К.Ю. Поляков

Линейное (и нелинейное) программирование в задачах ЕГЭ по информатике

Постановка задачи

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - x \neq 5) \lor (A < 2x^3 + y) \lor (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Задача 2.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \vee \underbrace{(x > 20) \vee (y > 30)}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$$

Задача 1. Аналитическое решение

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \rightarrow (y + 2x < A)$$

$A > y + 2x$ для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$A > \max(y + 2x)$ для $\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20)}_{\text{только } x} \wedge \underbrace{(y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{только } y}$

максимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$$A > \max(y + 2x) = \max(y) + 2 \cdot \max(x)$$

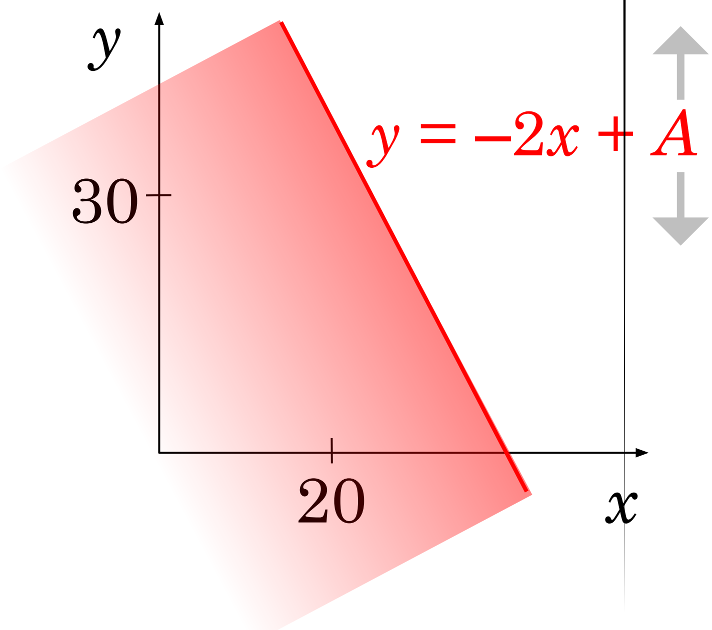
$$A > 30 + 2 \cdot 20 = 70$$

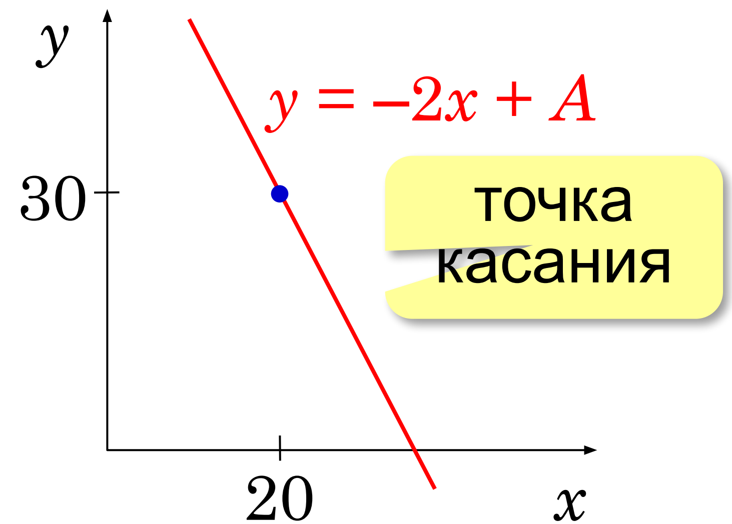
$$A_{\min} = 71$$

Задача 1. Графическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{прямоугольник}} \rightarrow (y + 2x < A)$$

$$(y < -2x + A)$$





$$30 < -2\cdot 20 + A$$

$$70 < A \qquad \boxed{A_{min} = 71}$$

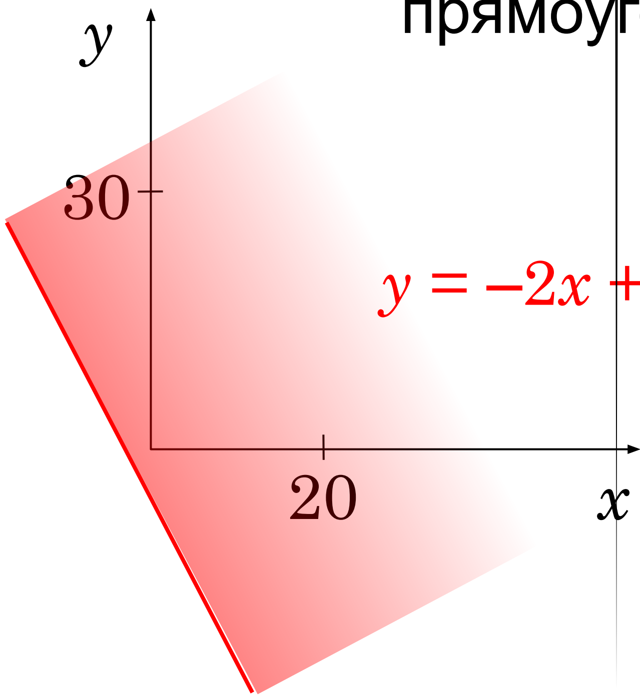
Задача 1а. Графическое решение

Найти: $A_{\max}$

$\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{прямоугольник}} \rightarrow$

$(y + 2x > A)$

$(y > -2x + A)$



$1 > -2\cdot 1 + A$

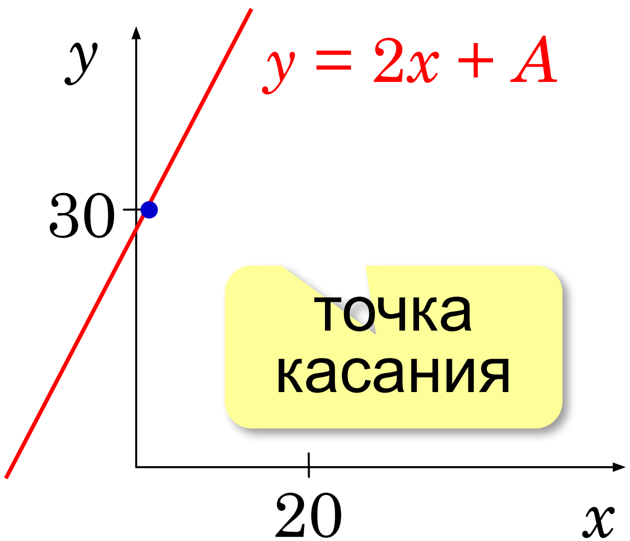
$3 > A$

$A_{\max} = 2$

Задача 1б, 1в. Графическое решение

Найти: A_{min}

$(y - 2x < A)$



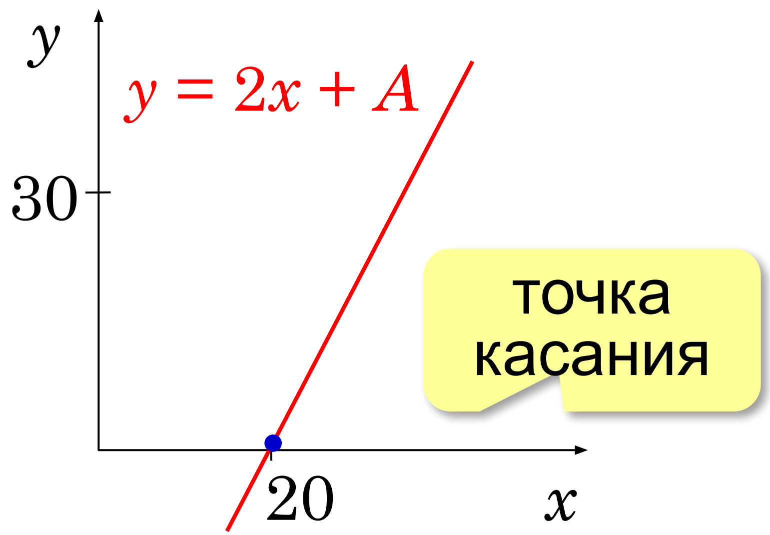
$30 < 2 \cdot 1 + A$

$28 < A$

$A_{min} = 29$

Найти: A_{max}

$(y - 2x > A)$



$1 > 2 \cdot 20 + A$

$-39 > A$

$A_{max} = -40$

Задача 2.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$\boxed{(5y < (x - 30)^2 + A)} \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(5y < (x - 30)^2}_{\text{истинно}} + A) \vee \underbrace{(x > 20) \vee (y > 30)}_{\text{ложно}}$$

истинно ←

ложно

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

Задача 2. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$(5y < (x - 30)^2 + A)$ → $A > 5y - (x - 30)^2$

$A > \max(5y - (x - 30)^2)$
для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

максимум **НЕ**линейной функции при линейных ограничениях

$$A > \max(5y - (x - 30)^2) = 5 \cdot \max(y) - \min(x - 30)^2$$

$$A > 5 \cdot 30 - (20 - 30)^2 = 50$$

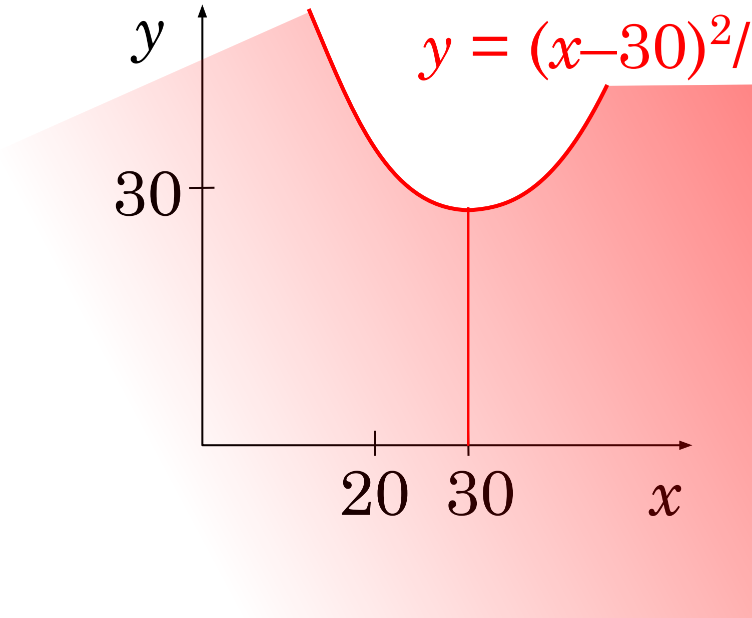
$$A_{min} = 51$$

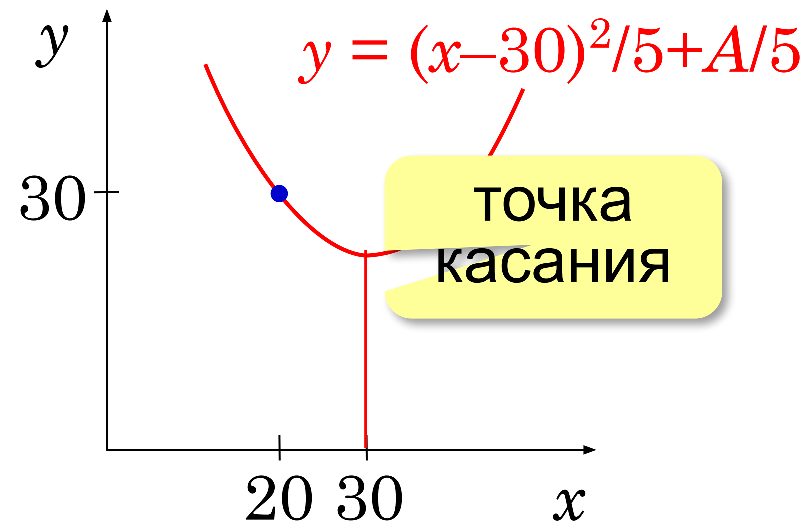
в запретной зоне → $x < 30$, $x = x_{max}$

Задача 2. Графическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \wedge (5y < (x - 30)^2 + A)$

$\rightarrow y < (x - 30)^2/5 + A/5$





$150 < (20 - 30)^2 + A$

$50 < A$ $\quad A_{min} = 51$

Задача 3.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{\overbrace{(3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)}^{\text{не зависит от } A}}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \land (3y + 2x \le 120) \land (3y - x \le 30) \land (y > 0)$$

Задача 3. Аналитическое решение

$(y + 2x < A)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 120) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

$A > \max(y + 2x)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 120) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

! Задача линейного программирования!

Задача 3. Графическое решение

НЕ прямоугольник

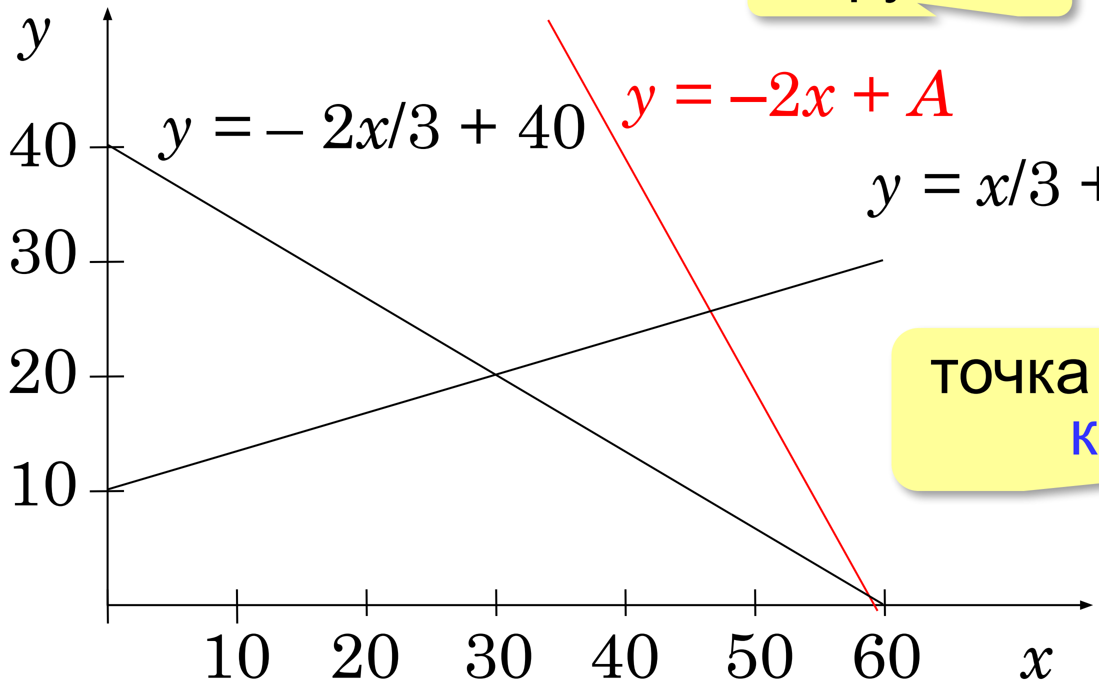
$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 120) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$

$(y \le -2x/3 + 40) \wedge (y \le x/3 + 10)$

круче!

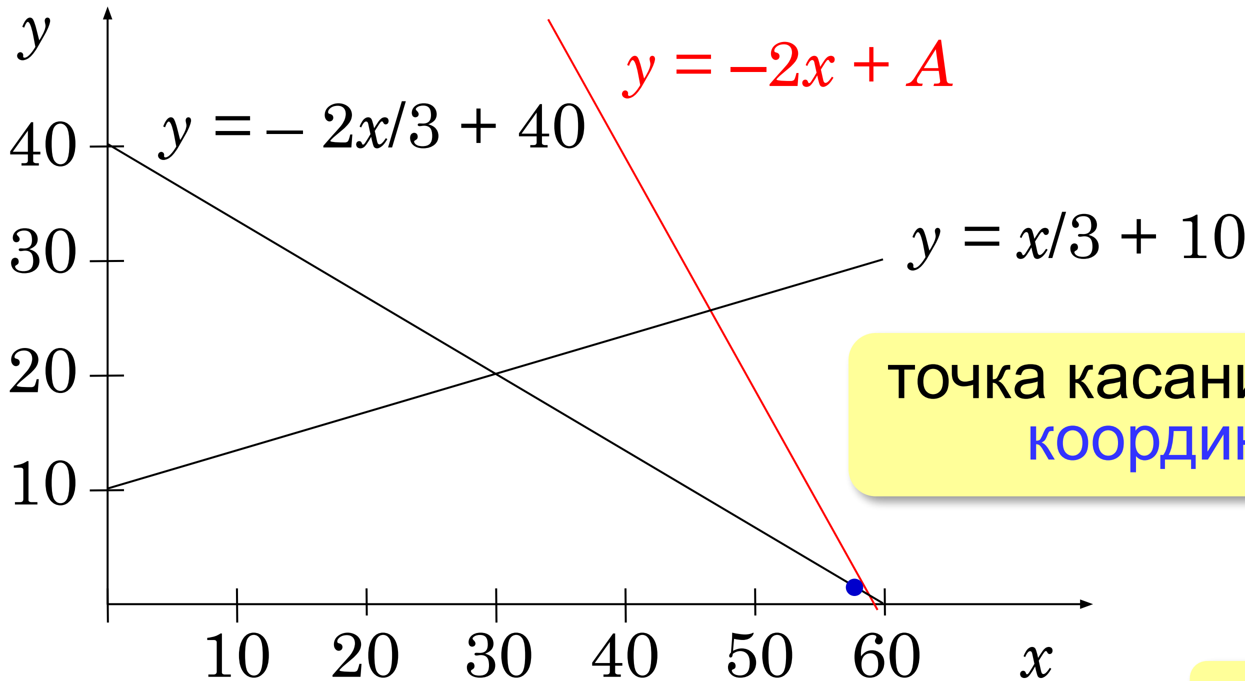
$(y + 2x < A)$

$(y < -2x + A)$



точка касания с целыми координатами!

Задача 3. Графическое решение



точка касания с целыми координатами!

x – целое!

Найти x_{max}: $y = 1$, $y \le -2x/3 + 40$

$y = 1 \le -2x/3 + 40 \rightarrow 2x \le 117 \rightarrow x_{max} = 58$

$(y < -2x + A) \rightarrow 1 < -2 \cdot 58 + A$

$117 < A \rightarrow A_{max} = 118$

Задача 4.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(x \geq 19) \vee (x < 5y) \vee (xy < 2A)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(xy < 2A)}_{\text{истинно}} \vee \overbrace{\underbrace{(x \geq 19) \vee (x < 5y)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

истинно ← ложно

$$(x > 0) \wedge (x < 19) \vee (x \geq 5y) \wedge (y > 0)$$

Задача 4. Аналитическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x < 19)}_{x_{max} = 18} \vee (x \geq 5y) \wedge (y > 0)$$

$(xy < 2A)$

$A > xy/2)$

$A > \max(xy)/2)$

$y \leq x/5$ → $y \to$ max при x_{max}

$y_{max} = [\, x_{max} / 5 \,]$

$y_{max} = [\, 18 / 5 \,] = 3$

целая часть!

$A > x_{max} \cdot y_{max} /2 = 18 \cdot 3/2 = 27$

$A_{min} = 28$

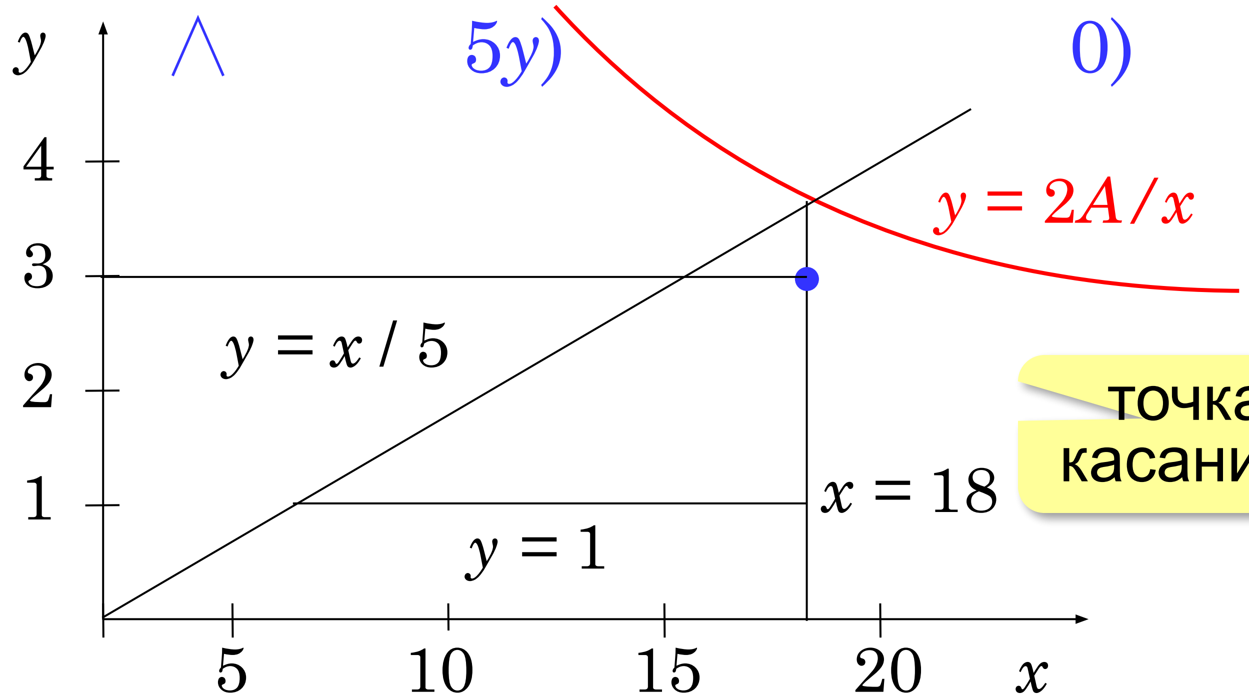
! Нелинейная функция!

Легко решить, если x и $y \to \max$

1) независимо или …
2) одновременно

Задача 4. Графическое решение

$\overbrace{(x > 0) \wedge (x < 19) \vee (x \geq 5y) \wedge (y > 0)}^{\text{треугольник}}$



$(xy < 2A)$

$(y < 2A/x)$

точка касания!

при $x = 18$: $y \leq x/5$ → $y_{\max} = 3$

$2A > \max(xy) = 3 \cdot 18 = 54$ → $A > 27$ → $A_{\min} = 28$

Задача 5.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 3x \neq 20) \lor (A < 2x + 16) \lor (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

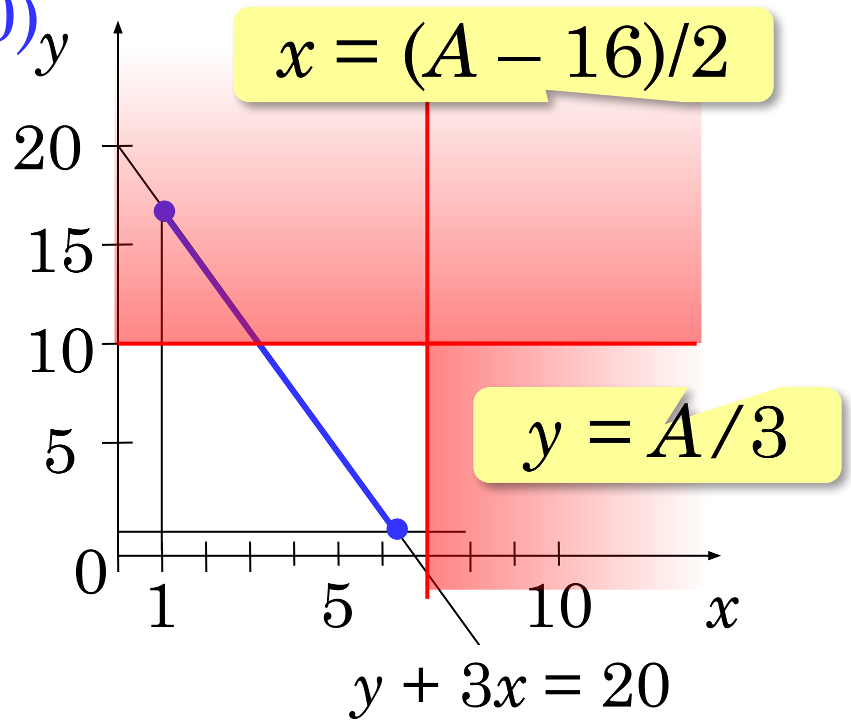
$$\underbrace{(A < 2x + 16) \lor (A < 3y)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(y + 3x \neq 20)}_{\text{ложно}}$$

$(x > 0) \land$ $(y + 3x = 20) \land (y > 0)$

Задача 5. Графическое решение

$y + 3x = 20 \rightarrow y = -3x + 20$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$



Для всех x на отрезке нужно обеспечить

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$

const

$(x > (A - 16)/2)$

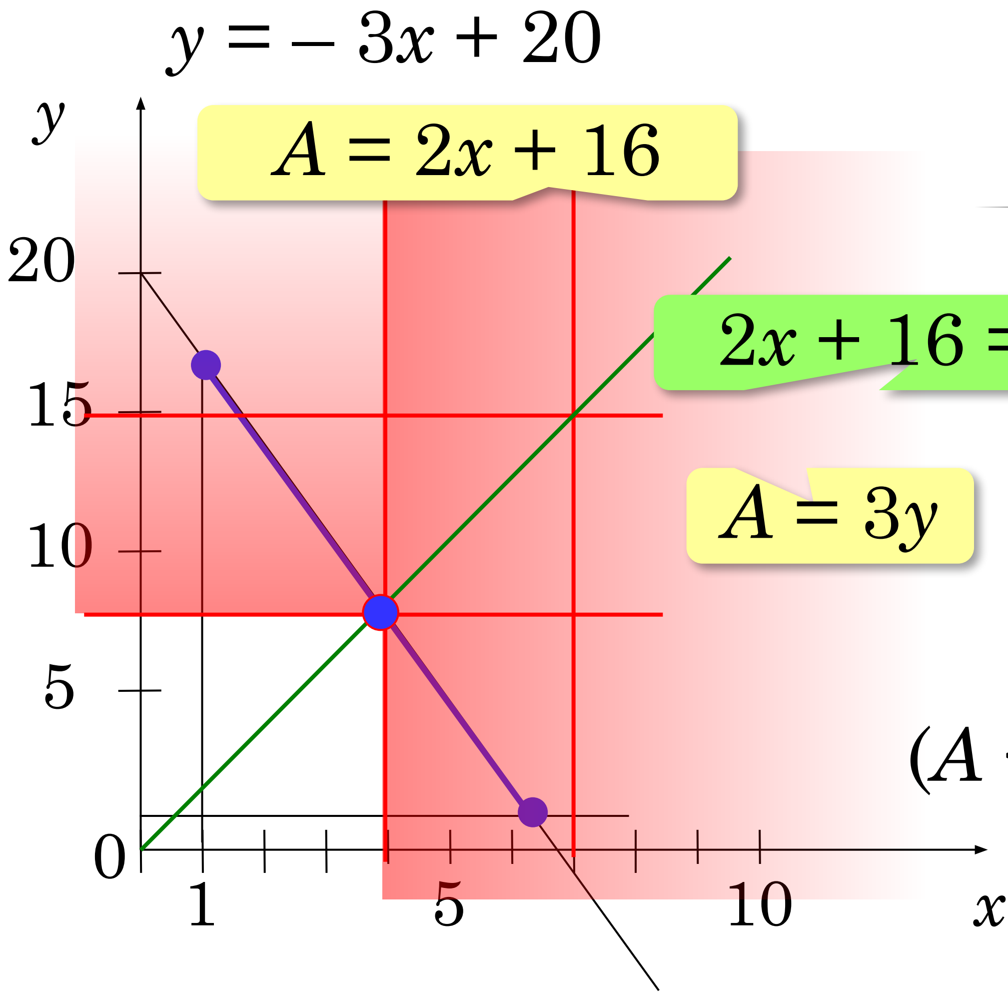
или $(y > A/3)$

const

! Весь отрезок в красную зону!

! Не обязательно одним условием!

Задача 5. Графическое решение



Критическая точка:

$$\begin{cases} 2x + 16 = 3y \\ y = -3x + 20 \end{cases}$$

$$3y = -9x + 60$$

$$2x + 16 = -9x + 60$$

$$11x = 44$$

$$x = 4,\ y = 8$$

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$

$$A < 3 \cdot 8 = 24$$

$$A_{max} = 23$$

Задача 6.

Укажите **наименьшее** целое значение A, при котором выражение

$$(y + 3x \neq 19) \vee (A > 2x + 16) \wedge (A > 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$(A > 2x + 16) \wedge (A > 3y) \vee \underbrace{(y + 3x \neq 19)}$$

истинно ложно

$$(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$$

Задача 6. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$

$(A > 2x + 16) \rightarrow A > \max(2x + 16)$

и $(A > 3y) \rightarrow A > \max(3y)$

прямая
$y = -3x + 19$

$$\cancel{A > \max}\left[\begin{array}{l}\max(2x + 16)\\ \max(3y)\end{array}\right.$$ при $(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$

возрастающие при
$x > 0,\ y > 0$

отрезок

y_{max} при $x = 1$

$y_{max} = -3\cdot 1 + 19 = 16$

x_{max} при $y = 1 \rightarrow x_{max} = (19 - 1) / 3 = 6$

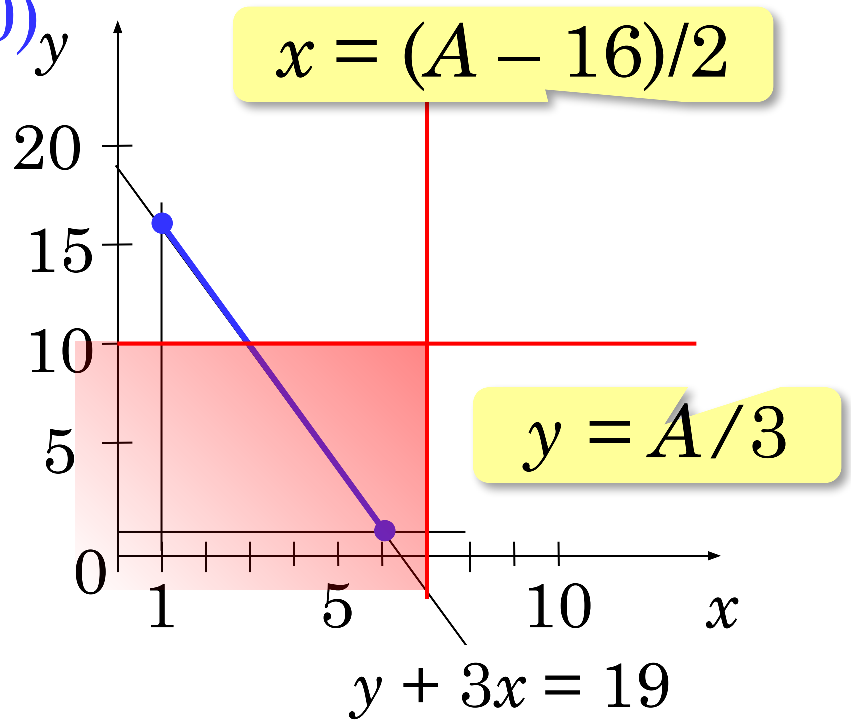
$$\cancel{A > \max}\left[\begin{array}{l}\max(2\cdot 6 + 16)\\ \max(3\cdot 16)\end{array}\right. = \max(28, 48)$$

$A_{min} = 49$

Задача 6. Графическое решение

$y + 3x = 19 \rightarrow y = -3x + 19$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$



Для всех x на отрезке нужно обеспечить

$(A > 2x + 16)$ и $(A > 3y)$

const

$(x < (A - 16)/2)$

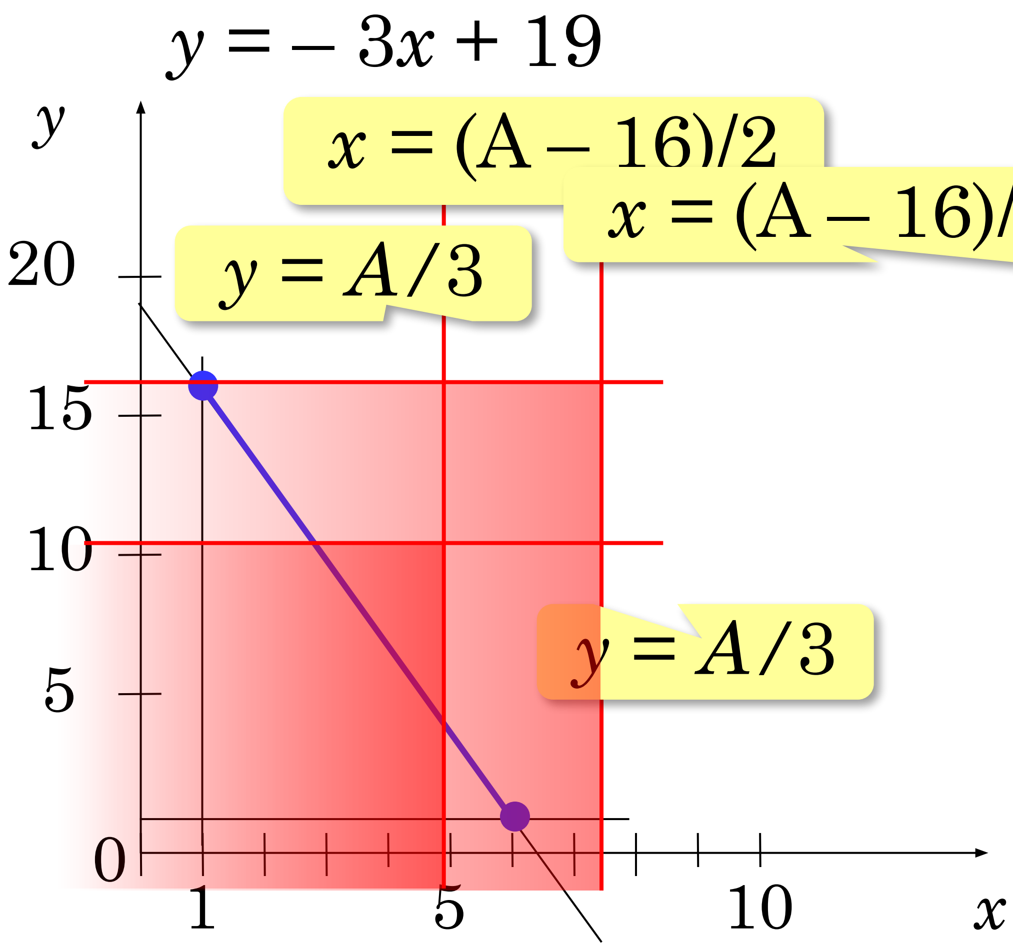
и $(y < A/3)$

const

! Нужно перекрыть весь отрезок!

! Обязательно выполнить оба условия!

Задача 6. Графическое решение



Концы отрезка:

$x = 1$
$y = -3\cdot 1 + 19 = 16$
$A > 3y = 48$

$y = 1$
$x = (19 - 1) / 3 = 6$
$A > 2x + 16 = 28$

! Одновременно!

$A_{min} = 49$

Задача 7.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

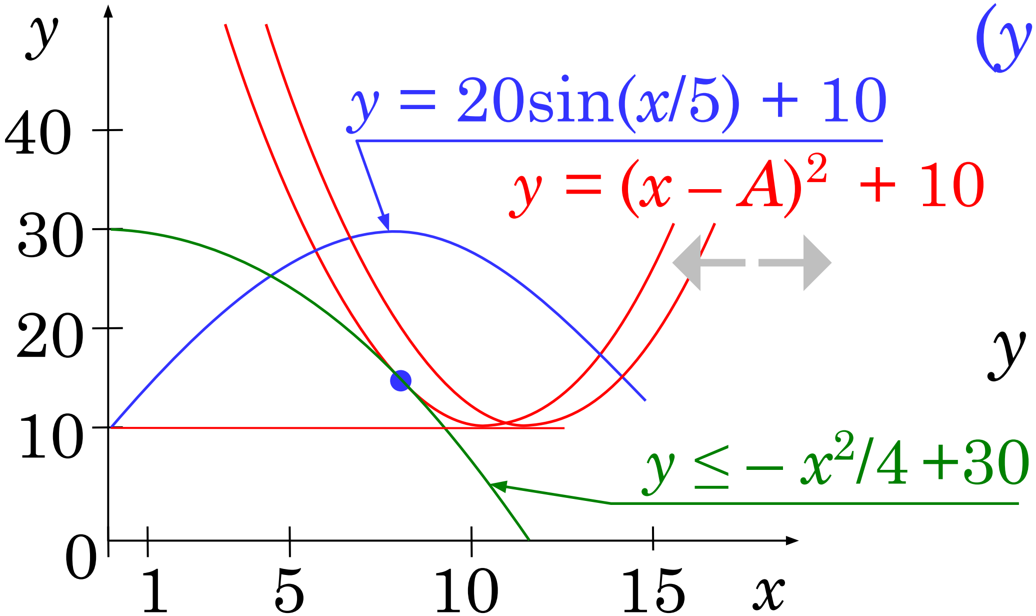
$$(y - 20\sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120) \vee (y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax)}_{\text{истинно}} \vee \overbrace{\underbrace{(y - 20\sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

$$(y - 20\sin(x/5) \le 10) \wedge (4y + x^2 \le 120) \wedge (x > 0) \wedge (y > 0)$$

Задача 7. Графо-аналическое решение



$(y \le 20\sin(x/5) + 10)$

$\vee\ (y \le -\,x^2/4 + 30)$

$\wedge\ (x > 0)\ \wedge\ (y > 0)$

$y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax$

$y < (x - A)^2 + 10$

Найти наименьшее значение A, при котором решается уравнение $(x - A)^2 + 10 = -\,x^2/4 + 30$

$5x^2/4 - 2Ax + A^2 - 20 = 0$

$D = 4A^2 - 5(A^2 - 20) = 0$

при касании!

$A = 10$

$A_{\min} = 11$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru