Действительные числа. Степенная функция.

Материалы по математике для обучающихся 10-11 класса.

Действительным числом называется *бесконечная десятичная дробь* вид а $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, где a_0 - целое число, а каждая из букв a_1 , a_2 , a_3 - это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Примеры:

1. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

$$(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2}) = (\sqrt{4\cdot 2}-3)(3+2\sqrt{2}) =$$

$$(\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2}) =$$

$$8-9=-1$$

Число -1 является рациональным (его можно представить в виде дроби).

2. Вычислить:

$$\sqrt{63}\cdot\sqrt{28} = \sqrt{9\cdot 7}\cdot\sqrt{4\cdot 7} =$$

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = 3\cdot 2\cdot\sqrt{49}$$

$$= 6\cdot 7 = 42$$

Выполните самостоятельно: из § 2 учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» (автор Алимов Ш. А. и другие) упражнение № 9 (2-4), упражнение № 10 (2-4).

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение:

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

Пример: $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

Знаменатель геометрической прогрессии $g = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = \ldots$

Геометрическая прогрессия называется убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Пример.

Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей: $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$

Решение:

$$b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$$

$$b_7 = b_1 \cdot g^6 \qquad b_{11} = b_1 \cdot g^{10}$$

$$\frac{b_{11}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot g^{10}}{b_1 \cdot g^6} = g^4$$

$$g = \sqrt[4]{\frac{\frac{3}{4}}{12}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Так как знаменатель геометрической прогрессии меньше 1, то это убывающая геометрическая прогрессия.

Выполните самостоятельно: упражнение № 16 (3).

Арифметический корень натуральной степени.

Определение:

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из **неотрицательного** **Числа** a называется неотрицательное число b, n- я степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a} = b, b^n = a; \quad a \geq 0, b \geq 0$$

Например: так как и

$$\sqrt[3]{64} = 4 \qquad 4 > 0 \quad 4^3 = 64$$

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами:

Если $a \geq 0, \ b = 0$ и n, m – натуральные числа, причем $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{b}.$ *при b=0*

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ *m- целое* $a > 0$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

Воспользуемся определением арифметического корня:

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \ge 0,$ так как $a \ge 0$ и $b \ge 0$;

2. $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab,$ Так как $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab.$

Аналогично доказываются и остальные свойства:

Примеры: $\sqrt[4]{27}\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27*3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Примеры:

$$-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625} = -\frac{1}{3}\cdot 3 + 5 = -1 + 5 = 4$$

$$\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125} = \sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{0{,}125} = 7\cdot 0{,}5 = 3{,}5$$

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$(\sqrt[3]{x})^6 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$$

$$\sqrt{548^2 - 420^2} = \sqrt{(548-420)\cdot(548+420)} =$$

$$= \sqrt{128\cdot 968} = \sqrt{64\cdot 2\cdot 484\cdot 2} = \sqrt{64}\cdot\sqrt{484}\cdot\sqrt{4} =$$

$$= 8\cdot 22\cdot 2 = 174$$

Тождественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени:
примеры заданий из Открытого Банка Задач
Единого Государственного Экзамена
по математике.

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{\sqrt[18]{7^2}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}}=\frac{\sqrt[18]{7^3}}{\sqrt[18]{7^3}}=1$$

$$\sqrt{548^2-420^2}=\sqrt{(548-420)\cdot(548+420)}=\sqrt{128\cdot968}=\sqrt{64\cdot2\cdot484\cdot2}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{484}\cdot\sqrt{4}=$$
$$=8\cdot22\cdot2=352$$

$$5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^3}=5\cdot\sqrt[6]{(3^2)^3}=5\cdot\sqrt[6]{3^6}=5\cdot3=15$$

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2},\textit{если}\ 6\le a\le10.$$

$$\sqrt{(a-6)^2}=|a-6|=a-6;\ \sqrt{(a-10)^2}=|a-10|=10-a,\ \textit{то}$$

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}=(a-6)+(10-a)=a-6+10-a=4$$

Степень с рациональным показателем.

Если n – натуральное число, m – целое число, то при $a>0$ справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Примеры:

$$\sqrt[4]{b^3}=b^{\frac{3}{4}};\quad \sqrt[5]{\frac{1}{x}}=\sqrt[5]{x^{-1}}=x^{\frac{-1}{5}}$$

$$64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8;\ 8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=\sqrt[3]{(2^2)^3}=2^2=4$$

Свойства степени с рациональным показателем.

Рассмотрим свойства степени с рациональным показателем, они аналогичны свойствам степени с натуральным показателем, здесь m и n-рациональные числа:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Для того, чтобы умножить степени с одинаковыми основанием, нужно сложить их показатели, основание оставить без изменений

Свойства степени с рациональным показателем.

m и n- рациональные числа:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Можно разделить степени с одинаковым основанием, для этого их показатели нужно вычесть, а основание оставить без изменений.

Свойства степени с рациональным показателем.

m и n- рациональные числа:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Для того чтобы степень возвести в степень, нужно перемножить показатели степени, основание оставить без изменений.

Свойства степени с рациональным показателем.

m и n- рациональные числа:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

При умножении степеней с одинаковым показателем, нужно перемножить основания и возвести результат в исходную степень.

Свойства степени с рациональным показателем.

m и n- рациональные числа:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Чтобы разделить степени с одинаковыми показателями, нужно разделить основания и возвести результат в исходную степень.

Выше перечисленные свойства справедливы для любых рациональных показателей.

Примеры решения заданий из Открытого Банка Задач
Единого Государственного Экзамена
по математике

$$\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}=6\cdot n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=6\cdot n^{\frac{4}{12}-\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}=6\cdot n^{0}=6\cdot 1=6$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11}\cdot a^{2,22}}\ при\quad a=\frac{2}{7}$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11+2,22}}=\frac{a^{3,33}}{a^{4,33}}=a^{3,33-4,33}=a^{-1}=(\frac{2}{7})^{-1}=\frac{7}{2}=3,5$$

$$\frac{n^{\frac{5}{6}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}=n^{\frac{5}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=n^{\frac{10}{12}-\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}=n^{\frac{6}{12}}=n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}=\sqrt{64}=8$$

$$n=64$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Выполните упражнение

   № 57- 60 на странице 31 учебника.

2. Вычислите значения выражений № 68-70.
3. Прочитайте решение задачи

№ 10 на странице 30 учебника.

4. Выполните упражнение № 75.

Домашняя работа №-57

1) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8;$

2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3;$

3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = 2^2 = 4;$

4) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = 3^3 = 27;$

5) $16^{-0,75} = 16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(\frac{1}{16})^3} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8};$

6) $9^{-1,5} = 9^{-\frac{2}{3}} = \sqrt{(\frac{1}{9})^3} = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}.$

Домашняя работа №-58

1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^3 = 8;$

2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 5^1 = 5;$

3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{3}{6}} = 3;$

4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = 4^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$

5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4} = 8^{-\frac{4}{12}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$

Домашняя работа №-59

1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2 \cdot 27^2} = \sqrt[5]{9^2 \cdot (9 \cdot 3)^2} = \sqrt[5]{9^2 \cdot 9^2 \cdot 9} = \sqrt[5]{9^5} = 9;$

2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2 \cdot 49^2} = \sqrt[3]{7^2 \cdot 7^4} = \sqrt[3]{7^6} = \sqrt[3]{\left(7^2\right)^3} = 7^2 = 49;$

3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{144^3 : 9^3} = \sqrt[4]{(12^2)^3 : (3^2)^3} = \sqrt[4]{(4^2)^3} =$

$= \sqrt[4]{\left(\left(2^2\right)^2\right)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4} = 2^3 = 8;$

4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{150}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = \sqrt{25^2 \cdot 25} = 25\sqrt{25} = 25 \cdot 5 = 125.$

Домашняя работа №-60:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{3}+2^{4}=8+16=24;$

2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}=\left(0,2^{2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(0,5^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{10}{2}\right)^{3}-\left(\frac{10}{5}\right)^{2}=5^{3}-2^{2}=121;$

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}=8^{\frac{9}{7}-\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}=8^{1}-3^{2}=-1;$

4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}=5^{2}+(0,2)^{-3}=25+5^{3}=25+125=150.$

Домашняя работа №-68:

1) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2^0 = 1;$

2) $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = 3^0 = 1;$

3) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 5^3 = 125;$

4) $\left(0{,}5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 0{,}5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16.}$

Домашняя работа №-69:

1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 2^{3\sqrt{5}} = 2^2 = 4;$

2) $9^{\sqrt[3]{2}} = 3^{2\sqrt[3]{2}};$

3) $\left(5^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}} = 5^{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = 5^{1-2} = \dfrac{1}{5};$

4) $\left(5^{1-\sqrt{5}}\right)^{1+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}\right)^0 = 5^{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)} - 1 = 5^{-4} - 1 = -\dfrac{624}{625}.$

Домашняя работа №-70:

1) $4^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}};$

2) $27^{\sqrt{3}} = 3^{3\sqrt{3}};$

3) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}} = 3^{2\left(1+\sqrt{3}\right)} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} = 3;$

4) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{2\left(3+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^{3} = 8.$

Иррациональное уравнение.

Определение:

- уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком корня (радикала), называется иррациональным.

$$\sqrt{4-2x}=6$$

$$\textit{Возведем уравнение во вторую степень}:$$

$$4-2x=36$$

$$-2x=36-4$$

$$-2x=32$$

$$x=\frac{32}{-2}$$

$$x=-16$$

Выполните самостоятельно:

$$\sqrt{53+2x}=7$$

$$\sqrt{\frac{18}{2x-52}}=\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{\frac{7x+28}{18}}=7$$

$$\sqrt{\frac{2}{7x-31}}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{4x+40}{17}}=4$$

$$\sqrt{15-2x}=3$$

$$\sqrt{55-3x}=7$$