Числові послідовності

Точна верхня та точна нижня межа множини

$A \subset \mathbb{R}$

Алгебра

Точна верхня межа

Множина A називається **обмеженою зверху**, я :

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \leq c.$$

Т c називається **верхньою межею**.

Точна верхня межа

Число $c^* \in \mathbb{R}$ називається **точною верхньою межею** множини A, я:

1. c^* — верхня межа,
2. $\forall d$ — верхньої межі множини A виконується: $c^* \leq d$.

Тобто c^* — найменша верхня межа.

Позначення. $c^* = \sup\limits_{x \in A} A$ супремум

Точна верхня межа

Розглянем $C = \max\limits_{x \in A} A$

Я існує цей максимум, то $C = c^*$. А навпаки? Ні!

Приклад. $A = [0; 1)$.

Максимального елемента не існує, але

$$c^* = \sup_{x \in [0;1)} [0; 1) = 1.$$

Дійсно:

1. 1 − це верхня межа, оскільки $\forall x \in A: x < 1$.
2. d − довільна верхня межа. Якби $d < 1$, то завжди $\exists x \in A: x > d$. Отже $d \geq 1$.

Точна нижня межа

Множина A називається **обмеженою знизу**, Я :

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall x \in A \colon x \geq c.$$

Т c називається **нижньою межею**.

Точна нижня межа

Число $c_* \in \mathbb{R}$ називається **точною нижньою межею** множини A, Ⓨ:

$1.\, c^* -$ нижня межа,
$2.\, \forall d -$ нижньої межі множини A виконується: $c_* \geq d$.

Тобто $c^* -$ найбільша нижня межа.

Позначення. $c_* = \inf\limits_{x \in A} A$ інфінум

Теорема 1

- Число c^* є точною верхньою межею множини A тоді і тільки тоді, коли:

1) c^* – верхня межа;

2) $\forall d < c^*: \exists x \in A: x > d$.

Число c_* є точною нижньою межею множини A тоді і тільки тоді, коли:

1) c_* – нижня межа;

2) $\forall d > c_*: \exists x \in A: x < d$.

Теорема 2 (про існування точної верхньої і точної нижньої межі)

Не порожня, обмежена зверху підмножина з множини дійсних чисел має точну верхню межу.

Не порожня, обмежена знизу підмножина з множини дійсних чисел має точну нижню межу.

Теорема Вейєрштрасса

Монотонна обмежена послідовність дійсних чисел має границю.

Теорема Вейєрштрасса

Н $\{a_n | n \geq 1\}$ – неспадна обмежена зверху, тобто

$\forall n \geq 1: a_n \leq a_{n+1}$ і $\exists c \in \mathbb{R}: \forall n \geq 1: a_n \leq c$.

Розглянемо нескінченну множину $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

1. $A \neq \emptyset$; *2.* A – обмежена зверху;

Т За теоремою 2: $\exists a^* \in \mathbb{R}: a^* = \sup\limits_{a_n, n \geq 1} A$

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теорема Вейєрштрасса

Доведемо, що $\lim_{n\to\infty} a_n = a.$

$\varepsilon > 0$

Оскільки $a - \varepsilon < a$, то за теоремою 1

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: a - \varepsilon < a_{n_0}$

$\forall n \geq n_0 : a_{n_0} \leq a_n$ (послідовність неспадна)

$\forall n \geq n_0 : a_n \leq a$ (означення точної верхньої межі)

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = n_0 : \forall n \geq N:$

$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow a_n \to a, n \to \infty.$