ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение

- Пусть на отрезке [a,b] задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок [a,b] произвольным образом на n частей точками [x_0 , x_1], [x_1 ,x_2], …, [x_i-1 , x_i], …, [x_n-1 , x_n]; длину i-го отрезка обозначим : ; максимальную из длин отрезков обозначим . На каждом из отрезков[x_i-1 , x_i] выберем произвольную точку и составим сумму . Сумма называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм при , не зависящий ни от способа разбиения отрезка [a,b] на части [x_i-1 , x_i], ни от выбора точек , то функция f(x) называется интегрируемой по отрезку [a,b], а этот предел называется определённым интегралом от функцииf(x) по отрезку [a,b] и обозначается .

Геометрический смысл

- если $f(x)>0$ на отрезке $[a,b]$, то равен площади криволинейной трапеции*ABCD*, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху – функцией $y = f(x)$.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

- Если ***f***(***x***) непрерывна на отрезке [***a***, ***b***], и ***F***(***x***) - некоторая первообразная функции , то .
  Док-во. Мы установили, что функция - первообразная непрерывной ***f***(***x***). Так как ***F***(***x***) - тоже первообразная, то Ф(***x***) = ***F***(***x***) + ***C***. Положим в этом равенстве ***x*** =***a***. Так как , то . В равенстве переобозначим переменные: для переменной интегрирования ***t*** вернёмся к обозначению ***x*** , верхний предел ***x*** обозначим ***b***. Окончательно, .
  Разность в правой части формулы Ньютона-Лейбница обозначается специальным символом: (здесь читается как " подстановка от ***a*** до ***b***"), поэтому формулу Ньютона-Лейбница обычно записывают так: .

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

- Если **u**(**x**), **v**(**x**) - непрерывно дифференцируемые функции, то $\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
  Док-во. Интегрируем равенство в пределах от **a** до **b**: . Функция в левом интеграле имеет первообразную **uv**, по формуле Ньютона-Лейбница , $\int_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b$

откуда и следует доказываемое равенство.
Пример: $\int_1^5 \ln x dx = x \ln x\Big|_1^5 - \int_1^5 x d(\ln x) = (5\ln 5 - 1\ln 1) - \int_1^5 x \frac{dx}{x} = 5\ln 5 - x\Big|_1^5 = 5\ln 5 - (5-1) = 5\ln 5 - 4$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

- Пусть функция
  - определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке ,
  - ,
  - функция непрерывна на отрезке [*a*, *b*].
  - Тогда

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \qquad \int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx \qquad \int C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int dx = x + C \qquad \int f(x+a)\,dx = F(x+a) + C$$

$$\int (U + V + W)\,dx = \int U\,dx + \int V\,dx + \int W\,dx$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$