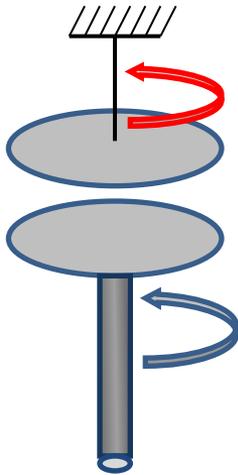


Течение вязких жидкостей

1. Вязкость жидкостей. Формула Ньютона

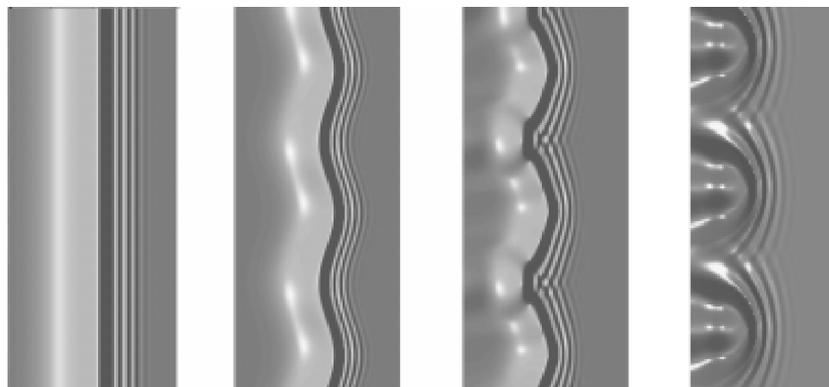
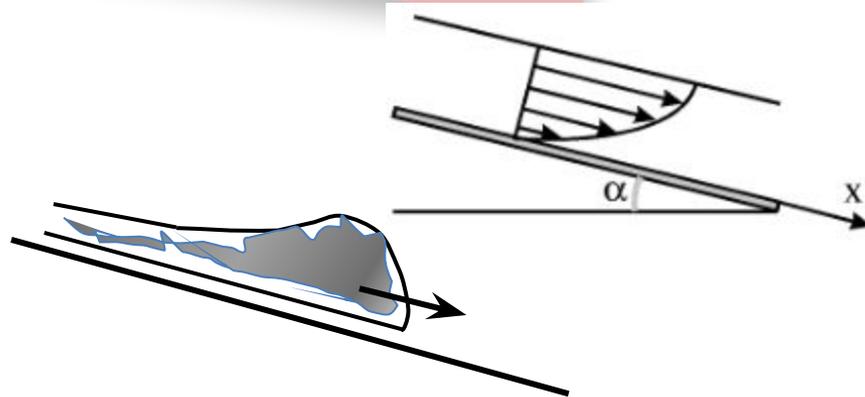
Простые
опыты:



Передача вращения через воздушный зазор

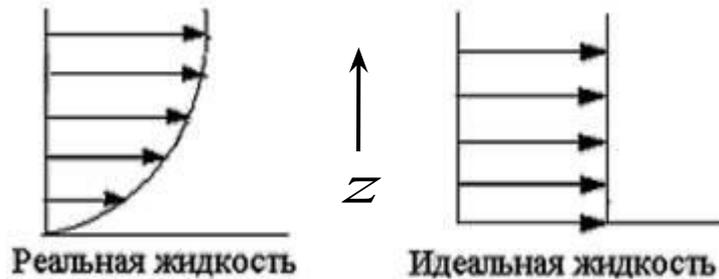
- Вязкость – причина сопротивления движению тел и течениям жидкостей

Валик натекания жидкости

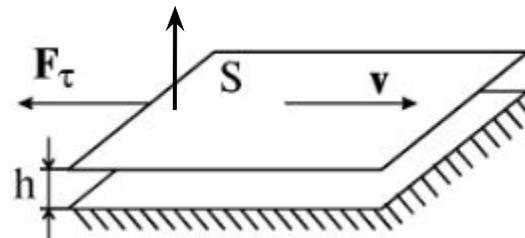


Сила вязкого трения

Профиль скоростей течения жидкости



Опыты
Ньютона



Торможение жидкости со
стороны
подстилающей поверхности

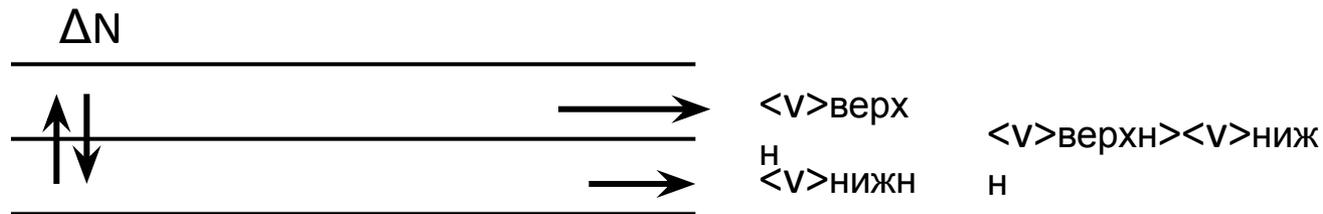
Вязкость дополнительно к давлению для
передачи воздействий «включает» касательные
напряжения!

$$F_{\tau} = \eta S \frac{v}{h}$$

$$\frac{F_{\tau}}{S} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z}$$

Причина вязких сил – межмолекулярное взаимодействие

Молекулярно-кинетическое истолкование силы вязкого трения



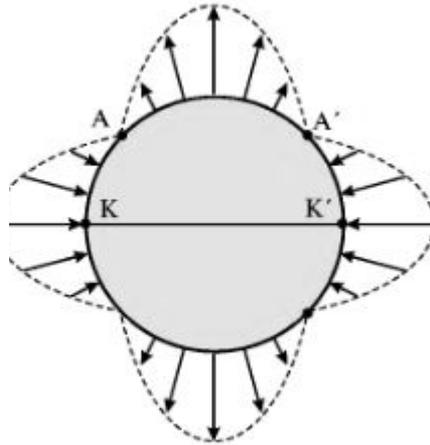
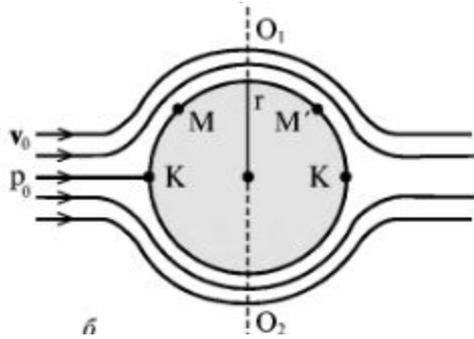
В среднем за Δt происходит переход одинакового числа ΔN молекул между слоями. Но «верхние» молекулы имеют в среднем большую скорость

$\langle v \rangle$ по потоку, чем нижние и за Δt передают нижней части потока импульс Δp .

Соответственно, из-за этого изменения импульса по потоку верхний слой тормозится нижним силой $F \sim \Delta p / \Delta t$ – направлена вдоль границы, так как характеризует изменение импульса по потоку.

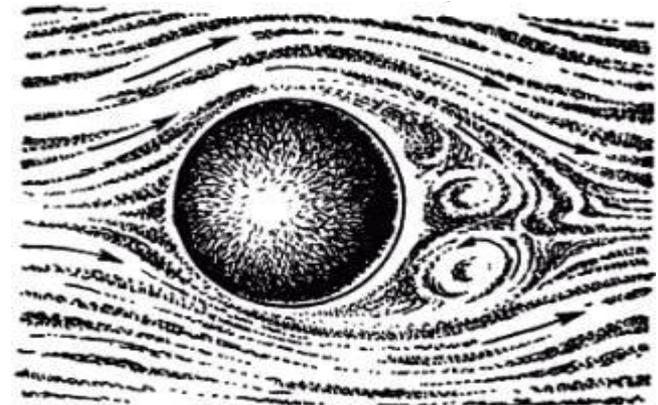
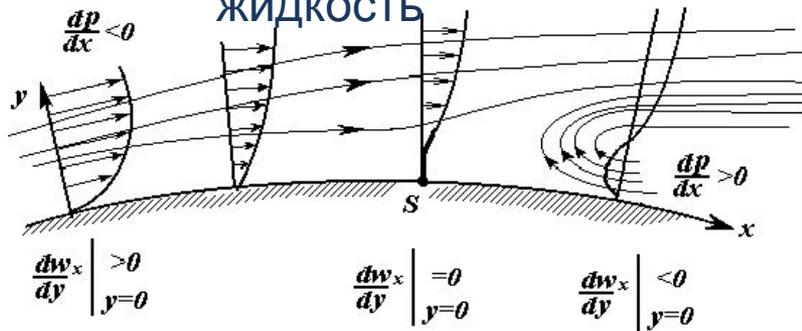
Сила лобового

с



Идеальная жидкость: картина течения и симметричная эпюра давления, избыточного над равновесным \Rightarrow результирующая сила $F \equiv 0$ (отсутствие сопротивления движению),

Вязкая жидкость

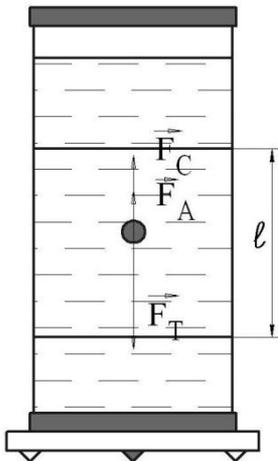


Образование тонкого пограничного слоя при обтекании тела и вихреобразование



Асимметрия обтекания, перепад давления по потоку, лобовое сопротивление

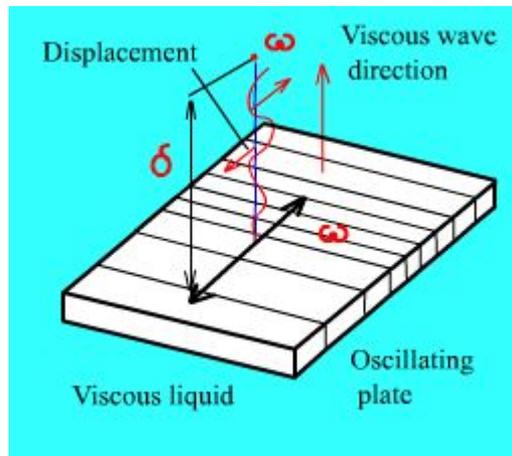
Сила сопротивления: малые скорости $F \sim v$, шар $F = 6\eta\pi Rv$ - Стокс



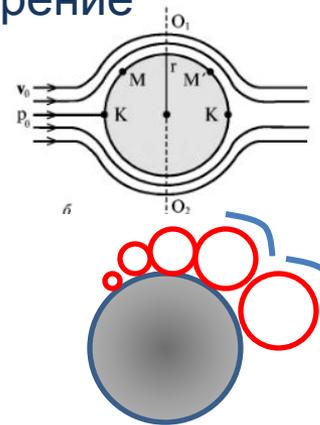
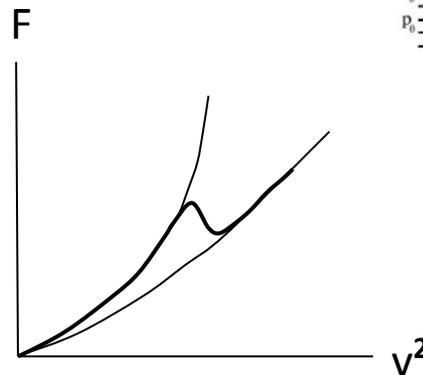
Метод Стокса
измерения

вязкости жидкости
Умеренные и большие
скорости движения: $F \sim v^2$

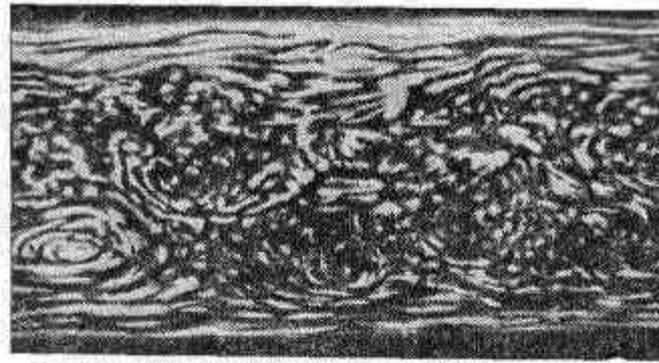
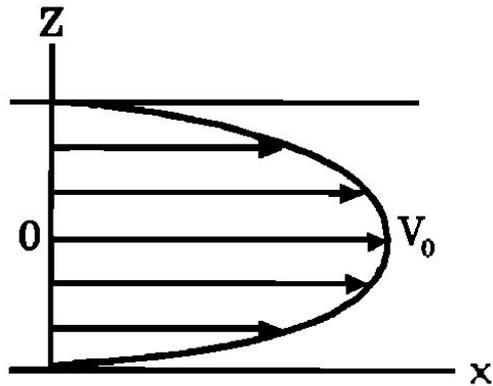
Кризис сопротивления – переход
ламинарного течения в турбулентный



Вибрационное измерение
вязкости



Ламинарные и турбулентные течения



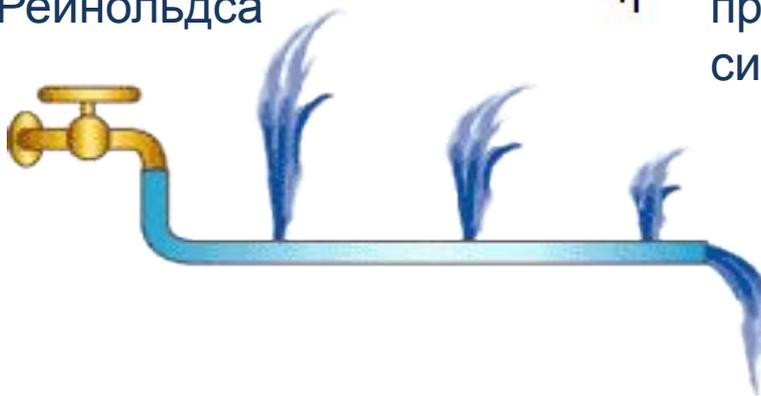
Ламинарное течение Пуазейля в узких трубах

Фотография турбулентного течения в трубе

Число Рейнольдса

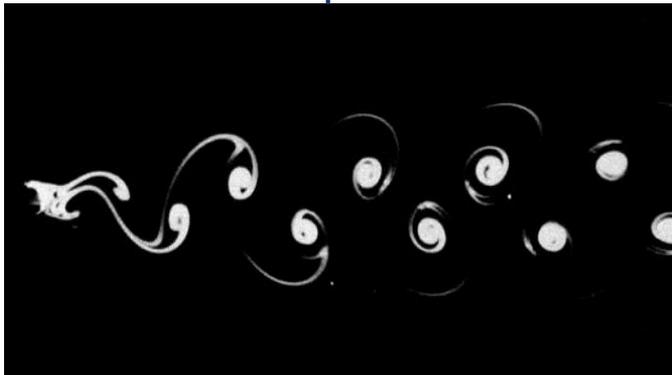
$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}$$

сопоставляет масштаб проявления сил инерции к силам вязкости



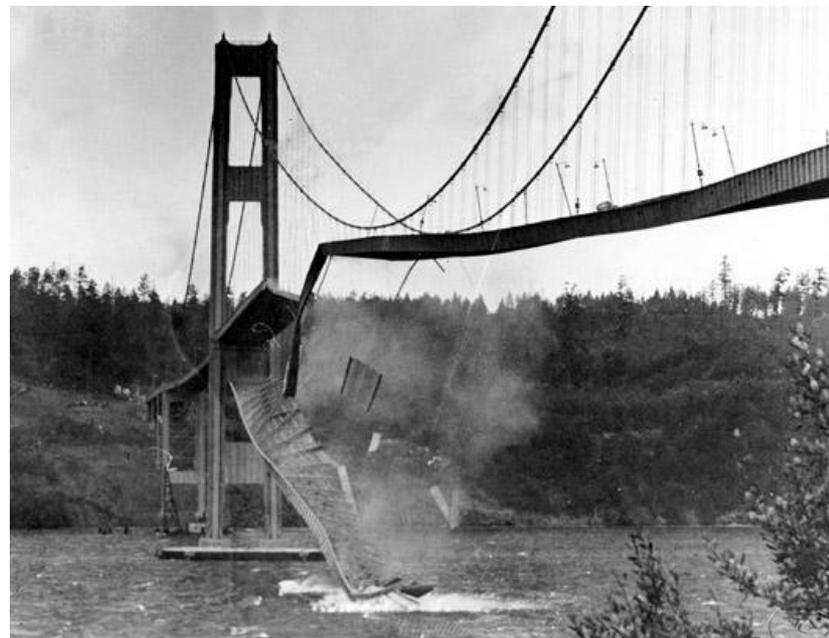
Падение напора из-за силы сопротивления

Дорожка Кармана при обтекании препятствия

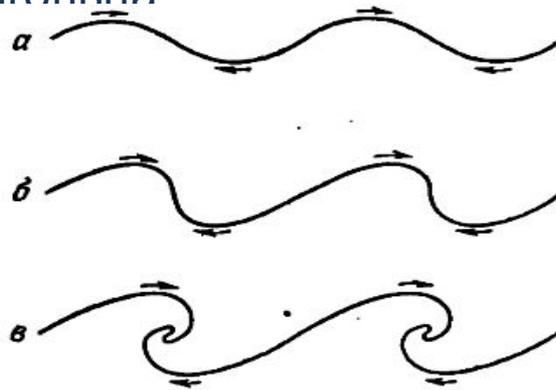


Эоловы тона

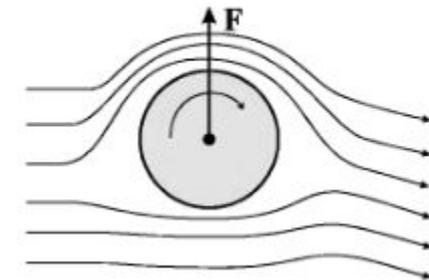
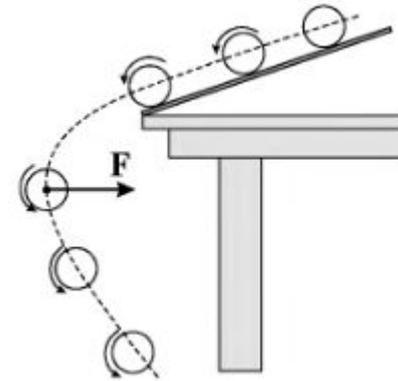
Такомская катастрофа



Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца



Эффект Магнуса



неустойчивости: Рэля-Тейлора, Мешкова-Рихтмайера

2. Тензор плотности потока импульса, тензор напряжения

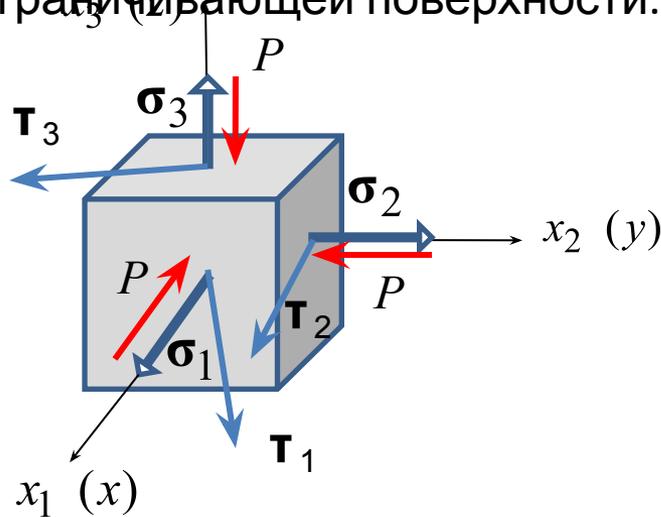
1) ? Как учесть вязкость (вязкие силы Ньютона) в уравнениях гидродинамики. В механике сила – результат изменения импульса за время ее действия. В гидродинамике из-за непрерывного распределения и течения вещества приходится рассматривать не сам импульс, а связанную с ним величину – *поток импульса*, причем соотносить его единице объема среды, т. е. рассматривать *плотность потока импульса*.

2) Идеальная жидкость: плотность потока импульса Π_{ik} - это тензор

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik}$$

который характеризует *обратимый* перенос импульса из-за перемещения частиц жидкости и действия сил давления (2-ой член). По смыслу P – сила, действующая на единицу площади по нормали к ней. Сила вязкости – это тоже сила, действующая на единицу площади поверхности, но только приложенная вдоль (касательно) к поверхности. Основываясь на этой общности силы давления и вязкости имеет смысл рассматривать с единой позиции.

3) Еще отличие между P и $F\tau/S$: давление характеризует внешнее воздействие на выделенный элемент жидкости, поверхностные силы вязкости, наоборот, характеризуют касательное, тормозящее воздействие со стороны элемента жидкости на окружающие ее части по разграничивающей поверхности.



При описании движения элемента жидкости необходимо рассматривать силы, относящиеся к элементу. Это силы вязкости \mathbf{T} и силы $\boldsymbol{\sigma}$ уравнивающие (по 3-му закону Ньютона) давление. Для них, как и для касательных сил вязкости \mathbf{T} , необходимо указывать номер i оси нормальной к площадке элемента. В свою очередь компоненты каждого из векторов

$\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{iz})$ также придется нумеровать и вся их совокупность образует тензор – тензор напряжения σ_{ik} .

Для идеальной жидкости имеем (с учетом антинаправленности $\sigma_{ik} \uparrow \downarrow P$)

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$$

и тогда

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$$

Компоненты вязкостных сил также образуют своими составляющими тензор τ_{ik} , который называют тензором вязких напряжений. При учете сил вязкости он добавляется к тензору напряжений, т.е. *переход от идеальной жидкости к вязкой заключается в замене* $\sigma_{ik} \Rightarrow \sigma_{ik} + \tau_{ik}$

4) ? Какой вид имеет тензор τ_{ik} Основные соображения:

- Из наблюдений \longrightarrow вязкое трение проявляется только при относительном перемещении слоев

жидкости, т.е. $\tau_{ik} = f\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$

- Из закона Ньютона $\frac{F_\tau}{S} = \tau = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \Rightarrow$ эта зависимость

(как правило) – линейная: $\tau_{ik} \propto \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$

- При равномерном вращении с угловой скоростью $\Omega = \text{const}$ жидкость движется как целое и вязкое трение отсутствует. Поскольку $v = \Omega \times r$, то добиться обнуления $\tau_{ik} \equiv 0$ можно при условии, что тензор τ_{ik} образуется обязательно симметричной комбинацией производных компонент скорости

v по координатам, т. е. $\tau_{ik} \propto \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$

В самом общем случае имеем (учет изотропии и вклада сжимаемости)

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

5) Свойства тензора: симметричность $\tau_{ik} = \tau_{ki}$

Вследствие этого отсутствует необходимость рассмотрения уравнения моментов.

Коэффициент вязкости η и коэффициент второй вязкости ζ , возникающей вследствие сжимаемости жидкости, всегда положительны.

Современные тенденции – учет микроструктуры жидких сред
Эффективный тензор τ_{ik} становится несимметричным,
Дополнительно к уравнению движения приходится рассматривать уравнение моментов.

3. Уравнение Навье-Стокса

Уравнение Навье-Стокса (Навье, 1827 г. - из модельных представлений; Стокс, 1845 – не учел вторую вязкость) обобщает ур-е Эйлера на случай (классических) вязких жидкостей

В обобщенном виде ур-е движения $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$

с учетом выражений

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$$

и $\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$ дает

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_k}}_{-\frac{\partial P}{\partial x_i}} \delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \zeta \delta_{ik} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

$\nabla^2 v_i$

$\frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \mathbf{v})$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \nabla^2 v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \mathbf{v})$$



$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\text{div } \mathbf{v})$$