ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Равномерное распределение

Пусть плотность распределения случайной величины является постоянной $f(x) = \text{const}$ на интервале $[a,b]$, и $f(x) = 0$ вне этого интервала.

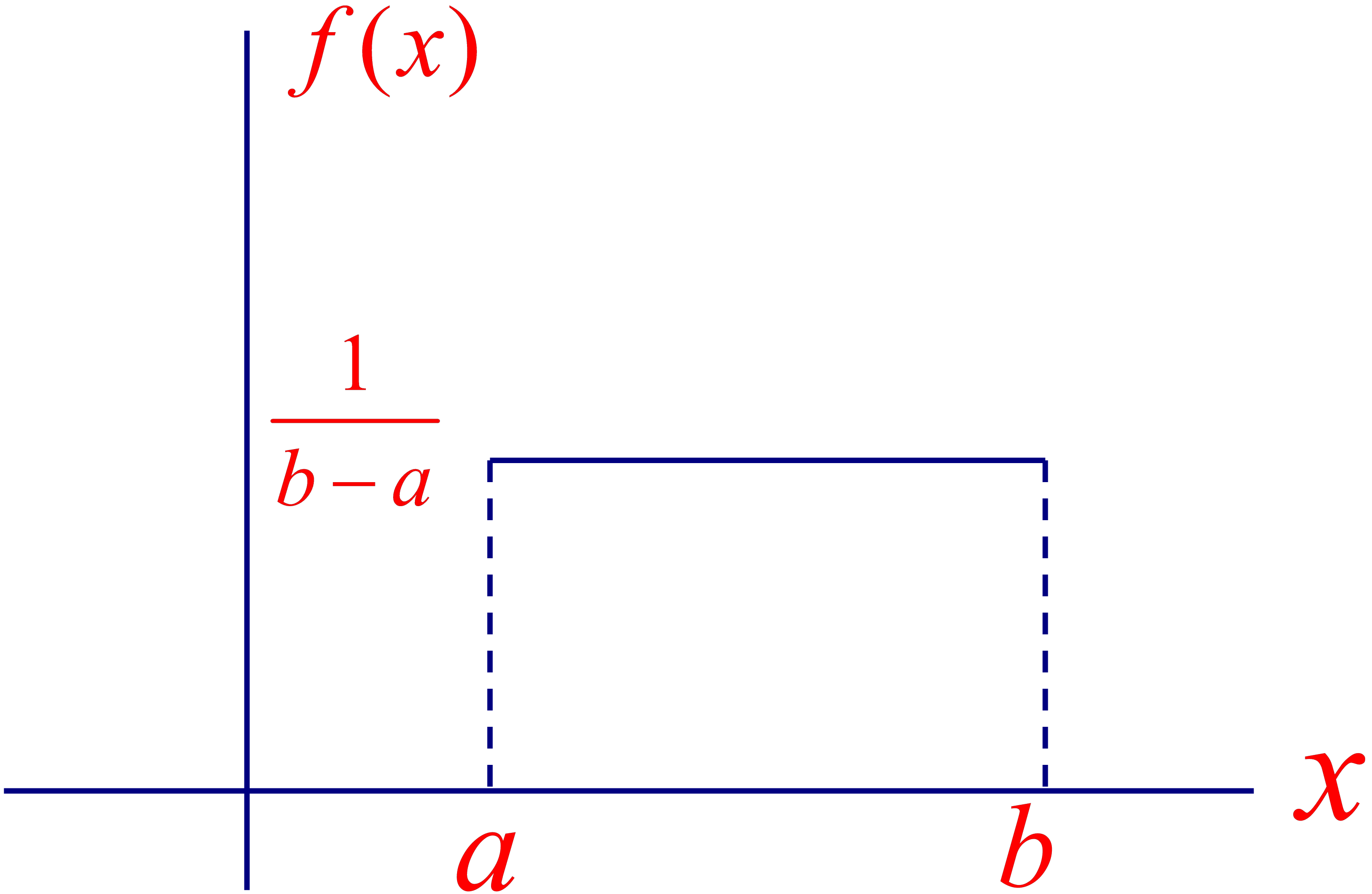
Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то $\int\limits_{a}^{b} C\,dx = 1$

откуда $Cx\Big|_a^b = C(b-a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \dfrac{1}{b-a}$

.

Таким образом, плотность распределения равномерного закона представляется в виде

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a,b], \\ 0 & \text{при} \quad x\in(-\infty, a)\cup(b, \infty). \end{cases}$$


$f(x)$
$\frac{1}{b-a}$
a
b
x

Найдем математическое ожидание равномерного закона распределения.

$$M(\xi)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

ЗАДАЧА.

Диаметр гайки, которая изготавливается станком-автоматом, есть равномерно распределенная случайная величина со средним значением 5 мм и средним квадратическим отклонением 1 мм. Определить интервал, из которого принимает значения данная случайная величина.

РЕШЕНИЕ.

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = M = 5, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 10, \\ b-a = 2\sqrt{3}, \end{cases}$$

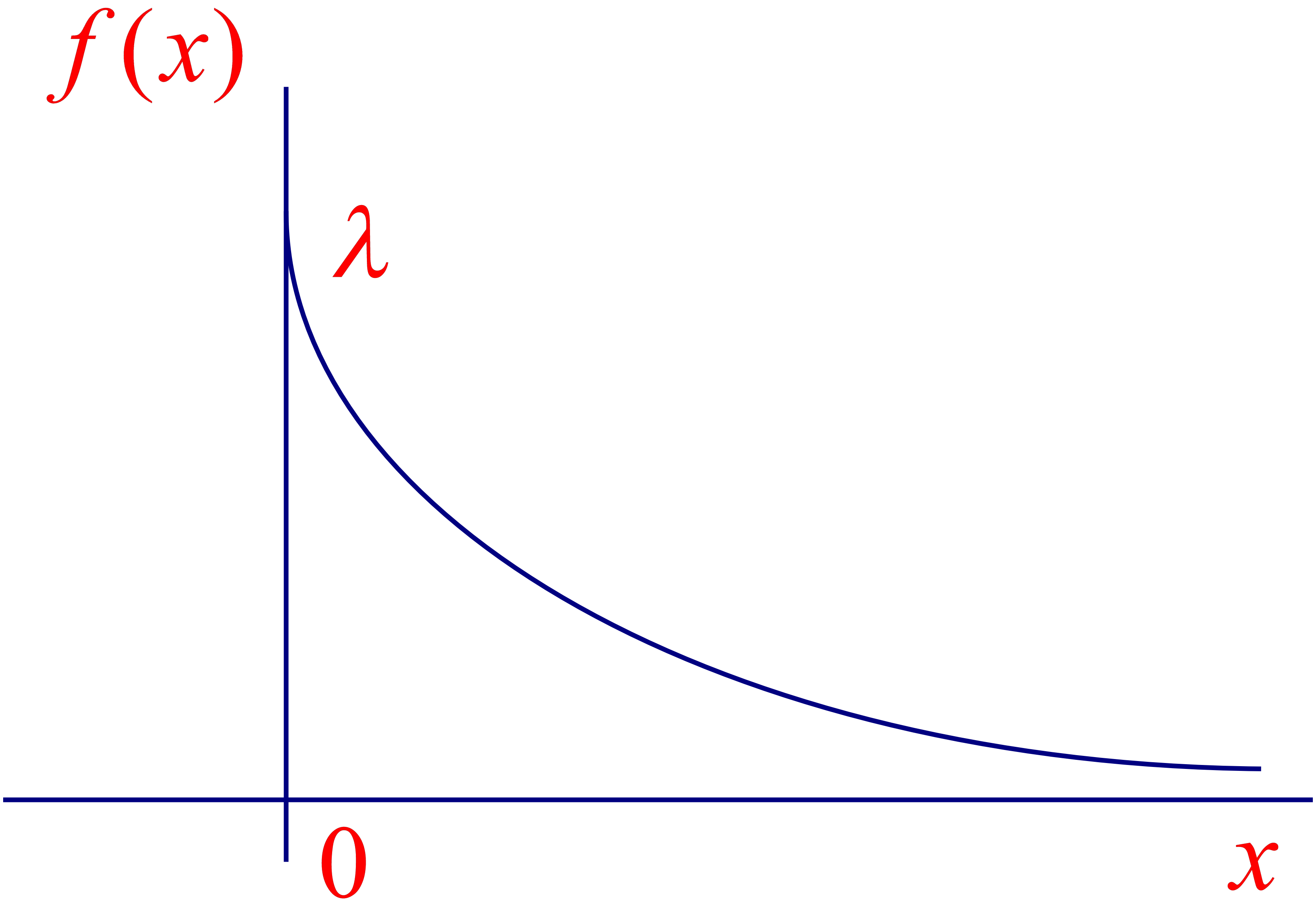
откуда $a = 5-\sqrt{3} \approx 3.3, \quad b = 5+\sqrt{3} \approx 6.7.$

ОТВЕТ: $[5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}].$

Показательное распределение.

Распределение называется **показательным** с параметром λ, если плотность вероятности представляется показательной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



$f(x)$
λ
0
x

Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону.

$$M(\xi) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x d(e^{-\lambda x}) = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{-\lambda x} = 0$

при любых положительных k и λ. Это доказывается последовательным применением правила Лопиталя.

Например, при k=1 получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{\left(e^{\lambda x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Возвращаясь к вычислению математического ожидания, получаем

$$-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=0+0-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty}=$$

$$-\infty\cdot e^{-\infty}-\frac{e^{-\infty}}{\lambda}+0\cdot e^{0}+\frac{e^{0}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}.$$

УПРАЖНЕНИЕ.

Доказать, что дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$D(\xi) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

ЗАДАЧА.

Время службы электрической лампочки есть случайная величина, распределенная по показательному закону.
Найти вероятность того, что лампочка будет работать не меньше 120 часов,
если среднее время работы лампочки составляет 240 часов.

РЕШЕНИЕ.

Поскольку математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону, равно

$$\frac{1}{\lambda}$$

имеем

$$\frac{1}{\lambda} = 240 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{240}.$$

Следовательно, плотность распределения времени службы лампочки имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{e^{-x/240}}{240}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Искомая вероятность равна

$$P\{\xi \geq 120\} = \int\limits_{120}^{\infty} \frac{e^{-x/240}}{240} dx =$$

$$-e^{-x/240}\Big|_{x=120}^{x=\infty} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.606.$$

Нормальное распределение.

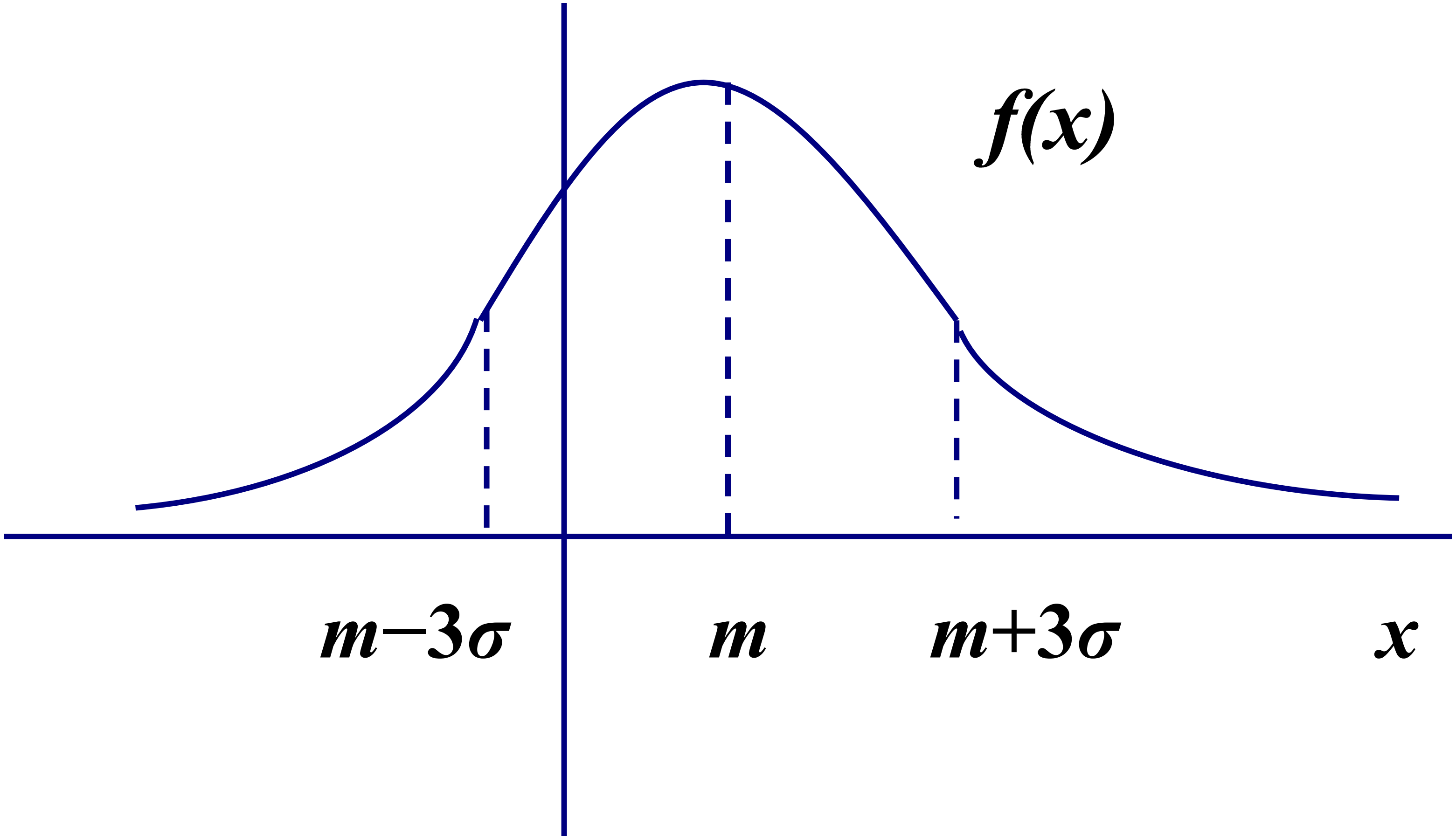
Случайная величина распределена нормально, если плотность вероятности представляется в виде.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Функция плотности зависит от двух вещественных параметров *a* и *σ*,
где *a – математическое ожидание*, *a* *σ – среднее квадратическое отклонение*.
Обозначается нормально распределенная случайная величина

$$N(a,\sigma)$$

КОЛОКОЛ



Основная трудность с вычислениями, связанными с нормальным законом распределения, заключается в том, что функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

не может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Одна из первообразных функции $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

функция Лапласа, затабулирована, и ее значения можно найти в статистических таблицах.

Функция Лапласа задается соотношением

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.}$$

Из определения следует, что функция Лапласа *нечетная и монотонно возрастающая*.

При этом

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0.5,\qquad \lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=-0.5.$$

Вероятность попадания случайной величины

$$\xi = N(a,\sigma)$$

на заданный промежуток вычисляется по формуле:

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Чтобы убедиться в этом, надо сделать замену переменной

$$\frac{x-a}{\sigma}=t$$

под знаком определенного интеграла:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{c} x = \sigma t + a \\ dx = \sigma\, dt \\ x = \alpha \Rightarrow t = \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ x = \beta \Rightarrow t = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

После этого остается применить формулу Ньютона—Лейбница.

ПРИМЕР.

Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно 10, а дисперсия 4.

Записать плотность вероятности и вычислить вероятность попадания случайной величины на интервал (12, 14).

РЕШЕНИЕ.

Имеем: a=10, σ^2=4,

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

.

$$P(12 < \xi < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359.$$

Правило “трех сигм”.

Найдем вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания.

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon)$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Обозначим $\frac{\varepsilon}{\sigma} = t, \quad \varepsilon = \sigma t.$

При $t = 1$

$$P(|\xi - a| < \sigma) = 2 \cdot \Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$$

$t = 2$

$$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2 \cdot \Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$

$t = 3$

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$$

ВЫВОД: если случайная величина распределена нормально,
то ее отклонение от математического ожидания с вероятностью 0,9973
не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НОРМАЛЬНЫМ

χ^2 –РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$

– независимые одинаково нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием a и средним квадратичным уклонением σ. Тогда случайная величина

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

где $\bar{\xi} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$

называется распределением χ^2 с n

степенями свободы.

Плотность

χ^2 −распределения определяется функцией

$$f(x,n)=\begin{cases} Ke^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Константа K определяется из условия вероятностной нормировки $\int\limits_0^{\infty} f(x,n)dx = 1$

Интеграл вида $$\Gamma(t) = \int\limits_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, \quad t > 0,$$

в математическом анализе называется Гамма−функцией. Следовательно,

$$K = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

.

Математическое ожидание

χ^2 −распределения равно $M = n$

дисперсия равна $D = 2n$

Предположим теперь, что среди исходных нормально распределенных случайных величин

$$\xi_1, \dots, \xi_n$$

не все n величин независимы, но имеется s линейных соотношений типа равенства.

Оказывается, что тогда случайная величина

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$$

по-прежнему, имеет распределение такого же вида, что и прежде, но с меньшим числом степеней свободы $\nu = n - s$

$$f(x,\nu) = \begin{cases} Ke^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}, \text{ при } x \geq 0; \\ 0, \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

Это обстоятельство часто используется при оценивании параметров распределений в математической статистике

В дальнейшем нам понадобится понятие **критической точки распределения** χ^2 **с уровнем значимости** α

Это – решение уравнения

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\chi^2_\alpha} f(x,n)dx = 1-\alpha.$$

Значения χ^2_α

как функции от числа степеней свободы n и уровня значимости α затабулированы и приводятся во всех учебниках по математической статистике.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Пусть Z стандартная нормально распределенная случайная величина $N(0,1)$, а U − независимая от нее χ^2−*распределенная случайная величина с* v степенями свободы. Тогда случайная величина

$$T = \frac{Z\sqrt{v}}{U}$$

называется t−распределением, или распределением Стьюдента с v степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$f(x,\nu) = B\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Константа B определяется из условия вероятностной нормировки.
Для распределения Стьюдента математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна

$$\frac{\nu}{\nu-2}$$

Для распределения Стьюдента можно определить критические точки распределения, аналогично тому, как это было сделано для распределения χ^2

$$P(T \geq t_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_\alpha} f(x,\nu)\,dx = 1 - \alpha.$$