СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления - это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

В зависимости от способа изображения чисел системы счисления делятся на **позиционные** и **непозиционные**.

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Количество (р) различных символов, используемых для изображения числа в позиционной системе счисления, называется **основанием системы счисления**.

Так, например, алфавит двоичной системы счисления содержит всего два символа: 0 и 1, а алфавит шестнадцатеричной системы - 16 символов: десять арабских цифр и шесть латинских букв (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Любое число **N** в позиционной системе счисления можно представить в следующем виде:

$$N_p = \pm (a_{k-1} \cdot p^{k-1} + a_{k-2} \cdot p^{k-2} + \ldots + a_0 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot p^{-m})$$

Такой вид записи числа называют развернутой формой записи числа,

где p - основание системы счисления;

a_i - цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

k - количество разрядов в целой части числа;

m - количество разрядов в дробной части числа.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: p=10.

Алфавит: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Десятичная система счисления наиболее распространенная система счисления в мире. Используется при повседневном счете. Для записи чисел используются арабские цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Пример:

$$765{,}345_{10}=7\cdot 10^{2}+6\cdot 10^{1}+5\cdot 10^{0}+3\cdot 10^{-1}+4\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}$$

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: p=2.

Алфавит: 0,1.

Число в двоичной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 2), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример:

$$1011{,}01_2=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}$$

ВОСЬМЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: p=8.

Алфавит: 0,1,2,3,4,5,6,7.

Число в восьмеричной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 8), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример:

$$567{,}12_8=5\cdot 8^2+6\cdot 8^1+7\cdot 8^0+1\cdot 8^{-1}+2\cdot 8^{-2}$$

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: p=16.
Алфавит: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A*,*B*,*C*,*D*,*E*,*F*.

Здесь только десять цифр из шестнадцати имеют общепринятое обозначение 0,1,...,9. Для записи остальных цифр (10,11,12,13,14 и 15) обычно используются первые шесть букв латинского алфавита.

Пример:

$$10FC_{16}=1\cdot 16^3+0\cdot 16^2+F\cdot 16^1+C\cdot 16^0$$

ПЕРЕВОД ЧИСЛА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ

1) Представим двоичное число $10110,101_2$ в виде суммы слагаемых, а затем произведем их сложение:

$$\mathbf{10110,101_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}=16+0+4+2+0+0,5+0+0,125=22,625_{10}}$$

Таким образом, $10110,101_2=22,625_{10}$

2) Представим шестнадцатеричное число $5D8,AC_{16}$ в виде суммы слагаемых, а затем произведем их сложение:

$$\mathbf{5D8,AC_{16}=5\cdot 16^2+13\cdot 16^1+8\cdot 16^0+10\cdot 16^{-1}+12\cdot 16^{-2}=1280+208+8+0,625+0,046875=1496,671875_{10}}$$

Таким образом, $5D8,AC_{16}=1496,671875_{10}$

ПЕРЕВОД ЧИСЛА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ

3) Вычислим сумму чисел 2F16, 2324 и 538, представив результат в десятичной системе счисления.

Переведем все числа в десятичную систему счисления, и сложим их:

$$\mathbf{2F_{16}=2\cdot 16^1+15\cdot 16^0=32+15=47_{10}}$$

$$\mathbf{232_4=2\cdot 4^2+3\cdot 4^1+2\cdot 4^0=32+12+2=46_{10}}$$

$$\mathbf{53_8=5\cdot 8^1+3\cdot 8^0=40+3=43_{10}}$$

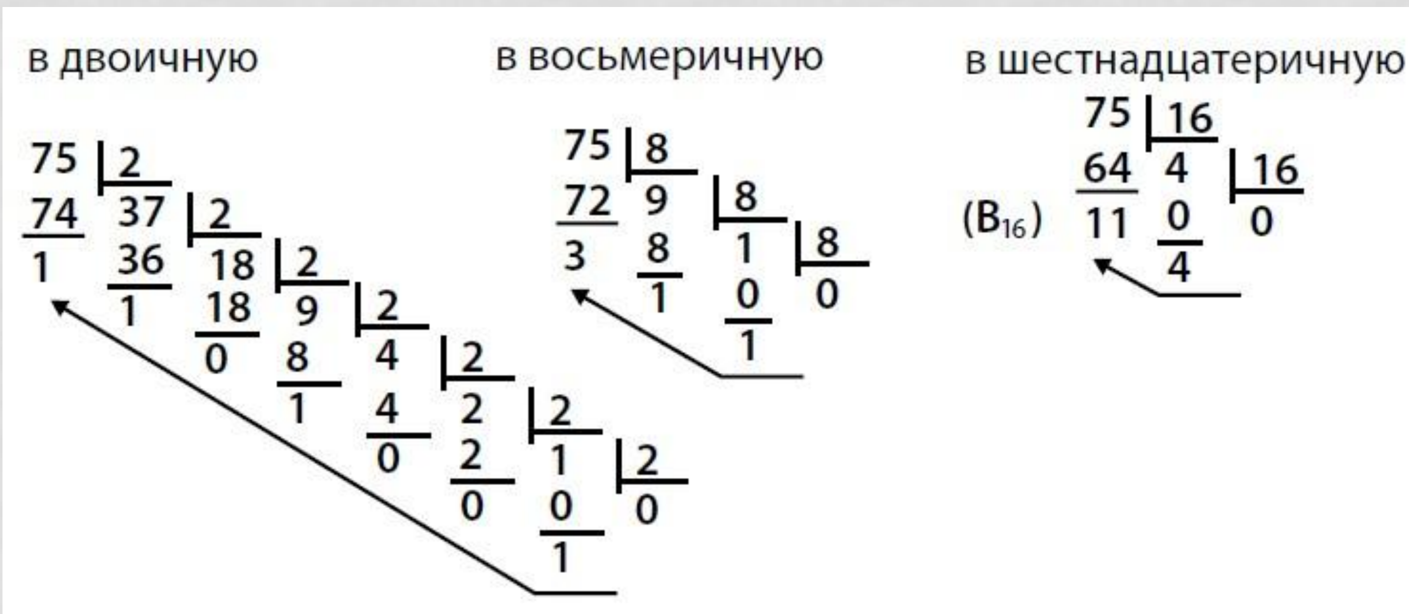
$$\mathbf{47_{10}+46_{10}+43_{10}=136_{10}}$$

Таким образом, $2F_{16}+232_4+53_8=136_{10}$

ПЕРЕВОД ЧИСЛА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ С С В ДРУГУЮ ПОЗИЦИОННУЮ СИСТЕМУ

Пример:

1. Переведем число 75 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную



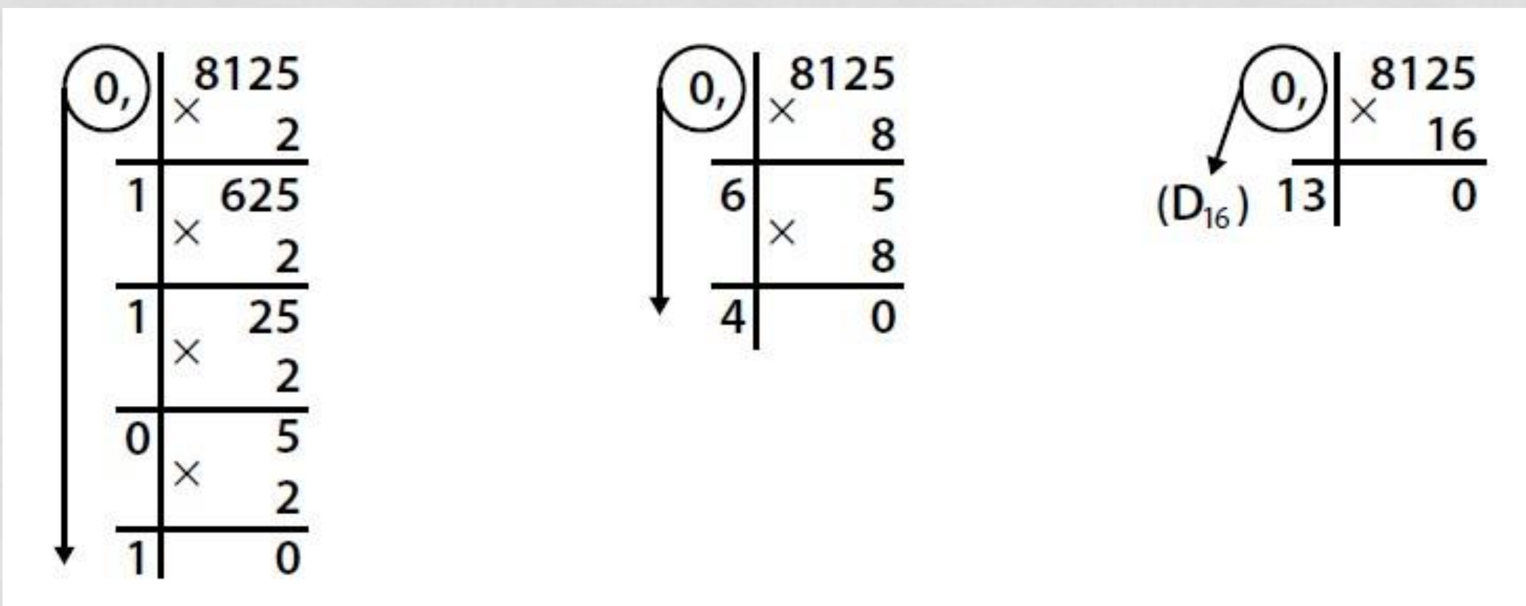
<u>Замечание</u>: остаток 11_{10} записывается шестнадцатеричной цифрой B_{16}

Ответ: $\mathbf{75_{10}=1001011_2=113_8=4B_{16}}$

ПЕРЕВОД ЧИСЛА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ С С В ДРУГУЮ ПОЗИЦИОННУЮ СИСТЕМУ

Пример:

2. Переведем число 0,8125 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную:



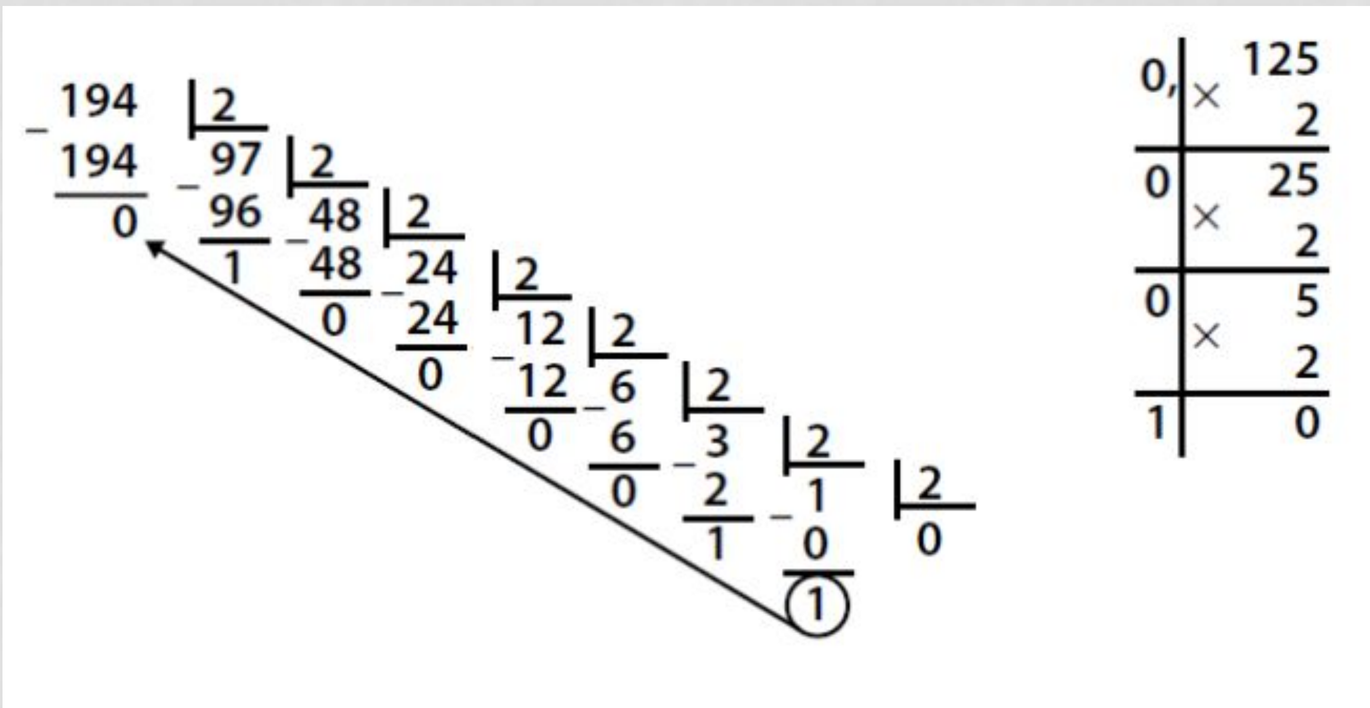
<u>Замечание</u>: число 13_{10} записывается шестнадцатеричной цифрой D16

Ответ**: $\mathbf{0{,}8125_{10}=0{,}1101_2=0{,}64_8=0{,}D_{16}}$**

ПЕРЕВОД ЧИСЛА ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ С С В ДРУГУЮ ПОЗИЦИОННУЮ СИСТЕМУ

Пример:

3. Переведем число 194,125 из десятичной системы в двоичную:



Ответ: $194{,}125_{10}=11000010{,}001_{2}$

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ВОСЬМЕРИЧНУЮ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ И ОБРАТНО

Для этого удобно использовать таблицу соотношений чисел в системах счисления с основаниями 10 , 2 , 8 и 16 (таблица для решения задач, списывать в тетрадь не надо):

Основание системы счисления			
10	**2**	**8**	**16**
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ВОСЬМЕРИЧНУЮ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ И ОБРАТНО

Примеры:

$734{,}46_8 = 111\ 011\ 100{,}100\ 110_2$

$A0{,}F8_{16} = 1010\ 0000{,}1111\ 1000_2$

$1010\ 1001{,}1011\ 1000_2 = A9,\ B8_{16}$

Дано: $A_8 = 275{,}034$. Найти A_{16}

Решение:

$A_8 = 2\ 7\ 5,\ 0\ 3\ 4$

$A_2 = 010\ 111\ 101{,}000\ 011\ 100$

$A_2 = 1011\ 1101{,}0000\ 1110$

$A_{16} = BD{,}0E$

Ответ: A16=BD,0E

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Если сумма складываемых цифр больше или равна основанию системы счисления, то единица переносится в следующий слева разряд.

Таблица сложения в **двоичной системе**:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Таблица сложения в **восьмеричной системе**:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Пример:

1. Сложим числа 15 и 6 в различных системах счисления.

<u>Решение.</u> Переведем числа 15 и 6 в двоичную и восьмеричную системы счисления и выполним сложение

Десятичная: $15_{10} + 6_{10}$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;} \\ 15 \\ +\;\;6 \\ \hline 21 \end{array}$$

5+6=11=10+1

1+1=2

Двоичная: $1111_2 + 110_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111\;\;} \\ +\;1111 \\ 0110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

1+0=1

1+1=2=10

1+1+1=3=11

1+1=2=10

Восьмеричная: $17_8 + 6_8$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;} \\ 17 \\ +\;\;6 \\ \hline 25 \end{array}$$

7+6=13=8+5

1+1=2

Ответ: $\mathbf{15+6=21_{10}=10101_2=25_8}$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

2. Вычислим сумму чисел 43_8 и 56_{16}. Результат представим в восьмеричной системе счисления, используя поразрядный способ перевода разложением на тэтрады и триады:

$$\begin{array}{lcc}
56_{16} = & 5 & 6 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
x = & 101 & 0110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
a_2 = & 1 & 010 & 110 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
a_8 = & 1 & 2 & 6
\end{array}$$

Пользуясь правилами сложения в восьмеричной системе счисления, получаем:

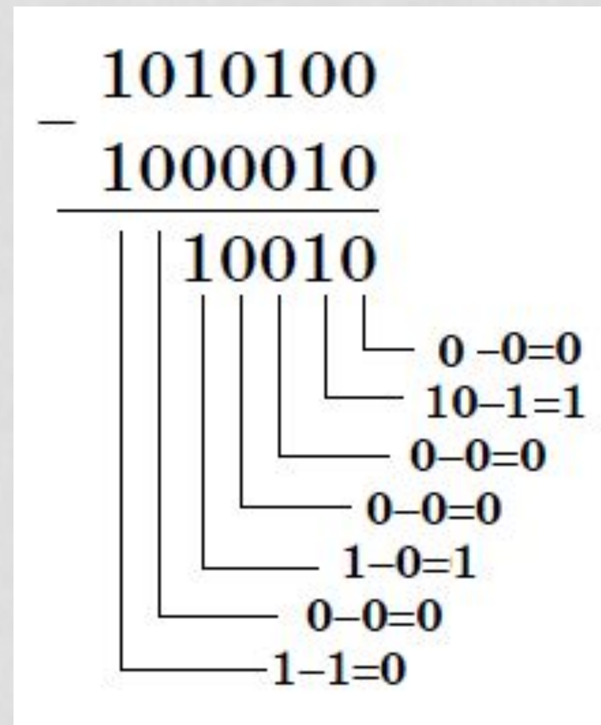
$$\begin{array}{r}
1 \\
43_8 \\
+\,126_8 \\
\hline
171_8
\end{array}
\qquad 3 + 6 = 9 = 8 + 1$$

Ответ: $\mathbf{43_8 + 56_{16} = 171_8}$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

При вычитании из меньшего числа большего производится заем из старшего разряда.

Вычислим разность X−Y двоичных чисел, если
X = 1010100_2 и Y=1000010_2. Результат представим в двоичном виде.



Ответ: **10010_2**

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Таблица умножения в двоичной системе:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица умножения в восьмеричной системе:

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	11	25	34	43	52	61

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Пример:

Перемножим числа 15 и 12.

Десятичная

$15_{10} \cdot 12_{10}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 12 \\ \hline 30 \\ +\ 15 \\ \hline 180 \end{array}$$

Двоичная

$1111_2 \cdot 1100_2$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times\ 1100 \\ \hline 1111 \\ +\ 1111 \\ \hline 10110100 \end{array}$$

Восьмеричная:

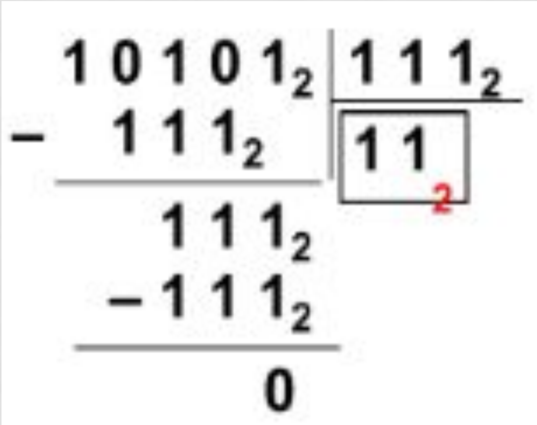
$17_8 \cdot 14_8$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 14 \\ \hline 74 \\ +\ 17 \\ \hline 264 \end{array}$$

Ответ: $15 \cdot 12 = 180_{10} = 10110100_2 = 264$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Деление чисел в системе счисления с произвольным основанием выполняется так же, как и в десятичной системе счисления. А значит, нам понадобятся правила умножения и вычитания чисел в системе счисления с основанием. Давайте разберем деление в двоичной системе.



ВЫПОЛНИТЬ ЗАДАНИЯ

1. Запиши число 122_8 в десятичной системе счисления.
2. Представь двоичное число 110100111 в восьмеричной системе счисления.
3. Чему равно произведение чисел $K=1023_4$ и $P=15_7$? Ответ запиши в восьмеричной системе счисления. $K \cdot P=$