К.Ю. Поляков

Линейное (и нелинейное) программирование в задачах ЕГЭ по информатике

К.Ю. Поляков. Задачи на анализ логических выражений в ЕГЭ по информатике. // Информатика в школе, № 9, 2019, с. 29–35.

Постановка задачи

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 123) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - x \neq 5) \lor (A < 2x^3 + y) \lor (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Задача 1.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \lor \overbrace{\underbrace{(x > 20) \lor (y > 30)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$

Задача 1. Аналитическое решение

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \rightarrow (y + 2x < A_{\min})$$

$A > y + 2x$ для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$A > \max(y + 2x)$ для $\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20)}_{\text{только } x} \wedge \underbrace{(y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{только } y}$

максимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$A > \max(y + 2x) = \max(y) + 2\cdot\max(x)$

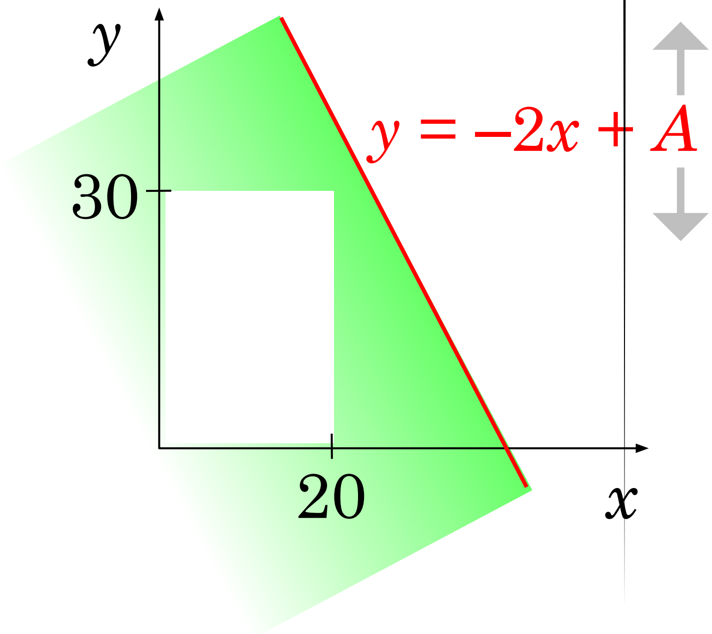
$A > 30 + 2\cdot 20 = 70$

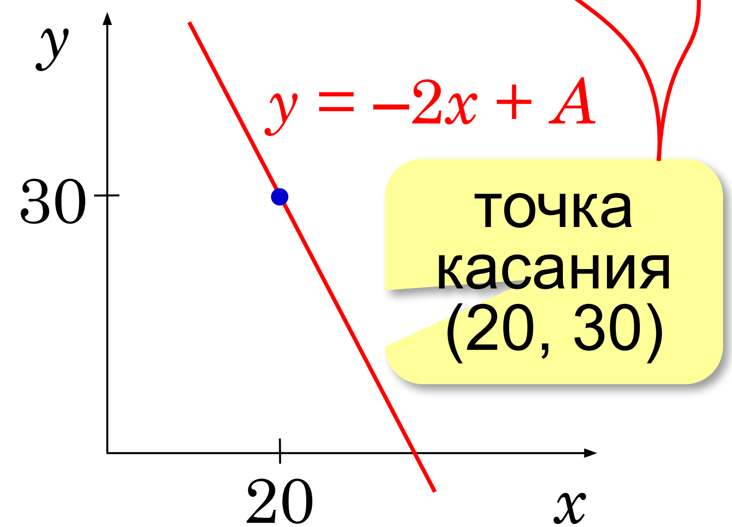
$\boxed{A_{\min} = 71}$

Задача 1. Графическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)}_{\text{прямоугольник}} \rightarrow (y + 2x < A)$$

$$(y < -2x + A)$$





$$30 < -2\cdot 20 + A$$

$$70 < A \qquad \boxed{A_{\min} = 71}$$

Задача 1а.

Укажите **наибольшее** целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x > A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y + 2x > A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(x > 20) \lor (y > 30)}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$$

Задача 1а. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \rightarrow (y + 2x > A_{max})$

$A < y + 2x$ для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$A < \min(y + 2x)$
для $\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20)}_{\text{только } x} \wedge \underbrace{(y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{только } y}$

минимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$A < \min(y + 2x) = \min(y) + 2\cdot\min(x)$

$A < 1 + 2\cdot 1 = 3$

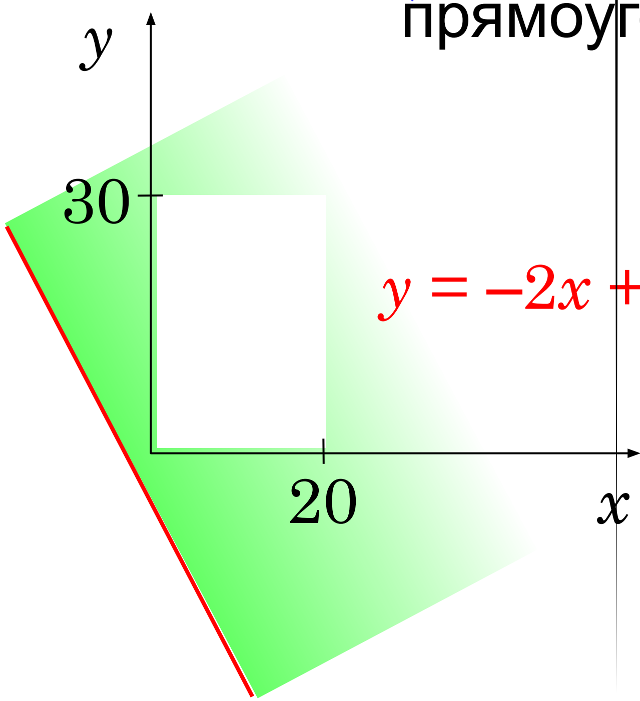
$A_{max} = 2$

Задача 1а. Графическое решение

Найти: $A_{\max}$

$\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{прямоугольник}}$ → $(y + 2x > A)$

$(y > -2x + A)$



$1 > -2 \cdot 1 + A$

$3 > A$

$A_{\max} = 2$

Задача 16.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y - 2x < A)} \lor \underbrace{(x > 20) \lor (y > 30)}$$

истинно ← ложно

$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$

Задача 1б. Аналитическое решение

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \rightarrow (y - 2x < A_{max})$$

$A > y - 2x$ для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$$A > \max(y - 2x)$$

для $\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20)}_{\text{только } x} \wedge \underbrace{(y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{только } y}$

максимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$$A > \max(y - 2x) = \max(y) - 2\cdot\min(x)$$

$$A > 30 - 2\cdot 1 = 28$$

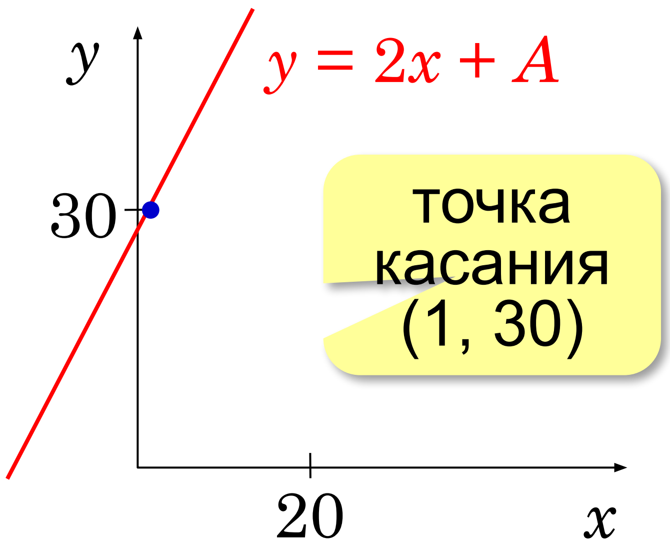
$$A_{min} = 29$$

Задача 16. Графическое решение

Найти: $A_{\min}$

$(y - 2x < A)$ $(y < 2x + A)$ для всех точек в области

$(x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (x > 0) \wedge (y > 0)$



$30 < 2 \cdot 1 + A$

$28 < A$

$A_{\min} = 29$

Задача 1в.

Укажите **наибольшее** целое значение А, при котором выражение

$$(y - 2x > A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$(y - 2x > A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно ← ложно

$$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$$

Задача 1в. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \rightarrow (y - 2x > A_{max})$

$A < y - 2x$ для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$A < \min(y - 2x)$

для $\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20)}_{\text{только } x} \wedge \underbrace{(y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{только } y}$

минимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$A < \min(y - 2x) = \min(y) - 2 \cdot \max(x)$

$A < 1 - 2 \cdot 20 = -39$

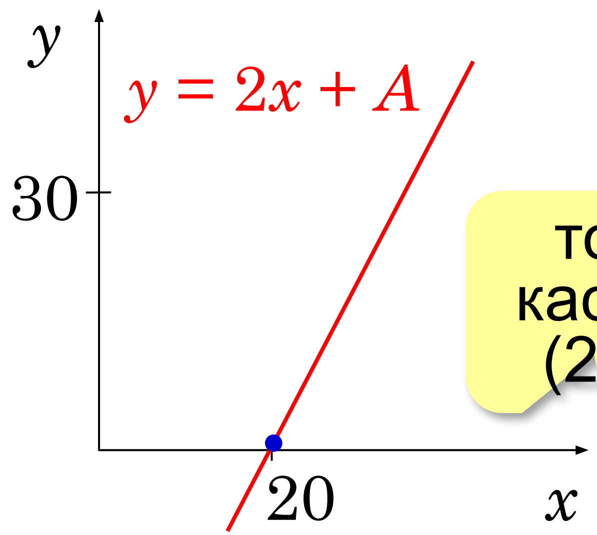
$A_{max} = -40$

Задача 1в. Графическое решение

Найти: $A_{\max}$

$(y - 2x > A)$ $\quad (y > 2x + A)$ для всех точек в области

$(x \le 20) \land (y \le 30) \land (x > 0) \land (y > 0)$



точка касания (20, 1)

$1 > 2 \cdot 20 + A$

$-39 > A$

$A_{\max} = -40$

Задача 2.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > x)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(x > 20) \lor (y > x)}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le x) \land (y > 0)$$

Задача 2. Аналитическое решение

$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le x) \land (y > 0) \rightarrow (y + 2x < A_{\max})$

$A > y + 2x$ для $(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le x) \land (y > 0)$

$A > \max(y + 2x)$ для $\underbrace{(x > 0) \land (x \le 20)}_{\text{только } x} \land \underbrace{(y \le x) \land (y > 0)}_{\max(x) \rightarrow \max(y)}$

$\max(y) = \max(x)$

$A > \max(y + 2x) = \max(y) + 2 \cdot \max(x)$

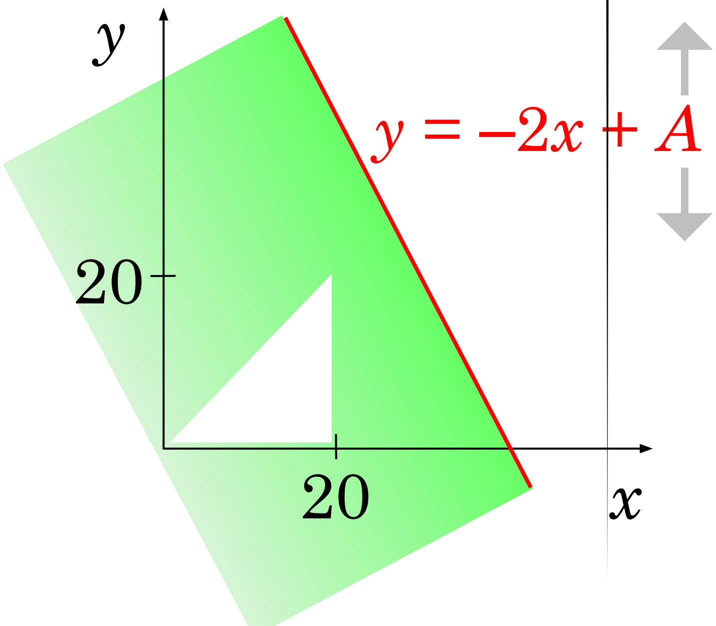
$A > 20 + 2 \cdot 20 = 60$

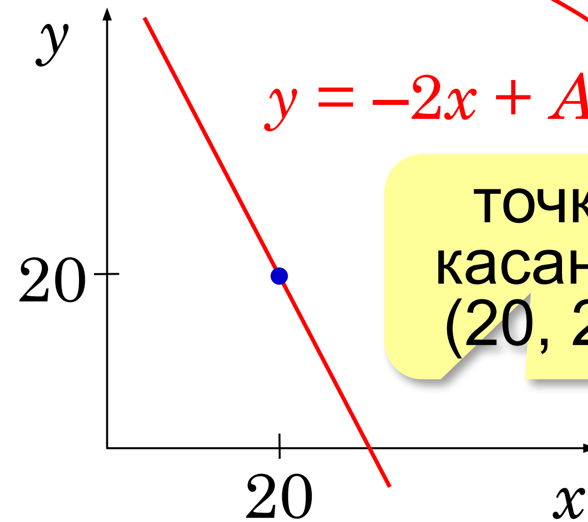
$A_{\min} = 61$

Задача 2. Графическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le x) \wedge (y > 0)}_{\text{прямоугольник}} \rightarrow (y + 2x < A)$$

$$(y < -2x + A)$$





точка касания (20, 20)

$$20 < -2 \cdot 20 + A$$

$$60 < A \qquad \boxed{A_{\min} = 61}$$

Задача 3.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(x \ge 19) \vee (x < 6y) \vee (xy < 2A)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(xy < 2A)}_{\text{истинно}} \vee \overbrace{\underbrace{(x \ge 19) \vee (x < 6y)}_{\text{ложно}}}$$

$$(x > 0) \wedge (x < 19) \vee (x \ge 6y) \wedge (y > 0)$$

Задача 3. Аналитическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x < 19)}_{x_{max} = 18} \vee (x \geq 6y) \wedge (y > 0) \rightarrow (xy < 2A)$$

$$(xy < 2A) \;\rightarrow\; A > xy/2 \;\rightarrow\; A > \max(xy)/2$$

$y \leq x/6 \rightarrow y \rightarrow \max$ при x_{max}

$$y_{max} = [\, x_{max} / 6 \,] = [\, 18 / 6 \,] = 3$$

целая часть!

$$A > x_{max} \cdot y_{max} / 2 = 18 \cdot 3/2 = 27$$

$$A_{min} = 28$$

! Нелинейная функция!

Легко решить, если x и $y \rightarrow \max$

1) независимо или …
2) одновременно

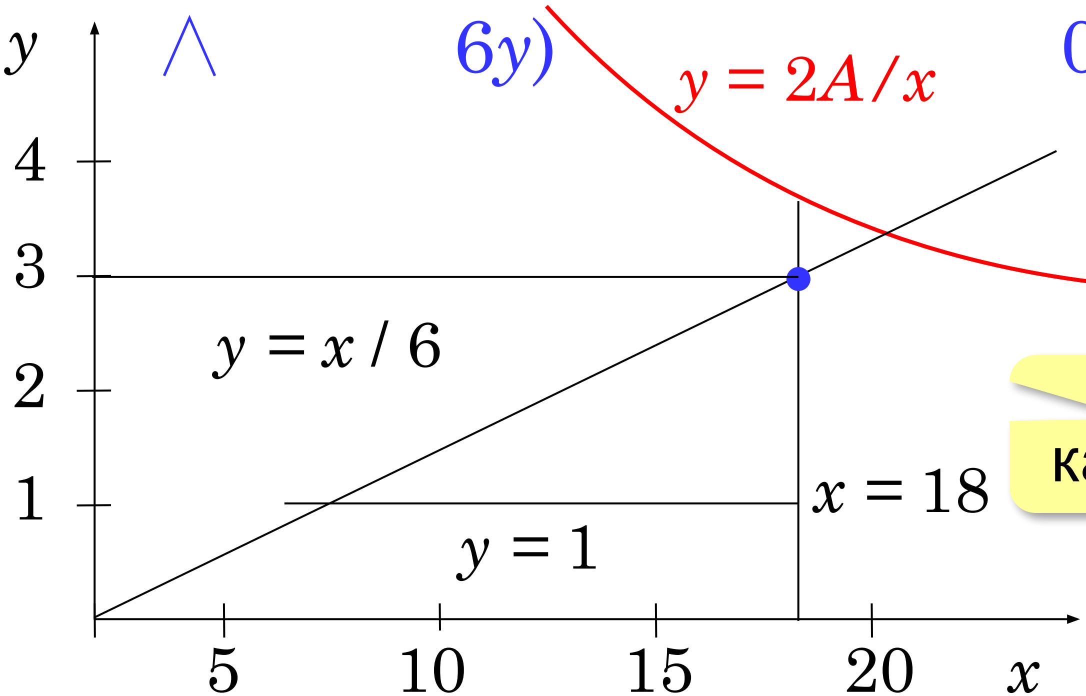
Задача 3. Графическое решение

треугольник

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x < 19) \wedge (x \geq 6y) \wedge (y > 0)}$$

$(xy < 2A)$

$(y < 2A/x)$



точка касания!

при $x = 18$: $y \leq x/6$ → $y_{\max} = 3$

$2A > \max(xy) = 3\cdot 18 = 54$ → $A > 27$ → $\boxed{A_{\min} = 28}$

Задача 4.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(5x + 3y \neq 60) \vee ((A > x) \wedge (A > y))$$

истинно для любых целых неотрицательных значений x и y.

не зависит от A

$$((A > x) \wedge (A > y)) \vee (5x + 3y \neq 60)$$

истинно ← ложно

$$(x \geq 0) \wedge (5x + 3y = 60) \wedge (y \geq 0)$$

Задача 4. Аналитическое решение

$$(x \ge 0) \wedge (5x + 3y = 60) \wedge (y \ge 0) \rightarrow \left[\begin{array}{l} A > x \\ A > y \end{array}\right.$$

$$A > \max(x) \text{ при } (x \ge 0) \wedge (5x + 3y = 60) \wedge (y \ge 0)$$

$$A > \max(y) \text{ при } (x \ge 0) \wedge (5x + 3y = 60) \wedge (y \ge 0)$$

$$A > \max(x) \text{ при } (5x = 60) \Rightarrow x_{\max} = 12$$

$$A > \max(y) \text{ при } (3y = 60) \Rightarrow y_{\max} = 20$$

$$\left[\begin{array}{l} A > \max(x) = 12 \\ A > \max(y) = 20 \end{array}\right.$$

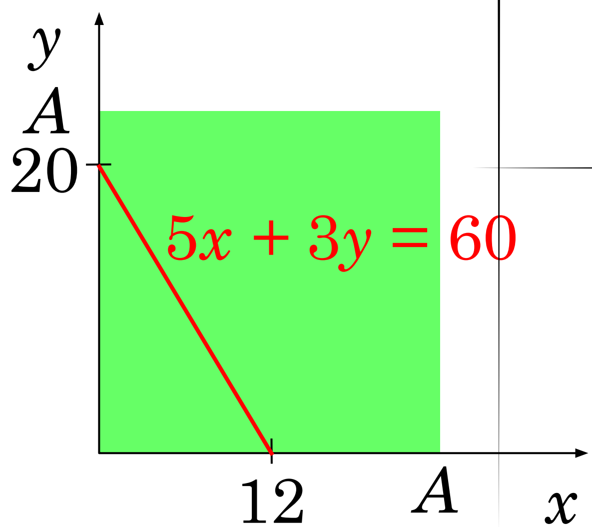
$$A_{\min} = 21$$

Задача 4. Графическое решение

$$\underbrace{(x \ge 0) \wedge \overbrace{(5x + 3y = 60)}^{\text{отрезок}} \wedge (y \ge 0)}_{} \rightarrow \begin{cases} A > x \\ A > y \end{cases}$$

квадрат

отрезок



$$\begin{cases} A > \max(x) = 12 \\ A > \max(y) = 20 \end{cases}$$

$$A_{\min} = 21$$

Задача 5.

Укажите **наименьшее** целое значение A, при котором выражение

$$(y + 3x \neq 19) \vee (A > 2x + 16) \wedge (A > 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$(A > 2x + 16) \wedge (A > 3y) \vee (y + 3x \neq 19)$$

истинно ложно

$$(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$$

Задача 5. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$

$(A > 2x + 16) \rightarrow A > \max(2x + 16)$

и $(A > 3y) \rightarrow A > \max(3y)$

прямая
$y = -3x + 19$

$$A > \max\left[\begin{array}{l}\max(2x+16)\\ \max(3y)\end{array}\right.$$ при $(x > 0) \wedge (y + 3x = 19) \wedge (y > 0)$

возрастающие при
$x > 0,\ y > 0$

отрезок

y_{max} при $x = 1$

$y_{max} = -3\cdot 1 + 19 = 16$

x_{max} при $y = 1 \rightarrow x_{max} = (19 - 1) / 3 = 6$

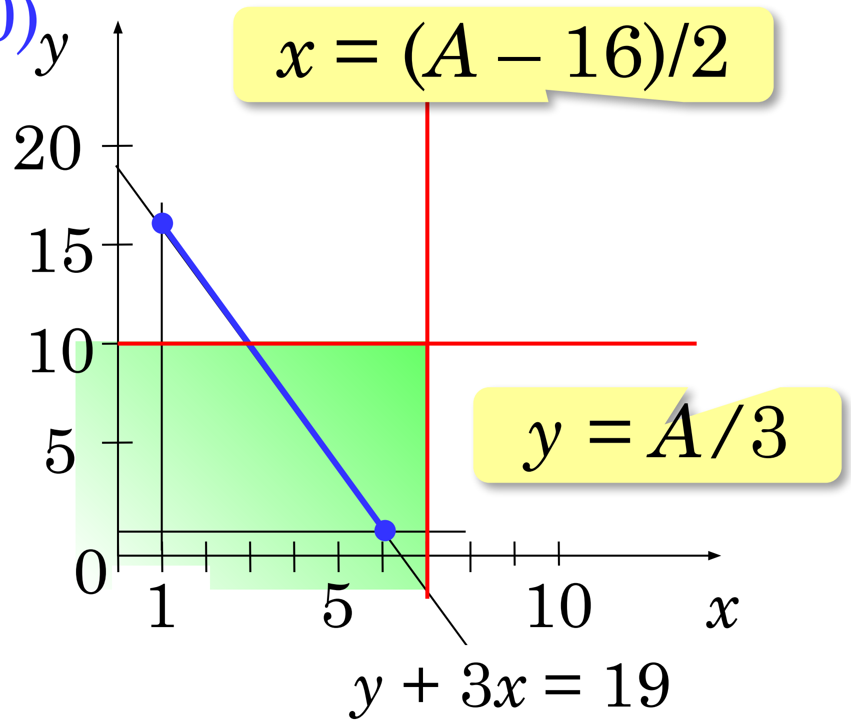
$$A > \max\left[\begin{array}{l}\max(2\cdot 6+16)\\ \max(3\cdot 16)\end{array}\right. = \max(28, 48)$$

$A_{min} = 49$

Задача 5. Графическое решение

$y + 3x = 19 \rightarrow y = -3x + 19$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$



Для всех x на отрезке нужно обеспечить

$(A > 2x + 16)$ и $(A > 3y)$

const

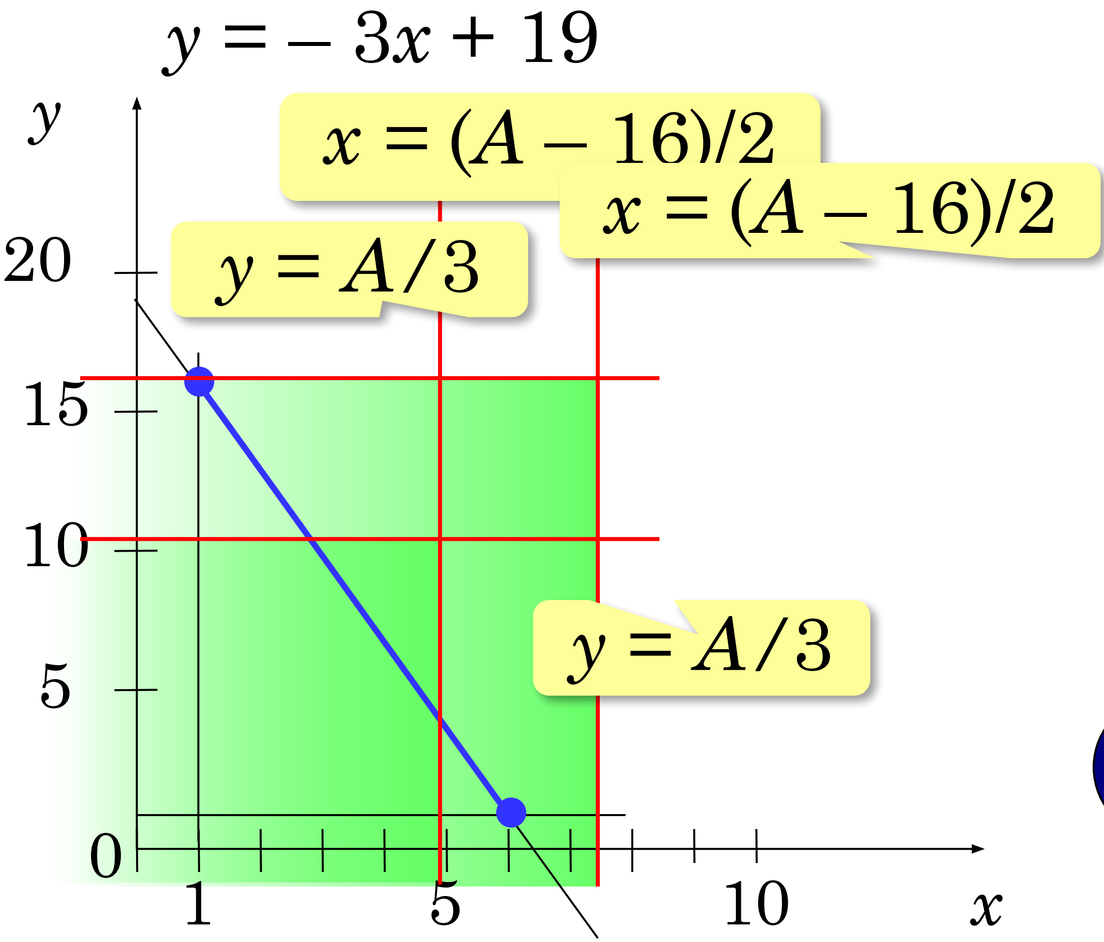
$(x < (A - 16)/2)$
и $(y < A/3)$

const

! Нужно перекрыть весь отрезок!

! Обязательно выполнить оба условия!

Задача 5. Графическое решение



Концы отрезка:

$x = 1$

$y = -3\cdot1 + 19 = 16$

$A > 3y = 48$

$y = 1$

$x = (19 - 1)\ /\ 3 = 6$

$A > 2x + 16 = 28$

! Одновременно!

$A_{min} = 49$

Задача 6.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 3x \neq 20) \lor (A < 2x + 16) \lor (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(A < 2x + 16) \lor (A < 3y)}_{\text{истинно}} \lor \overbrace{\underbrace{(y + 3x \neq 20)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

$(x > 0) \land (y + 3x = 20) \land (y > 0)$

Задача 6. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (y + 3x = 20) \wedge (y > 0)$

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$ $\rightarrow$ $A < \max(2x + 16, 3y)$

$y = -3x + 20$

$(y + 3x = 20) \wedge (x > 0) \wedge (y > 0)$

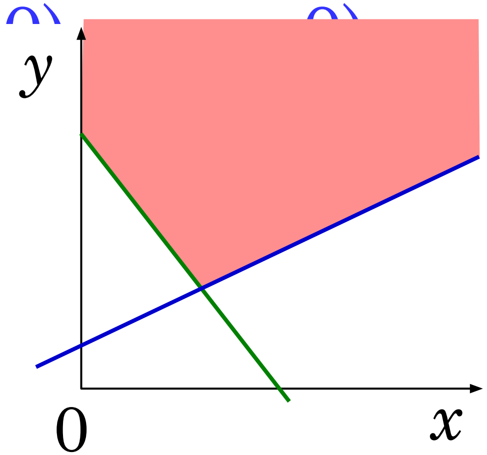
$$A < \min_x \max(2x + 16, -9x + 60)$$

$$2x + 16 = -9x + 60$$

$$11x = 44 \Rightarrow x = 4$$

$$A < 2 \cdot 4 + 16 = 24$$

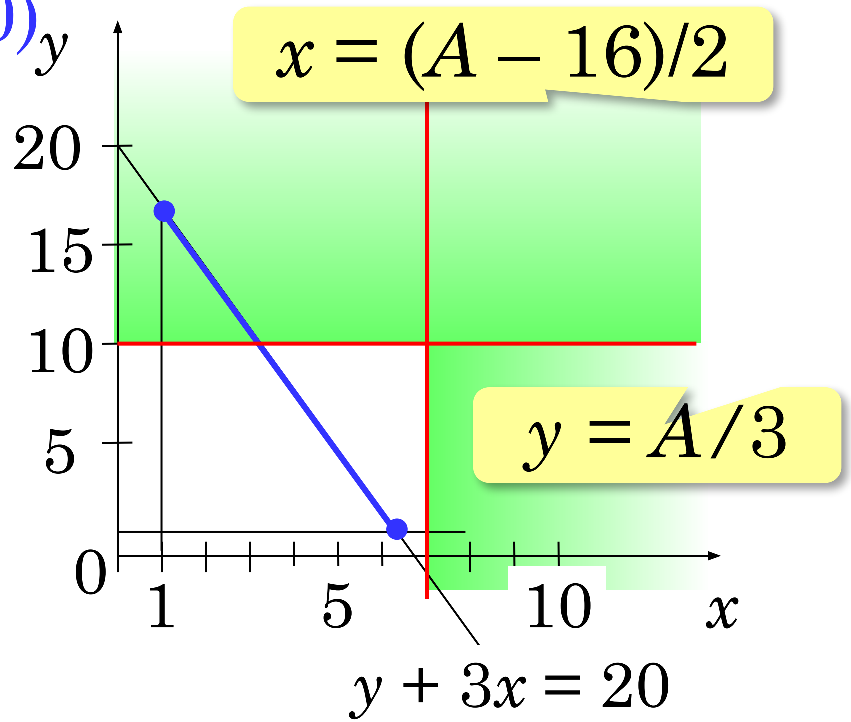
$$A_{max} = 23$$



Задача 6. Графическое решение

$y + 3x = 20 \rightarrow y = -3x + 20$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$



Для всех x на отрезке нужно обеспечить

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$

const

$(x > (A - 16)/2)$

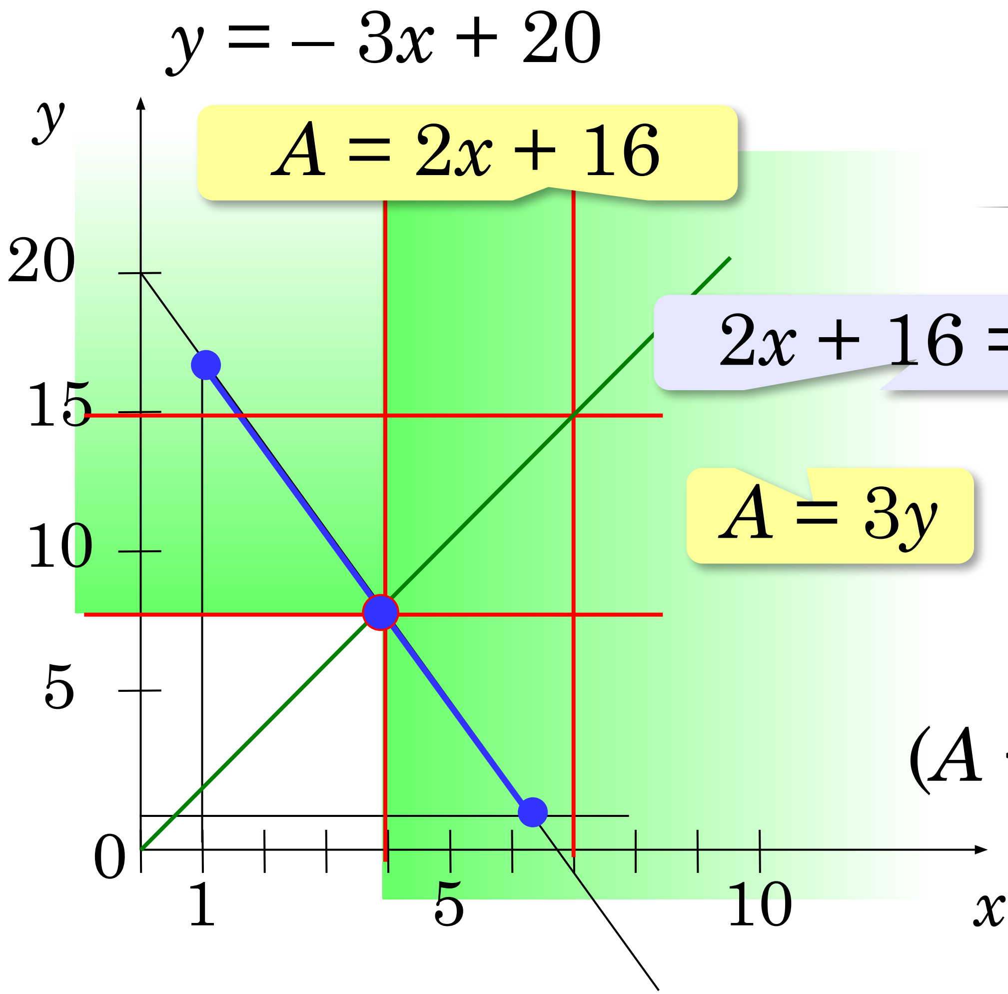
или $(y > A/3)$

const

! Весь отрезок в зелёную зону!

! Не обязательно одним условием!

Задача 6. Графическое решение



Критическая точка:

$$\begin{cases} 2x + 16 = 3y \\ y = -3x + 20 \end{cases}$$

$$3y = -9x + 60$$

$$2x + 16 = -9x + 60$$

$$11x = 44$$

$$x = 4,\ y = 8$$

$$(A < 2x + 16) \text{ или } (A < 3y)$$

$$A < 3 \cdot 8 = 24$$

$$A_{max} = 23$$

Задача 7.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - 3x \neq 20) \lor (A < 2x + 16) \lor (A < 3y)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(A < 2x + 16) \lor (A < 3y)}_{\text{истинно}} \lor \overbrace{\underbrace{(y - 3x \neq 20)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

$$(x > 0) \land (y - 3x = 20) \land (y > 0)$$

Задача 7. Аналитическое решение

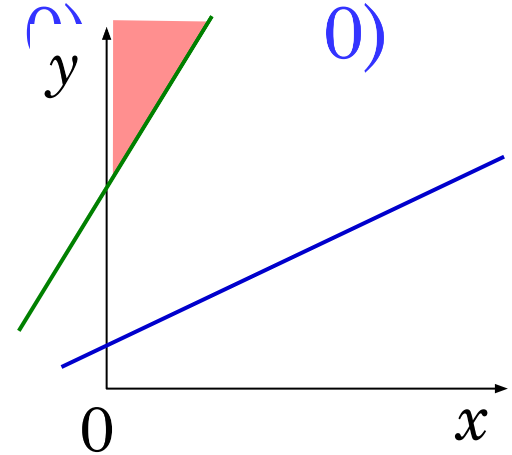
$(x > 0) \wedge (y - 3x = 20) \wedge (y > 0)$

$y = 3x + 20$

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$ → $A < \max(2x + 16, 3y)$

$(y - 3x = 20) \wedge (x > 0) \wedge (y > 0)$

$$A < \min_x \max(2x + 16, 9x + 60)$$



$x > 0 \Rightarrow 2x + 16 < 9x + 60$

$$A < \min_x (9x + 60)$$

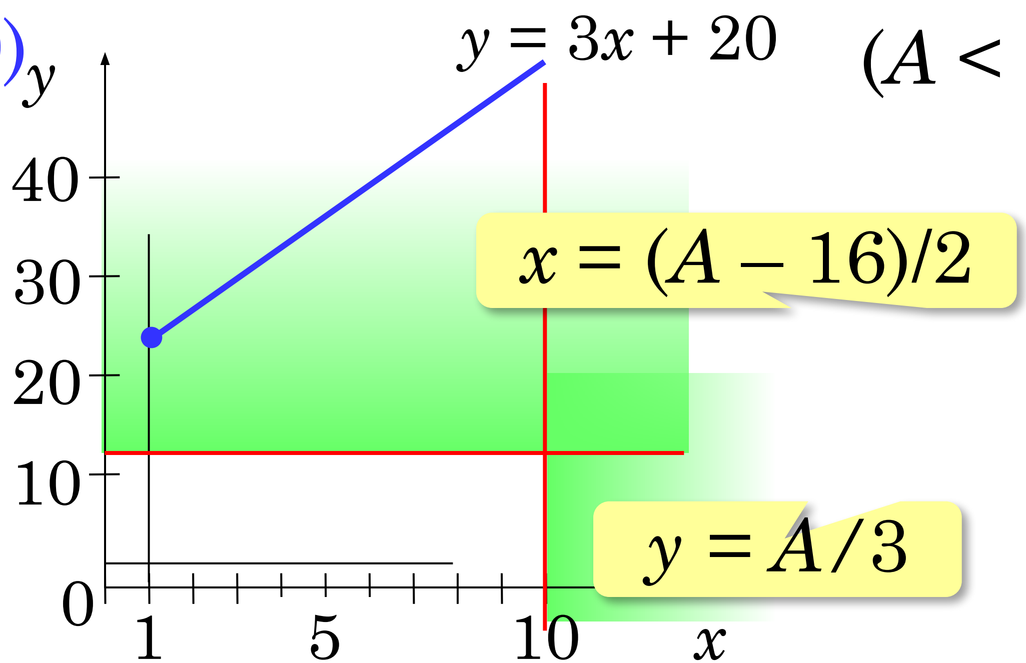
$x = 1 \Rightarrow A < 9 \cdot 1 + 60 = 69$

$$A_{\max} = 68$$

Задача 7. Графическое решение

$y - 3x = 20 \rightarrow y = 3x + 20$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$



! Весь луч в зелёную зону!

Для всех x на луче нужно обеспечить

$(A < 2x + 16)$ **или** $(A < 3y)$

const

$(x > (A - 16)/2)$

или $(y > A/3)$

критическая точка

$x = 1$

$y = 3 \cdot 1 + 20 = 23$

$A < 2x + 16 = 2 \cdot 1 + 16$

или $A < 3y = 3 \cdot 23 = 69$

$A_{max} = 68$

Задача 8.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 123) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(3y + 2x > 123) \lor (3y - x > 30)}_{\text{ложно}}$$

истинно ложно

$$(x > 0) \land (3y + 2x \le 123) \land (3y - x \le 30) \land (y > 0)$$

Задача 8. Аналитическое решение

$(y + 2x < A)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 123) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

$A > \max(y + 2x)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 123) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

x и y связаны!

! Задача линейного программирования!

Задача 8. Графическое решение

НЕ прямоугольник

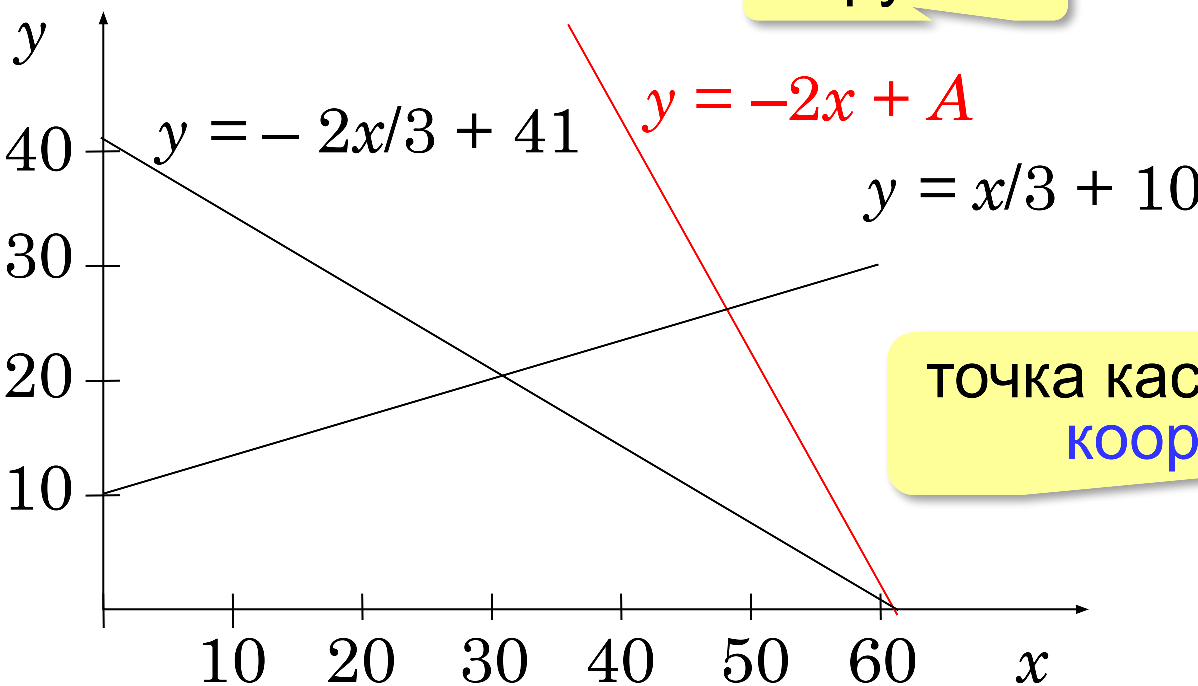
$(x > 0) \land (3y + 2x \le 123) \land (3y - x \le 30) \land (y > 0)$

$(y \le -2x/3 + 41) \land (y \le x/3 + 10)$

круче!

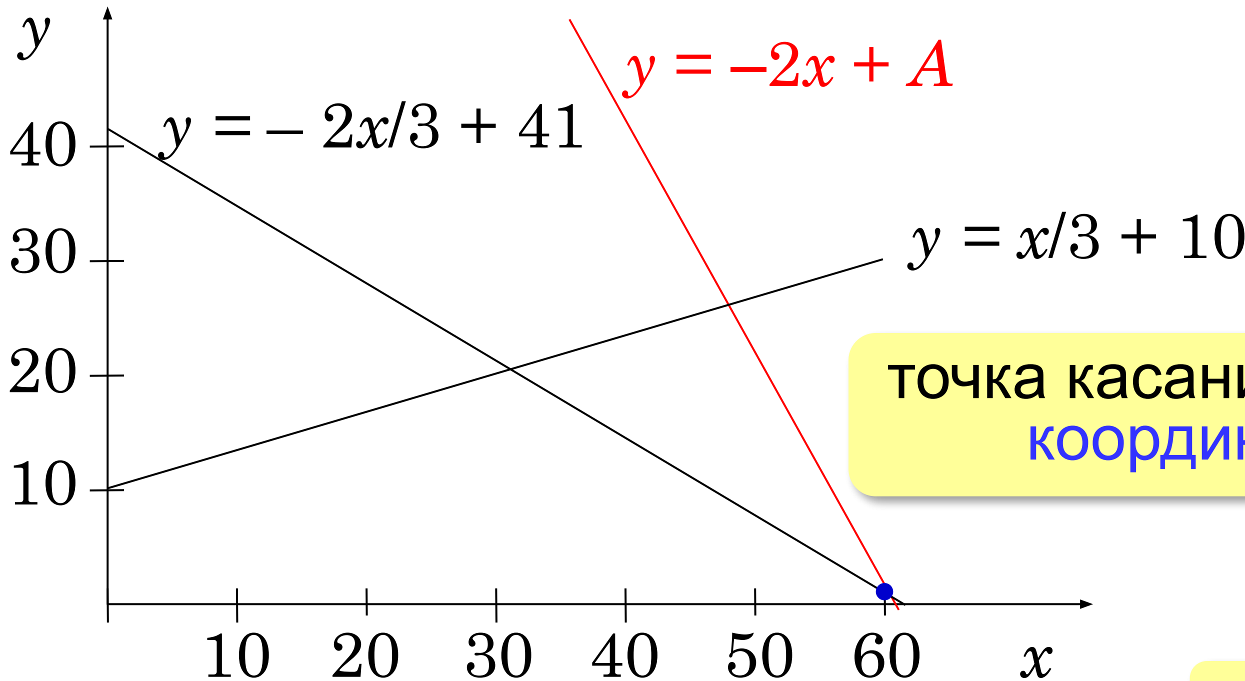
$(y + 2x < A)$

$(y < -2x + A)$



точка касания с целыми координатами!

Задача 8. Графическое решение



точка касания с целыми координатами!

x – целое!

Найти x_{max}: $y = 1,\ y = -2x/3 + 41$

$y = 1 = -2x/3 + 41 \rightarrow 2x = 120 \rightarrow$ $x_{max} = 60$

$(y < -2x + A) \rightarrow 1 < -2\cdot 60 + A$

$121 < A \rightarrow$ $A_{max} = 122$

Задача 9.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$\boxed{(5y < (x - 30)^2 + A)} \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(5y < (x - 30)^2 + A)}_{\text{истинно}} \vee \underbrace{(x > 20) \vee (y > 30)}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$$

Задача 9. Аналитическое решение

$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$

$(5y < (x - 30)^2 + A) \rightarrow A > 5y - (x - 30)^2$

$A > \max(5y - (x - 30)^2)$
для $(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$

максимум **НЕ**линейной функции при линейных ограничениях

$$A > \max(5y - (x - 30)^2) = 5 \cdot \max(y) - \min(x - 30)^2$$

$$A > 5 \cdot 30 - (20 - 30)^2 = 50$$

в запретной зоне

$x < 30$

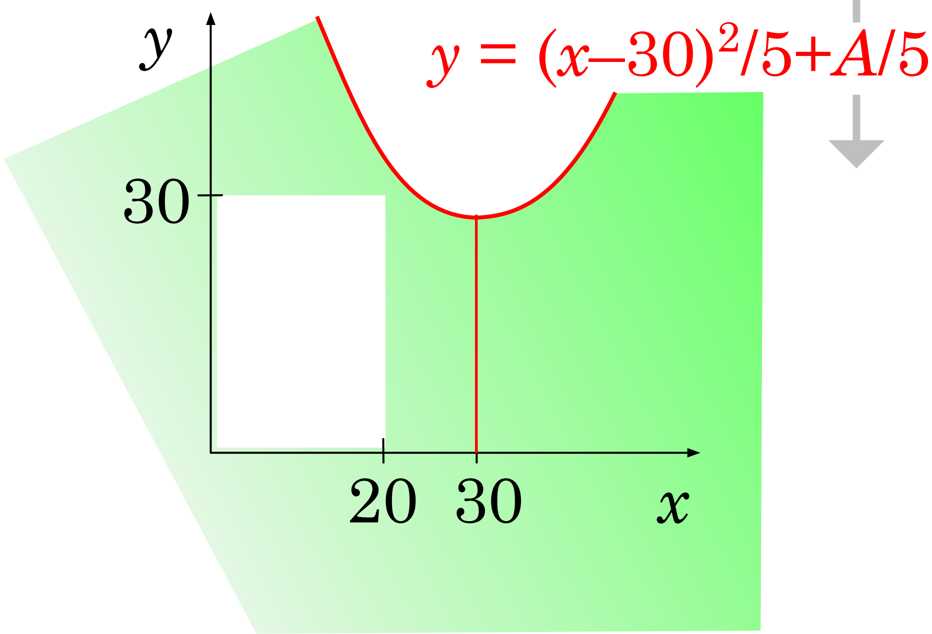
$x = x_{\max}$

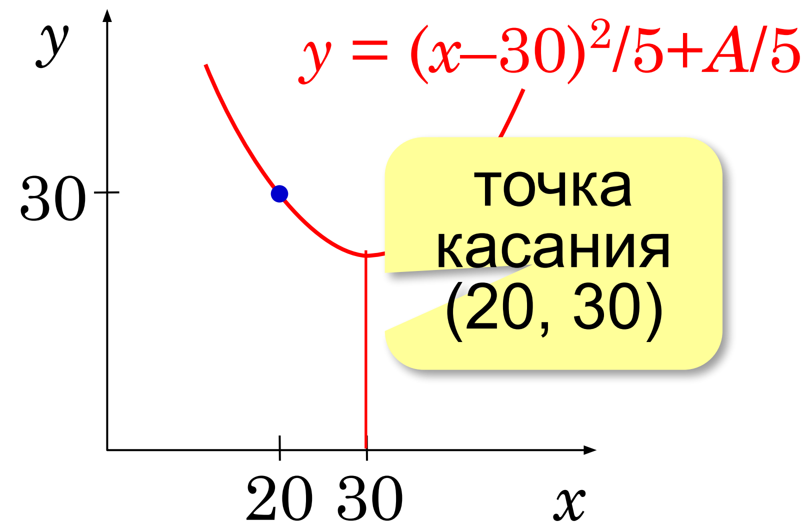
$A_{\min} = 51$

Задача 9. Графическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$(5y < (x - 30)^2 + A)$ → $y < (x - 30)^2/5 + A/5$





$$150 < (20 - 30)^2 + A$$

$$50 < A \qquad \boxed{A_{min} = 51}$$

Задача 10.

(***Д.В. Богданов***) Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(A \cdot (x - 2) < y) \rightarrow ((x - 10) \cdot (20 - x) < y)$$

истинно для любых целых неотрицательных x и y.

$$(A \cdot (x - 2) \geq y) \vee ((x - 10) \cdot (20 - x) < y)$$

не зависит от A

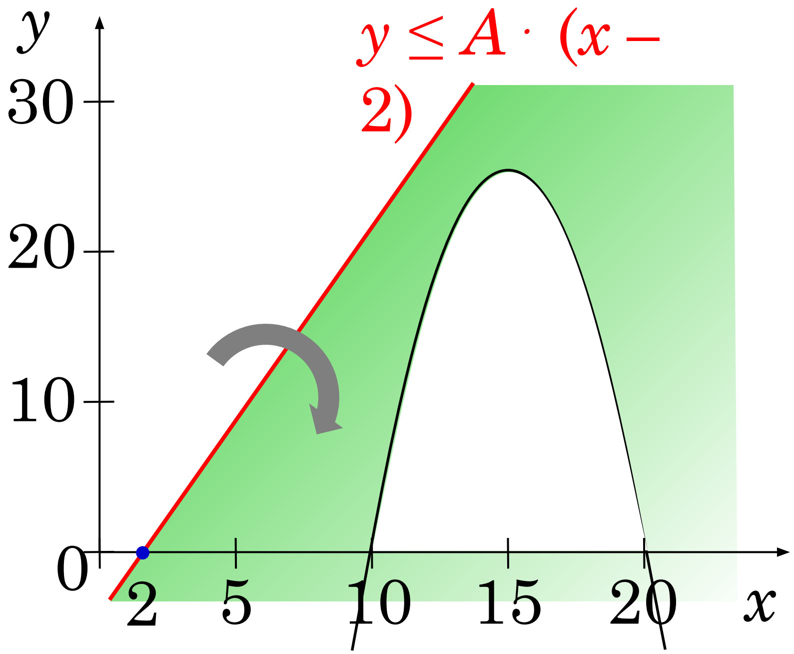
$$\underbrace{(A \cdot (x - 2) \geq y)}_{\text{истинно}} \vee \overbrace{\underbrace{((x - 10) \cdot (20 - x) < y)}_{\text{ложно}}}^{\text{не зависит от } A}$$

истинно ← ложно

$(x \geq 0) \wedge$

$((x - 10) \cdot (20 - x) \geq y) \wedge (y \geq 0)$

Задача 10. Графо-аналическое решение



$$(x - 10) \cdot (20 - x) \ge y$$

$$y \le -(x - 10) \cdot (x - 20) \wedge (x \ge 0) \wedge (y \ge 0)$$

Найти наименьшее значение A, при котором решается уравнение $A \cdot (x - 2) = -(x - 10) \cdot (x - 20)$

$$x^2 + (A - 30) \cdot x + 200 - 2 \cdot A = 0$$

$$D = (A - 30)^2 - 4 \cdot (200 - 2A) = 0$$

при касании!

$$A = \{ 2, 50 \}$$

$$A_{\min} = 2$$

Задача 11.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - 20\sin(x/5) > 10) \lor (4y + x^2 > 120)$$
$$\lor\ (y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax)$$

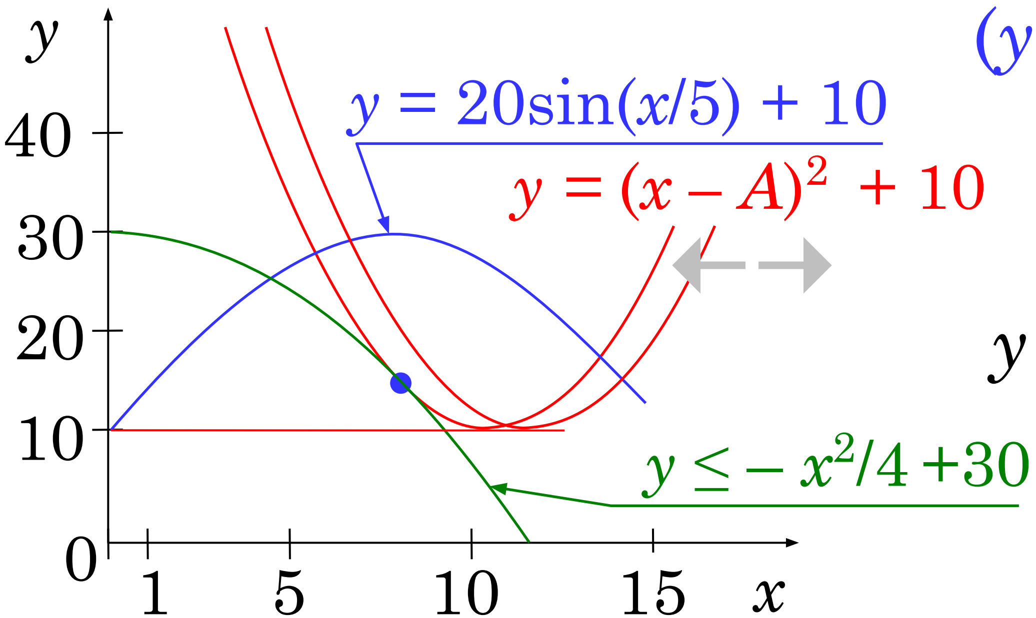
истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax)}_{\text{истинно}} \lor \overbrace{(y - 20\sin(x/5) > 10) \lor (4y + x^2 > 120)}^{\text{не зависит от } A}$$

ложно

$$(y - 20\sin(x/5) \le 10) \land (4y + x^2 \le 120) \land (x > 0) \land (y > 0)$$

Задача 11. Графо-аналическое решение



$(y \le 20\sin(x/5) + 10)$

$\vee\ (y \le -x^2/4 + 30)$

$\wedge\ (x > 0)\ \wedge\ (y > 0)$

$y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax$

$y < (x - A)^2 + 10$

Найти наименьшее значение A, при котором решается уравнение $(x - A)^2 + 10 = -x^2/4 + 30$

$5x^2/4 - 2Ax + A^2 - 20 = 0$

$D = 4A^2 - 5(A^2 - 20) = 0$

при касании!

$A = 10$

$A_{\min} = 11$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru