Численное решение

систем нелинейных уравнений

С Н У

Общий вид СНУ

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

где F – функции нескольких переменных,

x – неизвестные

n –порядок системы

Методы решения СНУ:

1. Прямых методов

   для решения СНУ не существует.

2. Итерационные методы.

   Методы являются неустойчивыми, однако точность полученного решения определяется пользователем.

Метод Зейделя (метод простых итераций)

Ограниченный круг СНУ

Исходные данные:

1. $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
2. $X^{(0)}$
3. E

Требование

Функции $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ должны быть непрерывны в окрестности точки истинного решения X и точки начального приближения $X^{(0)}$

Метод Зейделя на примере СНУ 3-го порядка

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

1. Из 1-го уравнения выражаем неизвестное x_1.
2. Из 2-го уравнения выражаем неизвестное x_2.
3. Из 3-го уравнения выражаем неизвестное x_3.

Получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_2, x_3) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_3) \\ x_3 = \varphi_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

2. В правую часть 1-го уравнения подставляем начальные приближения неизвестных $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_1^{(1)}$.

3. В правую часть 2-го уравнения подставляем начальное приближение неизвестного $x_3^{(0)}$ и уточненное значение $x_1^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_2^{(1)}$.

4. В правую часть 3-го уравнения подставляем уточненные значения неизвестных $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_3^{(1)}$.

5. Далее рассчитывается разность между значениями начальных приближений и уточненными значениями неизвестных.

Если

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| < E$$

и

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| < E$$

и

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| < E$$

то считается, что значения $x_1^{(1)}$., $x_2^{(1)}$., $x_3^{(1)}$ являются решением данной системы. В противном случае эти значения принимаются за начальное приближение и процесс повторяется.

ЗАМЕЧАНИЕ

Метод Зейделя применим, если

неизвестные из соответствующих уравнений можно выразить в явном виде.

Метод Зейделя для решения СНУ не является универсальным.

Примеры:

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^3 - 1 = 0 \\ \ln x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{1 - 4x_2^3} \\ x_2 = -0{,}5 - 0{,}5 \ln x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^3 - \sin 10x_1 + \cos x_2 = 0 \\ \ln x_1 + 2x_2 - 4\ln x_2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \end{cases}$$

Метод Ньютона для решения СНУ

Основа: разложение функций в ряд Тейлора относительно значений начальных приближений неизвестных.

Затем применяется линеаризация системы.

Для реализации метода Ньютона необходимо задать следующие данные:

1. Выражения для функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в аналитическом виде.
2. Выражения для частных производных функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по каждому аргументу в аналитическом виде.
3. $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.
4. E.

Требование

Функции $F_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ должны быть непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки истинного решения X и точки начального приближения $X^{(0)}$

Метод Ньютона на примере СНУ 3-го порядка

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

Задано: x_1^0, x_2^0 и x_3^0.

Истинное решение системы: x_1, x_2 и x_3.

Разность:

$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta x_3 = x_3 - x_3^0$

F_1, F_2 и F_3 разлагаются в ряд Тейлора.

Члены, содержащие производные старше первого порядка отбрасываются.

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,x_3) = F_1(x_1^0,x_2^0,x_3^0) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\Delta x_3 = 0 \\ F_2(x_1,x_2,x_3) = F_2(x_1^0,x_2^0,x_3^0) + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}\Delta x_3 = 0 \\ F_3(x_1,x_2,x_3) = F_3(x_1^0,x_2^0,x_3^0) + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3}\Delta x_3 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему.

Получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\Delta x_3 = -F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}\Delta x_3 = -F_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3}\Delta x_3 = -F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{cases}$$

Неизвестные - Δx_1, Δx_2 и Δx_3,

Вектор-столбец свободных членов – F_1, F_2 и F_3 в точке начального приближения,

Коэффициенты - производные функций F_1, F_2 и F_3 по неизвестным x_1, x_2 и x_3 в точке начального приближения.

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

Матрица Якоби (Якобиан)

$$B = \begin{vmatrix} -F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ -F_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ -F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{vmatrix}$$

СЛАУ решается любым известным методом (метод Гаусса, метод Крамера), получаем значения неизвестных Δx_1, Δx_2 и Δx_3

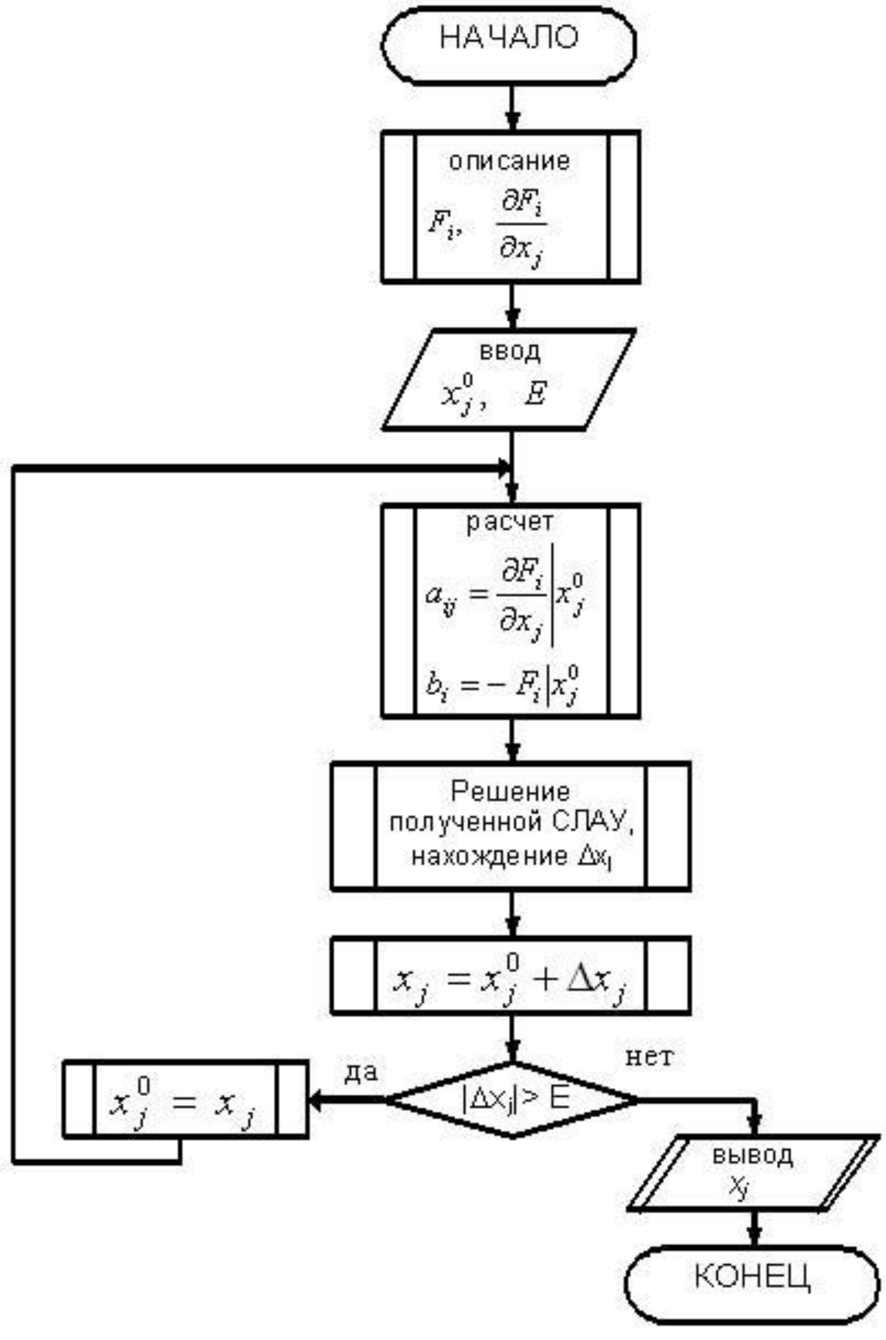
x_1, x_2 и x_3 рассчитываются по формулам:

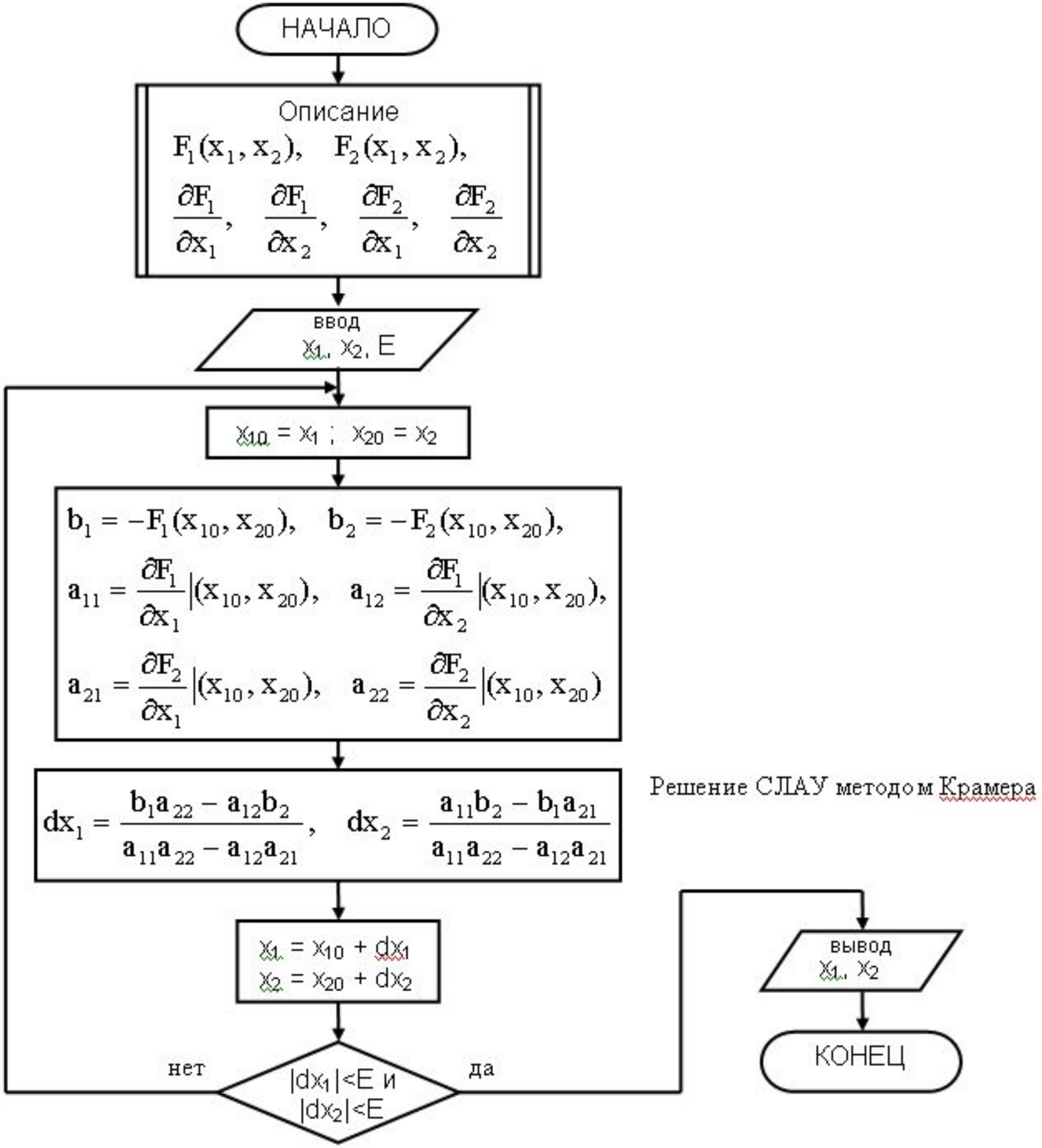
$$x_1 = x_1^0 + \Delta x_1, \quad x_2 = x_2^0 + \Delta x_2, \quad x_3 = x_3^0 + \Delta x_3$$

Если полученные значения Δx_1 и Δx_2 и Δx_3 по модулю оказались менее заданной точности E, то считается, что рассчитанные значения x_1, x_2 и x_3 являются решением данной системы нелинейных уравнений.

Если хотя бы одно из значений Δx_1, Δx_2, Δx_3 по модулю оказалось выше заданной точности E, то рассчитанные значения x_1, x_2 и x_3 принимаются в качестве нового начального приближения и процесс повторяется.

- Блок-схема метода Ньютона в общем виде





- Блок-схема метода Ньютона для частного случая - системы 2 порядка

Замечание

- Метод Ньютона является неустойчивым, прогнозировать сходимость невозможно.
- Сходимость метода зависит от порядка системы и от удачного выбора начального приближения решения.