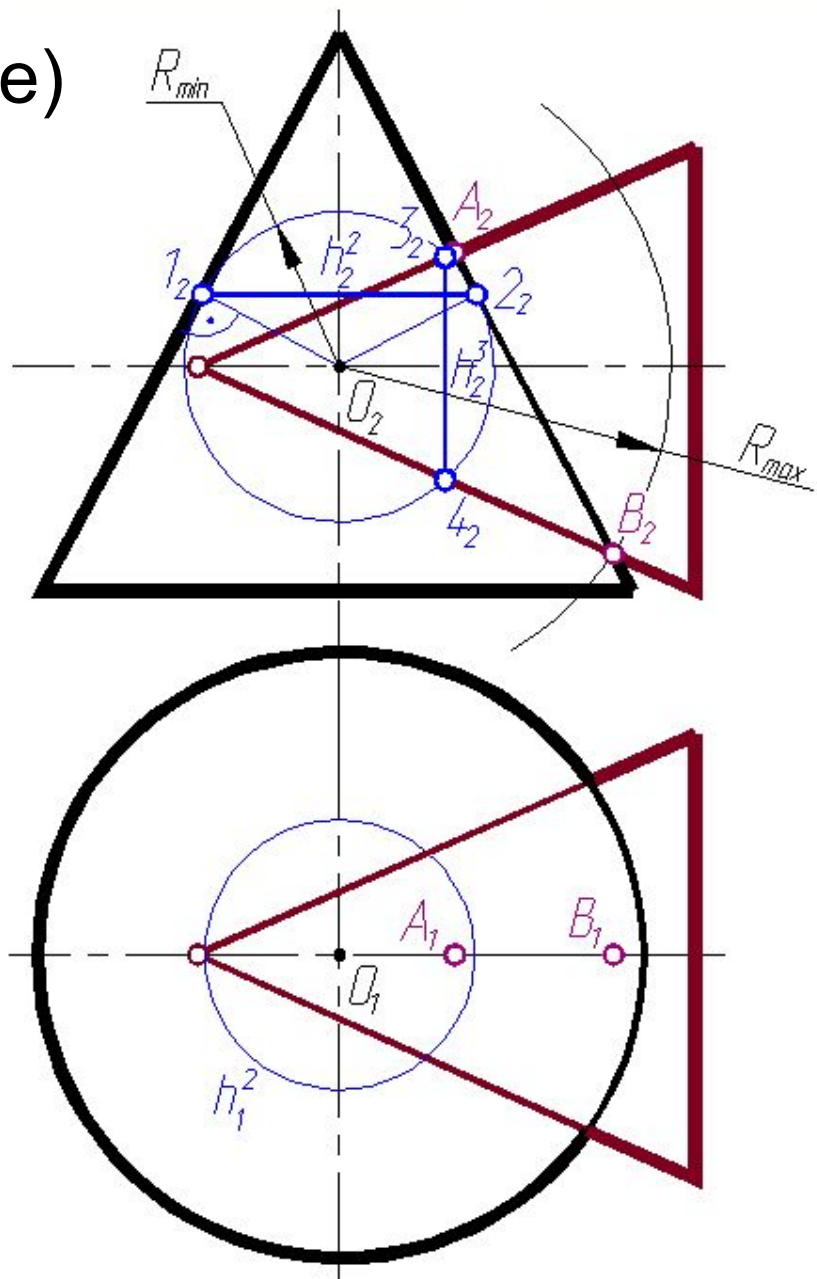
$R_{min}$  – радиус минимальной сферы, которая касается одной поверхности конуса и пересекает вторую поверхность конуса.  
 В пределах от  $R_{max}$  до  $R_{min}$  проводятся концентрические сферы и определяются промежуточные точки линии пересечения.



3 Находим другие характерные и промежуточные точки.  
 Проводим концентрическую сферу-посредник с центром в точке  $O_2$ , радиуса  $R_{min}$ . Сфера-посредник пересекает поверхность конуса  $\Phi$  по окружности  $h_2$ , фронтальная проекция которой выродится в линию  $1_2 2_2$ :  
 $окр.(O_2 \rightarrow R_{min}) \cap \Phi_2 = 1_2 2_2$ ;

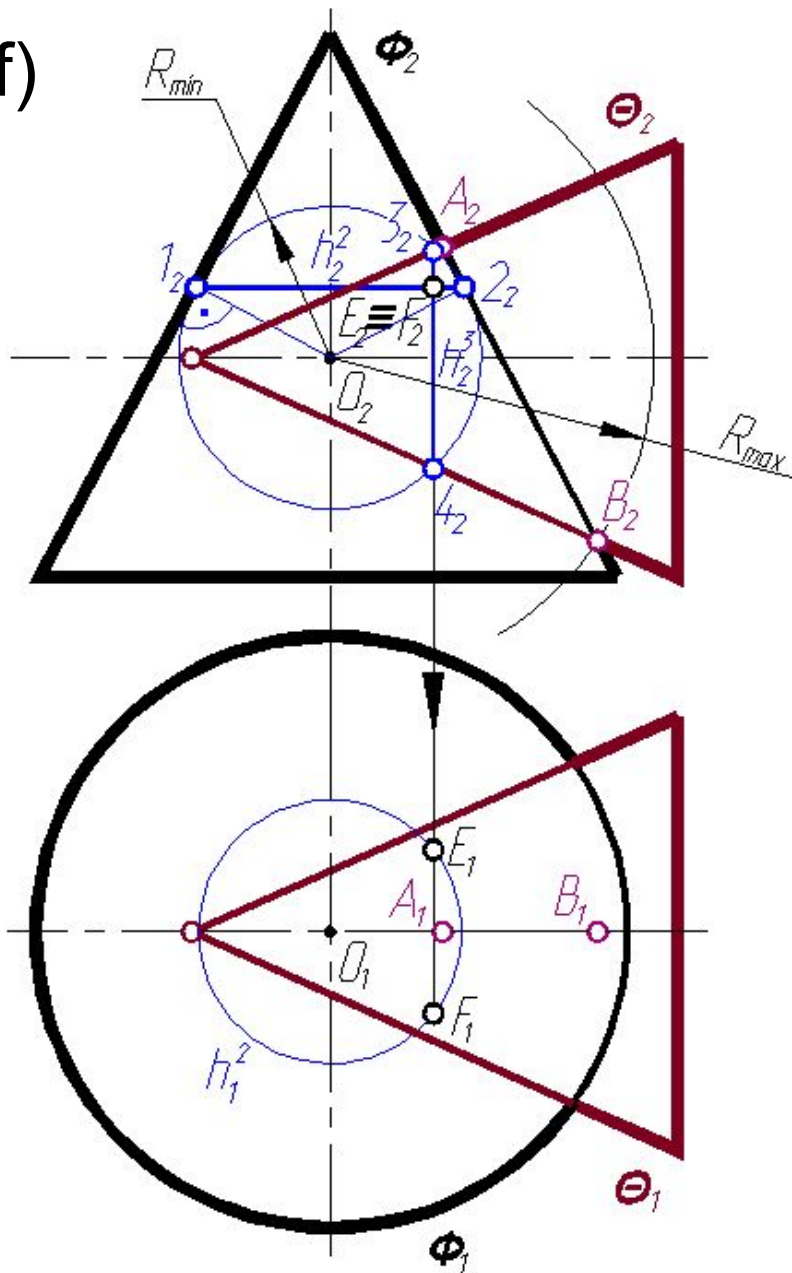
Проводим  $окр.(O_1 \rightarrow R^2$  (от оси до  $1_2$ ) ( $h_1^2$ ).

e)



Сфера-посредник пересекает поверхность конуса  $\Theta$  по окружности  $h^3$ , фронтальная проекция которой выродится в линию  $3_2 4_2$ :  
 $окр.(O_2 \rightarrow R_{min}) \cap \Theta_2 = 3_2 4_2$

f)

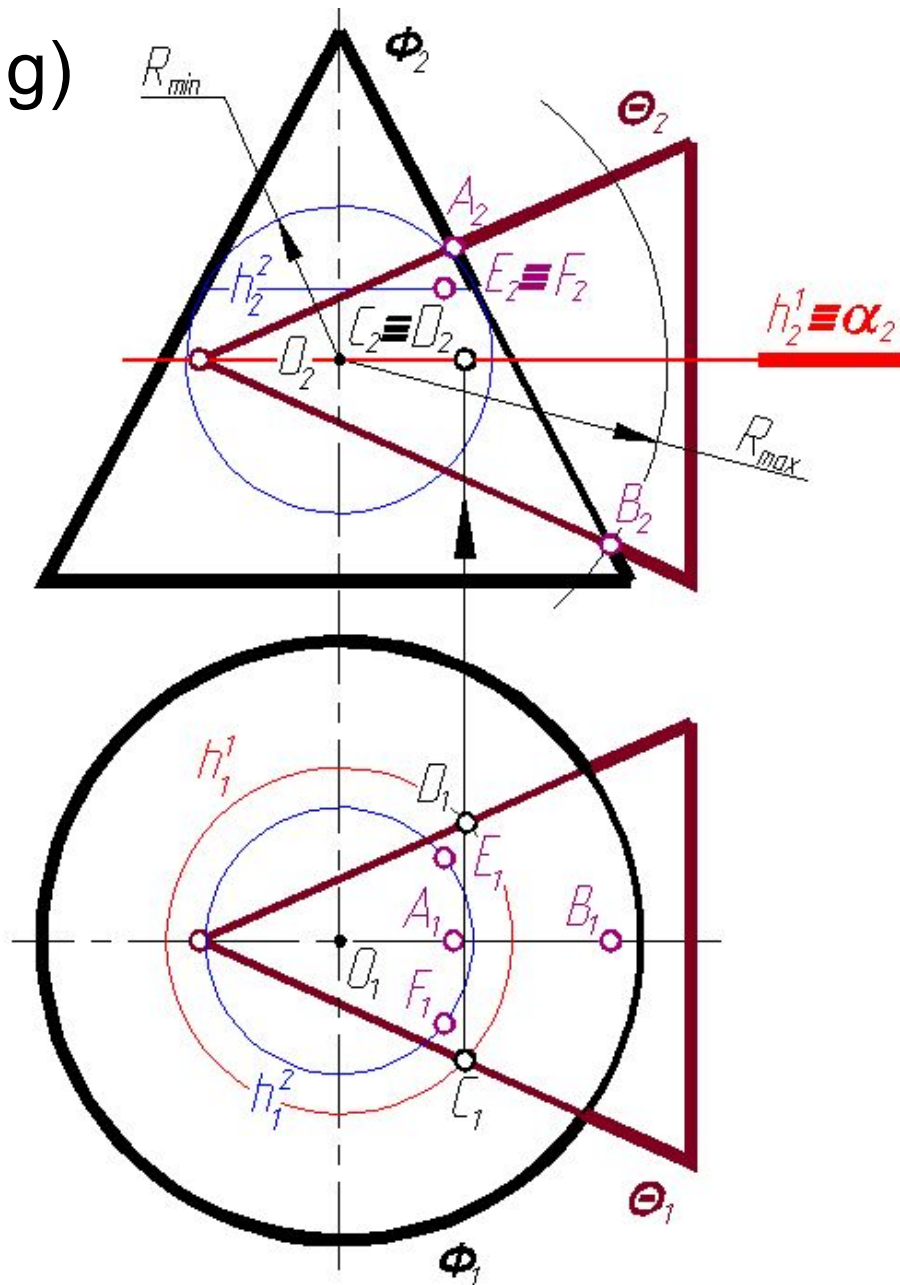


На пересечении линий  $1_2 2_2$  и  $3_2 4_2$  отмечаем точки  $E_2 \equiv F_2$ , принадлежащие линии пересечения поверхностей.

$$1_2 2_2(h^2_2) \cap 3_2 4_2(h^3_2) = E_2 \equiv F_2;$$

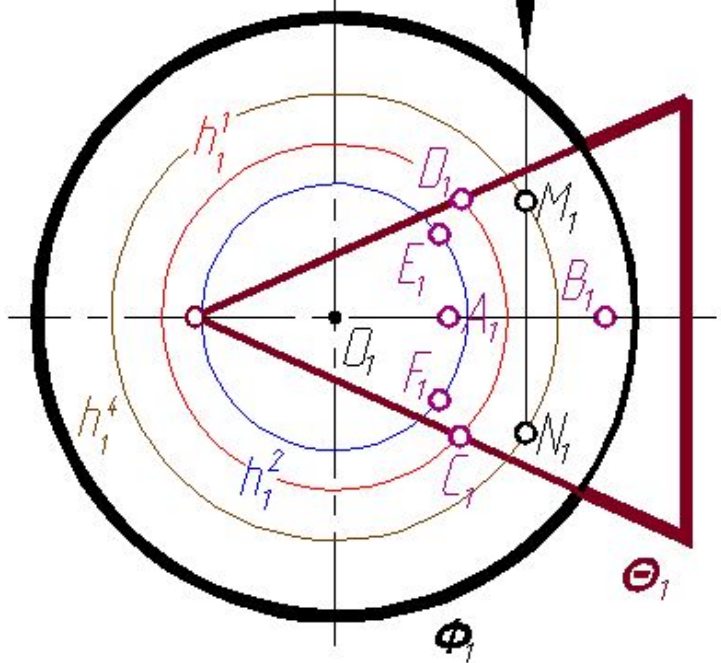
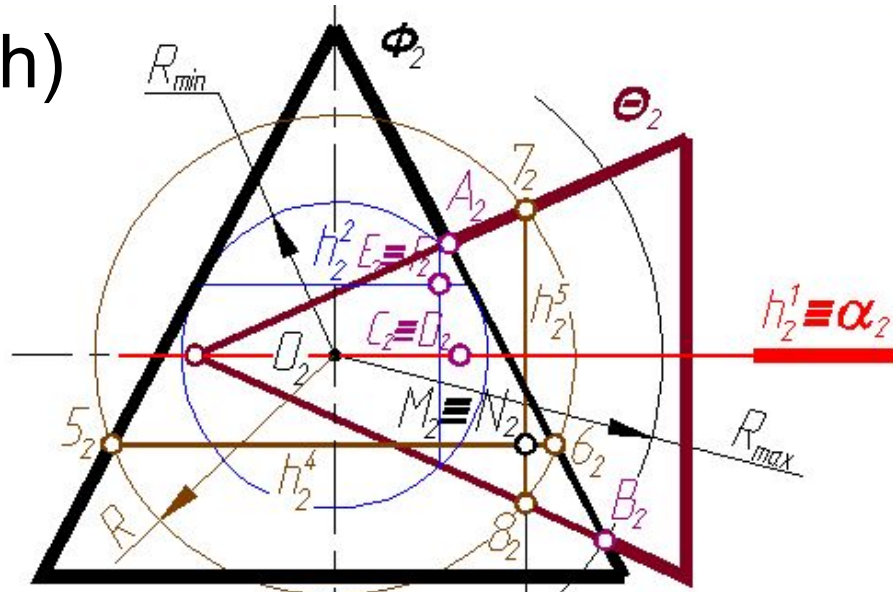
По линиям проекционной связи определяем горизонтальные проекции точек  $E$  и  $F$ :  $E_1$  и  $F_1 \in h^2_1$ .

g)



4 Точки **C** и **D**, являющиеся точками смены видимости на  $\Pi_1$ , строим с помощью вспомогательной плоскости-посредника горизонтального уровня  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ).

h)



5 Определяем промежуточные точки линии пересечения. Проводим концентрическую сферу-посредник с центром в точке  $O_2$ , радиуса  $R$ :

$окр.(O_2 \rightarrow R) \cap \Phi_2 = 5_2 6_2$ ;

$окр.(O_2 \rightarrow R) \cap \Theta_2 = 7_2 8_2$ ;

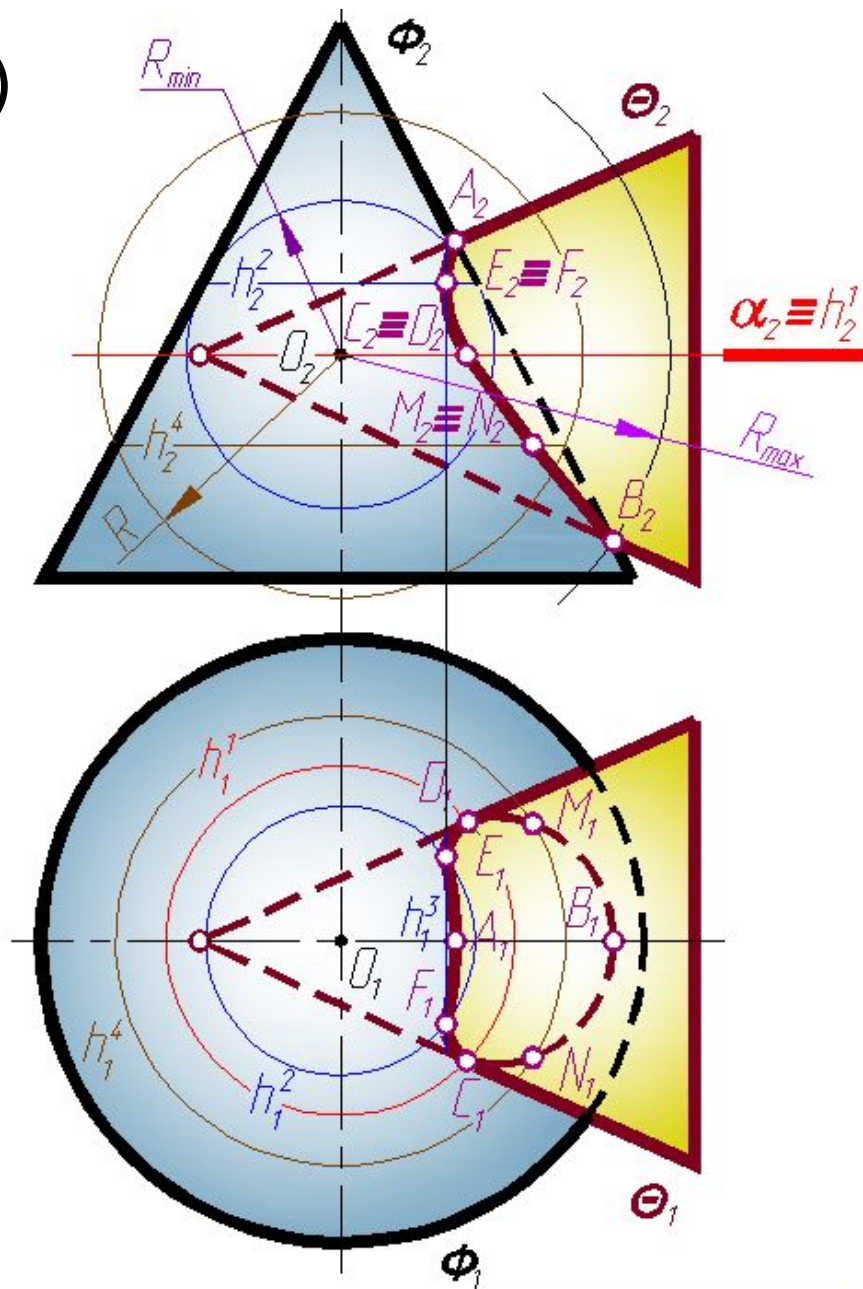
$5_2 6_2 (h_2^4) \cap 7_2 8_2 (h_2^5) = M_2 \equiv N_2$ ;

Проводим  $окр.(O_1 \rightarrow R^4)$  (от оси до  $5_2$ ) ( $h_1^4$ );

$M_1$  и  $N_1 \in h_1^4$ .

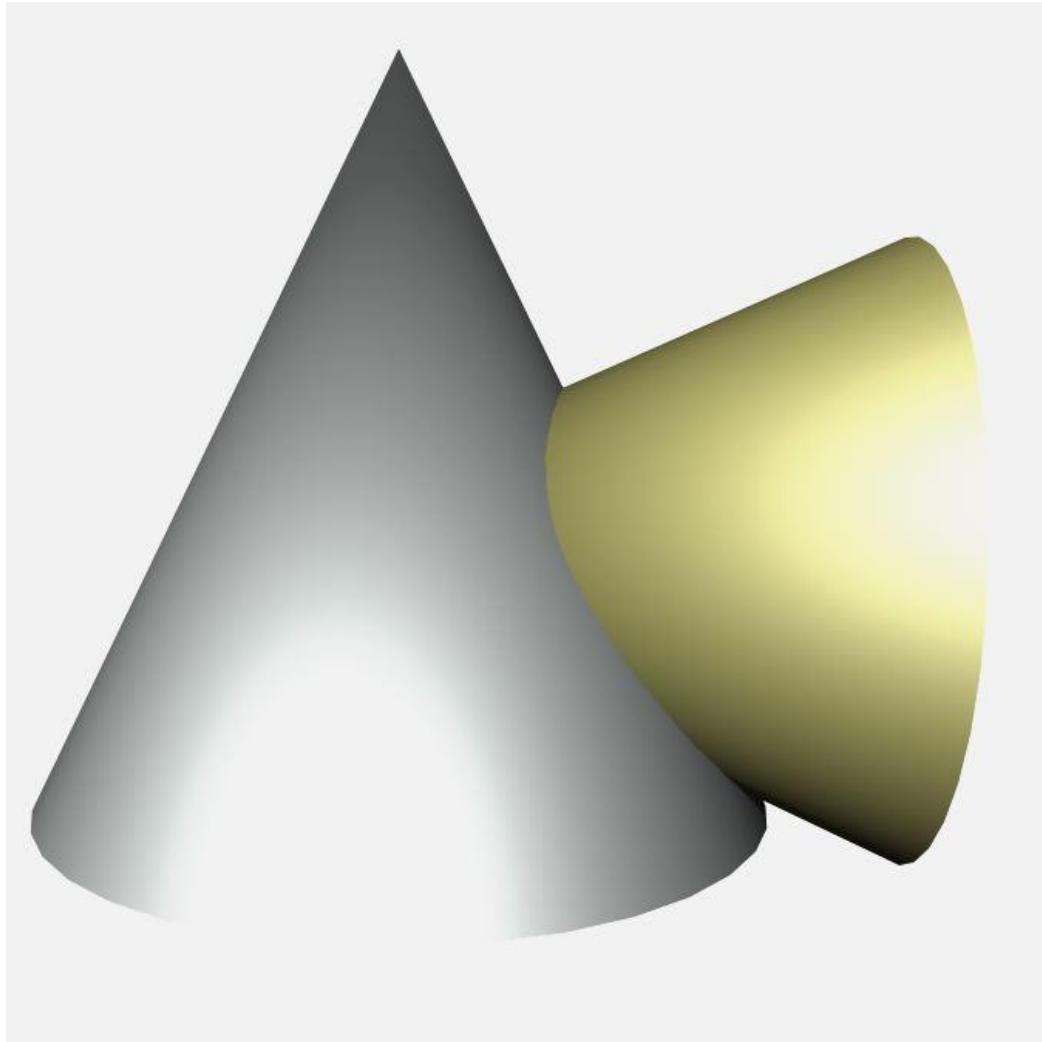


i)



- 6 Соединяем полученные точки кривой;
- 7 Определяем видимость.

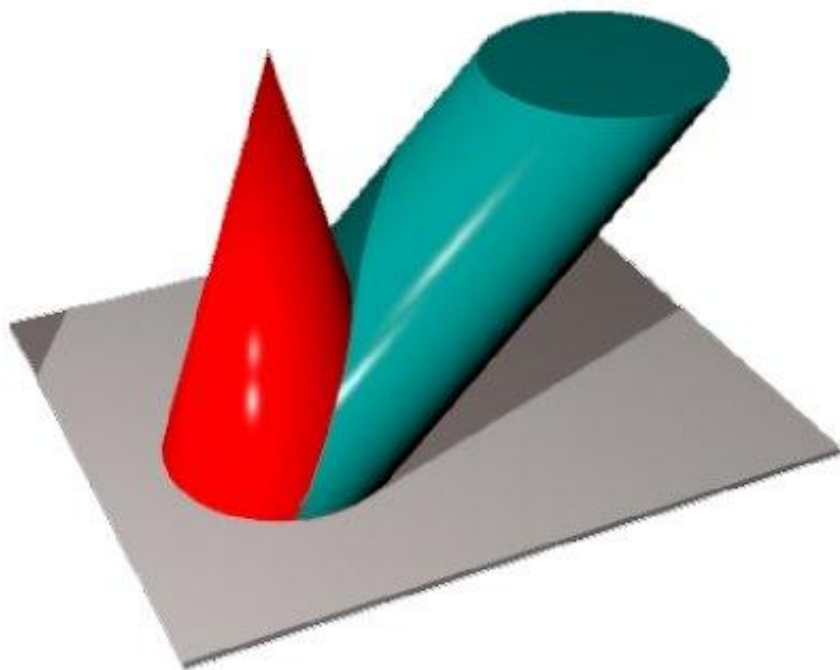
j)



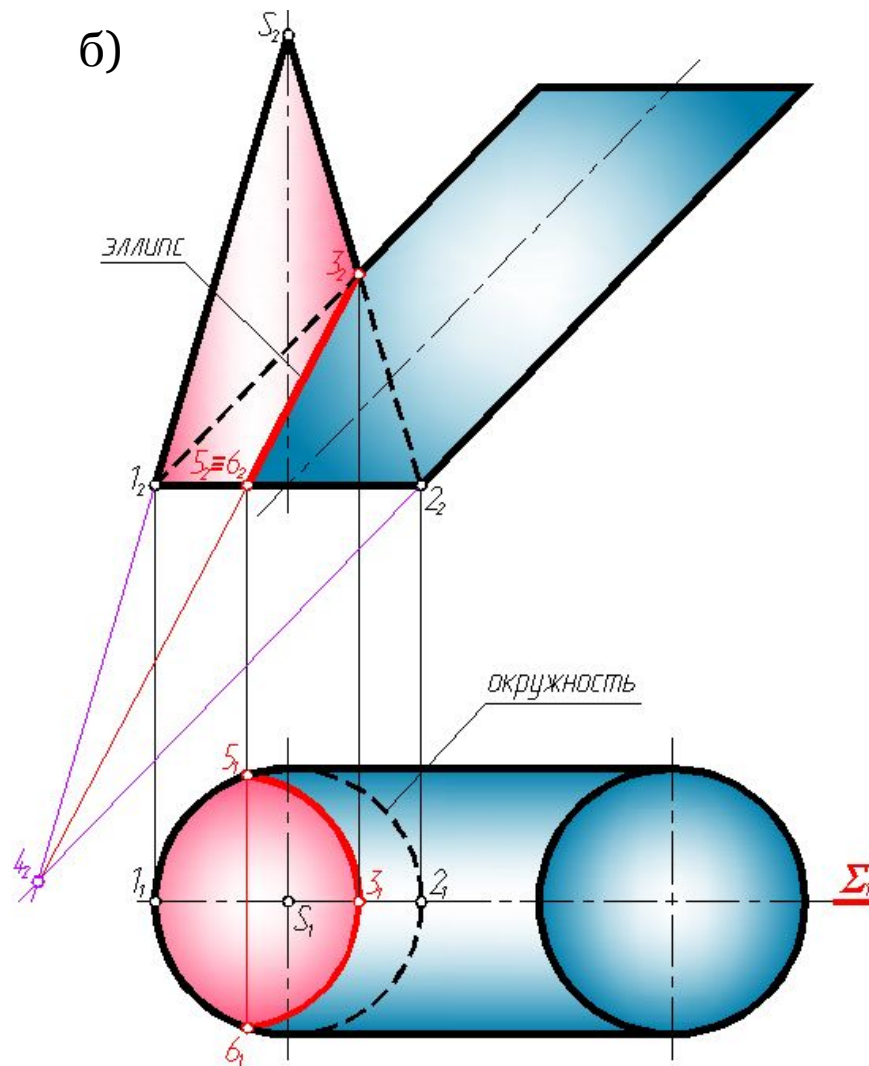


## Частный случай пересечения поверхностей вращения

а)

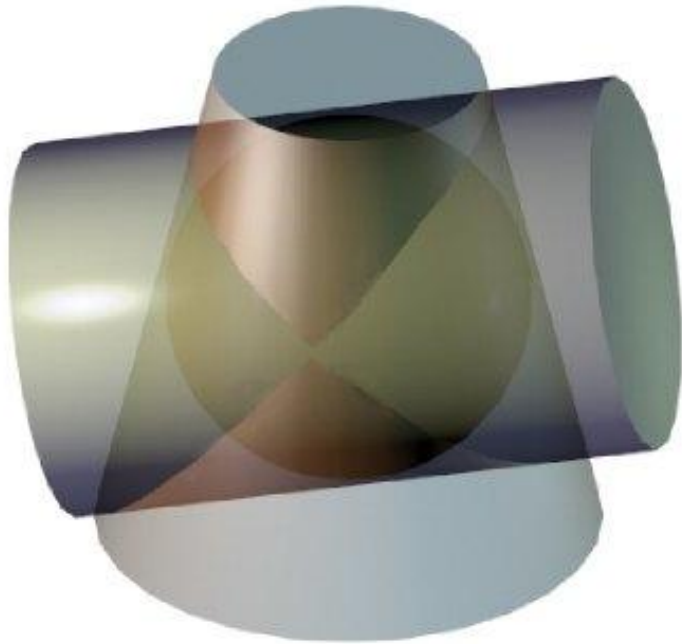


б)

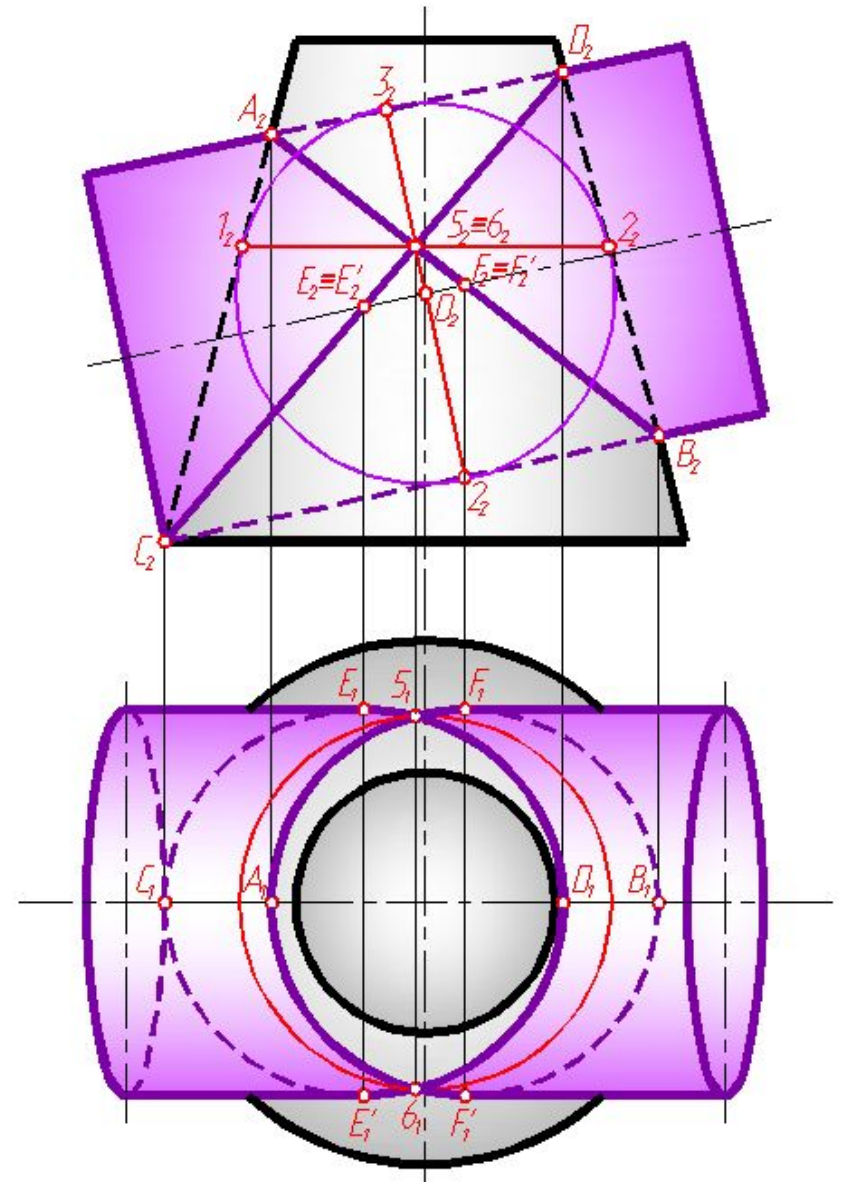


**Теорема 1.** Если две поверхности вращения второго порядка пересекаются по одной плоской кривой (1 – 5 – 2 – 6), то они пересекаются еще по одной кривой (3 – 5 – 4 – 6), которая тоже будет плоской.

a)



б)



**Теорема 2 (Теорема Монжа).**

Две поверхности вращения второго порядка, вписанные в третью поверхность вращения второго порядка, или описанные вокруг нее, пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка.