

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$; длину i -го отрезка обозначим Δx_i ; максимальную из длин отрезков обозначим Δx . На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$. Сумма называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм при $n \rightarrow \infty$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i , то функция $f(x)$ называется интегрируемой по отрезку $[a, b]$, а этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

- если $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$, сверху - функцией $y = f(x)$.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

- Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции, то .

Док-во. Мы установили, что функция - первообразная непрерывной $f(x)$. Так как $F(x)$ - тоже первообразная, то $\Phi(x) = F(x) + C$. Положим в этом равенстве $x = a$. Так как , то . В равенстве переобозначим переменные: для переменной интегрирования t вернёмся к обозначению x , верхний предел x обозначим b .

Окончательно, .

Разность в правой части формулы Ньютона-Лейбница обозначается специальным символом: (здесь читается как "подстановка от a до b "), поэтому формулу Ньютона-Лейбница обычно записывают так: .

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

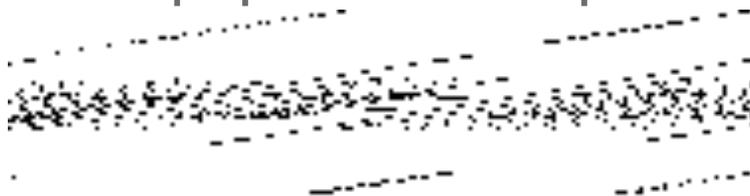
- Если $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то $\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
 Док-во. Интегрируем равенство в пределах от a до b : . Функция в левом интеграле имеет первообразную uv , по формуле Ньютона-Лейбница , $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$
 откуда и следует доказываемое равенство.

Пример: $\int_1^5 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^5 - \int_1^5 x d(\ln x) = (5 \ln 5 - 1 \ln 1) - \int_1^5 x \frac{dx}{x} = 5 \ln 5 - x \Big|_1^5 = 5 \ln 5 - (5 - 1) = 5 \ln 5 - 4$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

○ Пусть функция

- определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке , $[a, b]$
- , $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$
- функция непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.
- Тогда



СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad \int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx \quad \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\int dx = x + C \quad \int f(x+a) dx = F(x+a) + C$$

$$\int (U + V + W) dx = \int U dx + \int V dx + \int W dx$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$