ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 12

3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

3.3. Непрерывность выпуклой функции.

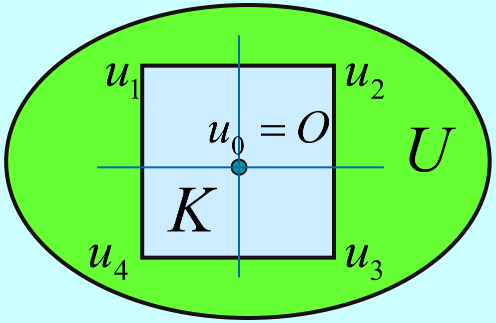
3.4. Дифференцируемость выпуклой функции по всем возможным направлениям.

3.3. Непрерывность выпуклой функции. Неравенство (1.1), определяющее

$$I(\alpha u+(1-\alpha)v)\le \alpha I(u)+(1-\alpha)I(v) \qquad (1.1)$$

выпуклую функцию, оказывается столь сильным, что обеспечивает ей непрерывность в каждой внутренней точке области определения.

Теорема 6. ***Пусть функция*** $I:U\to R^1$, ***где*** $U\subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла. Тогда она непрерывна в любой точке*** $u_0\in \operatorname{int}U$.

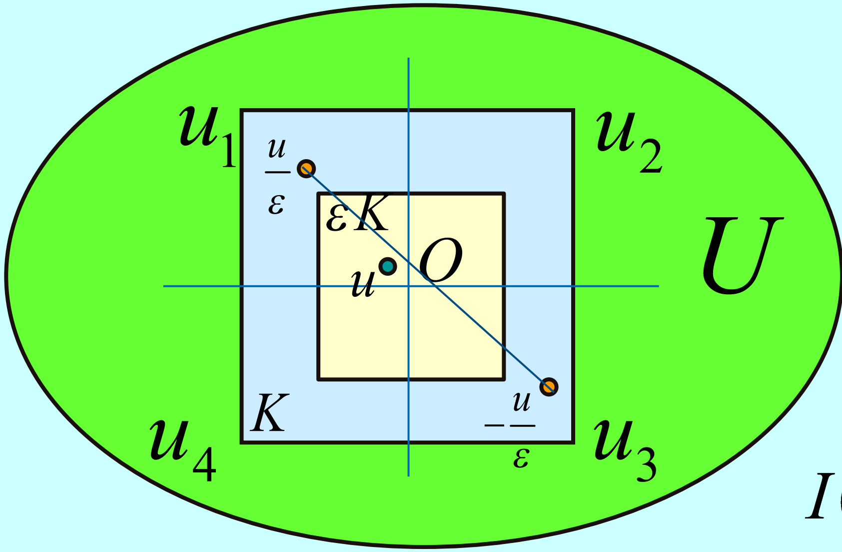


Доказательство. Сначала предположим, что $u_0=0\in\operatorname{int}U$, $I(u_0)=0$. Существует $n-$ мерный куб K с вершинами $u_1,\ldots,u_m$, $m=2^n$, с центром в нуле и содержащийся в множестве U. Обозначим $I_K=\max\limits_{i\in\{1,\ldots,m\}} I(u_i)$. Любая точка $v\in K$ может быть представлена в виде

$$v=\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i=1,\ \alpha_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m.$$

Тогда в силу выпуклости функции I находим

$$I(v)=I\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right)\overset{\text{выпуклость } I}{\le}\sum_{i=1}^m \alpha_i \overbrace{I(u_i)}^{\le I_K}\le I_K\overbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i}^{=1}=I_K. \qquad (1)$$



Пусть $u \in \varepsilon K \subset U, \ \ \varepsilon \in (0,1].$

Тогда $\pm\frac{u}{\varepsilon} \in K.$ Из неравенства (1)

$I(v) \le I_k, \ v \in K \quad (1)$ следует

$$I\Big(\overset{\varepsilon\cdot\frac{u}{\varepsilon}+(1-\varepsilon)\cdot 0}{u}\Big) = I\left(\varepsilon\cdot\overset{\in K}{\frac{u}{\varepsilon}}+(1-\varepsilon)\cdot\overset{\in K}{0}\right)\overset{I\ \text{выпуклая}}{\le}$$

$$\overset{I\ \text{выпуклая}}{\le} \varepsilon\, \overset{\le I_K}{I\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)}+(1-\varepsilon)\overset{=0}{I(0)} \le \varepsilon I_K. \quad (2)$$

С другой стороны

$$0 = I\Big(\overset{\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot u+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(-\frac{u}{\varepsilon}\right)}{0}\Big) = I\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\overset{\in K}{u}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\overset{\in K}{\left(-\frac{u}{\varepsilon}\right)}\right)\overset{\text{выпуклость } I}{\le}$$

$$\overset{\text{выпуклость } I}{\le} \frac{1}{1+\varepsilon}\, I(u)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot I_k \Rightarrow 0 \le I(u)+\varepsilon\cdot I_k \Rightarrow$$

$$I(u) \ge -\varepsilon I_k. \qquad (3)$$

Из (2) $I(u) \le \varepsilon I_K$ (2) и (3) $I(u) \ge -\varepsilon I_k$ (3) следует, что $|I(u)| \le \varepsilon I_k \Rightarrow$

$$\Bigl|I(u) - \overbrace{I(0)}^{=0}\Bigr| = |I(u)| \le \varepsilon I_k,$$

что и означает непрерывность функции I в нуле.

Общий случай сводится к уже рассмотренному путем введения функции $G : \left(U - \{u_0\}\right) \to R^1$, определенной формулой

$$G(u) = I(u + u_0) - I(u_0), \quad u \in \overbrace{U - \{u_0\}}^{\text{область определения } G}.$$

Эта функция выпукла и для нее выполнено

$$0 \in \operatorname{int}\left(U - \{u_0\}\right), G(0) = I(\overbrace{u}^{0} + u_0) - I(u_0) = 0.$$

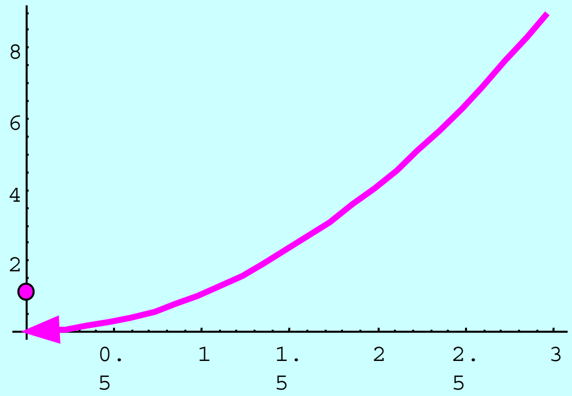
Тогда по доказанному она непрерывна в нуле. Непрерывной в нуле будет и функция

$$I(u + u_0) = \overbrace{G(u)}^{\text{непрерывна}} + \overbrace{I(u_0)}^{\text{константа}}, u \in U - \{u_0\},$$

как сумма непрерывной функции и постоянной. Отсюда следует непрерывность функции $I(u), u \in U$ в точке u_0. Теорема доказана.

Для граничных точек доказанная теорема неверна.

Пример 4. Функция $I:[0,+\infty)\to R^1$, определенная равенством



$$I(u)=\begin{cases}u^2, & u>0\\ 1, & u=0\end{cases}, \quad u\in[0,+\infty),$$

выпукла на $[0,+\infty)$, но терпит разрыв в нуле.

Покажем, что эта функция выпукла. Достаточно проверить определение выпуклости только в точке $u=0$. Пусть $u\in(0,+\infty)$ и $\alpha\in[0,1)$.

(В случае $\alpha=1$: $I\left(\overbrace{1\cdot 0+(1-1)u}^{0}\right)=\overbrace{I(0)}^{=1}=1\cdot I(0)+\overbrace{(1-1)}^{0}I(u)$ неравенство Иесена

выполнено в форме равенства). Вычисляем

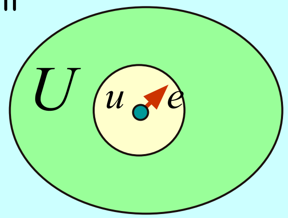
$$I\left(\alpha\cdot 0+(1-\alpha)u\right)=I\left(\overbrace{(1-\alpha)u}^{>0}\right)=\overbrace{(1-\alpha)^2}^{\le(1-\alpha)}u^2\overset{+\alpha\ge 0}{\le}\alpha\cdot\overbrace{1}^{I(0)}+(1-\alpha)\overbrace{u^2}^{I(u)}=$$

$$=\alpha I(0)+(1-\alpha)I(u)\Rightarrow$$

$$I\left(\alpha\cdot 0+(1-\alpha)u\right)\le\alpha I(0)+(1-\alpha)I(u).$$

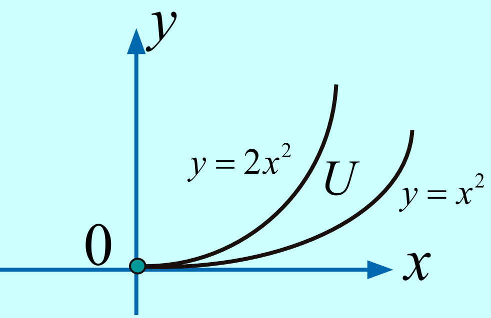
3.4. Дифференцируемость выпуклой функции по всем возможным направлениям.

Определение 3. ***Пусть*** $u \in U \subset R^n$. ***Направление*** $e \in R^n, \|e\| = 1$ ***называется возможным в точке*** u, ***если существует число*** $t_0 > 0$ ***такое, что*** $u + te \in U, \forall t \in [0, t_0]$.



Пример 5. Пусть $u \in \operatorname{int} U$. Тогда любое направление $e \neq 0$ будет возможным.

Пример 6. Пусть $U = \left\{ u = (x, y) \in R^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 2x^2 \right\}$.



Для точки $u = (0,0)$ нет ни одного возможного направления.

Действительно, пусть $e = (e_1, e_2), \|e\| = 1$ и $t > 0$. Тогда, если это направление возможное, для точки $u = (0,0) \in U$ должно выполняться включение $0 + te = (te_1, te_2) \in U$ для достаточно малых $t \geq 0$.

Данное включение означает, что $t^2 (e_1)^2 \leq te_2 \leq 2t^2 (e_1)^2 \Rightarrow$

$$t(e_1)^2 \leq e_2 \leq 2t(e_1)^2. \qquad (1)$$

Левое неравенство в (1) невозможно, если $e_2 \leq 0$. В случае, когда $e_2 > 0$ для малых $t > 0$ невозможно правое неравенство в (1). Полученное противоречие доказывает отсутствие возможных направлений для точки $u = (0,0) \in U$.

Пример 7. Пусть множество $U \subset R^n$ выпукло и содержит не менее двух точек. Тогда для любой точки $u \in U$ имеется хотя бы одно возможное направление.

Действительно, пусть $v \in U,\ v \neq u.$ Положим $e = v - u.$ Для всех $t \in [0,1]$ имеем

$$u + t\overset{v-u}{e} = u + t(v-u) = tv + (1-t)u \in U.$$

Полученное включение означает, что направление $e = v - u$ – возможное.

Определение 4. ***Пусть*** $I : U \to R^1, U \subset R^n.$ ***Производной функции*** I ***по возможному направлению*** $e, \|e\| = 1,$ ***будем называть величину***

$$\frac{dI}{de}(u) = \lim_{t \to +0} \frac{I(u+te) - I(u)}{t},$$

если этот предел существует.

Заметим, что если функция I определена в некоторой окрестности точки u и дифференцируема в ней, то она имеет производные по всем возможным направлениям причем

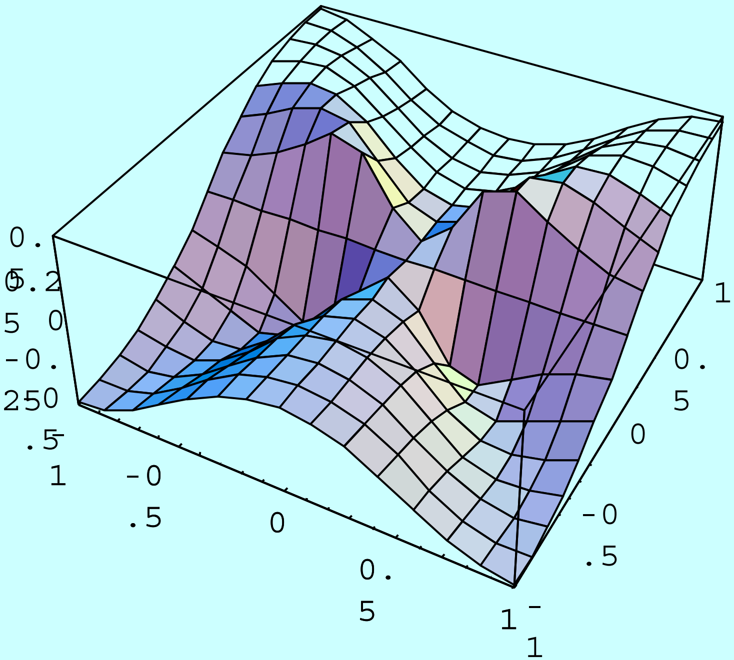
$$\frac{dI}{de}(u) = \frac{\partial}{\partial t} I(u+te)\Big|_{t=0} = \left\langle I'(u+te)\big|_{t=0}, \frac{\partial}{\partial t}(te) \right\rangle = \left\langle \overset{grad\ I(u)}{I'(u)}, e \right\rangle.$$

Однако, обратное неверно. Более того, нельзя даже гарантировать непрерывность функции в точке, в которой она имеет производные по всем направлениям.

Пример 8. Пусть

$$I(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

$$(x,y)\in R^2$$



Покажем, что эта функция дифференцируема вдоль любого направления $e\in R^2, \|e\|=1$ в точке 0.

Представим произвольное направление в виде

$$e=(\cos\alpha,\sin\alpha),\alpha\in[0,2\pi],(\|e\|=1).$$

и установим существование предела $\lim\limits_{t\to+0}\left(\dfrac{I(0+te)-I(0)}{t}\right)$ для любого направления

$e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. В силу $I(0)=0$ имеем

$$\frac{I\left(0+t\overbrace{e}^{(\cos\alpha,\sin\alpha)}\right)-\overbrace{I(0)}^{=0}}{t}=\frac{1}{t}I\left(\overbrace{t\cos\alpha}^{x},\overbrace{t\sin\alpha}^{y}\right)\overset{I(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}}{=}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{(t\cos\alpha)^2\,t\sin\alpha}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^2}, & \sin\alpha\neq 0,\\ 0, & \sin\alpha=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}, & \sin\alpha\neq 0,\\ 0, & \sin\alpha=0.\end{cases}$$

Отсюда выводим

$$\frac{dI}{de}(0)=\lim_{t\to+0}\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}, & \sin\alpha\neq 0,\\ 0, & \sin\alpha=0,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, & \sin\alpha\neq 0,\\ 0, & \sin\alpha=0.\end{cases}$$

Таким образом, указанный предел существует. Однако, функция I разрывная в точке $(0,0)$. В самом деле, устремим точку (x,y) к нулю по параболе $y=x^2$.

Тогда

$$I(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

$$I\left(x, x^2\right) = \frac{x^2x^2}{x^4+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\neq 0 = I(0,0).$$

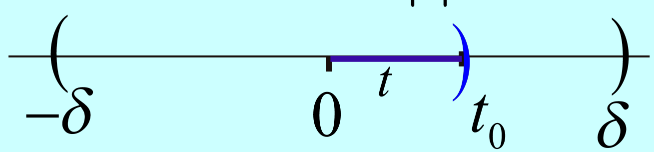
Теорема 7. ***Пусть функция*** $I: U\to R^1$, ***где*** $U\subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла. Тогда в любой точке*** $u\in \operatorname{int} U$ ***функция*** I ***имеет производные по всем направлениям*** $e\in R^n$.

Доказательство. Требуется доказать существование конечного предела

$$\frac{dI}{de}(u)=\lim_{t\to+0}h(t),\quad h(t)=\frac{I(u+te)-I(u)}{t}.$$

Из включения $u\in\operatorname{int}U$ следует существование числа $\delta>0$ такого, что

$$u+te\in U,\quad |t|<\delta.$$

Пусть $t_0\in(0,\delta)$.  Для $t\in(0,t_0]$ полагаем

$$\beta=\frac{t_0-t}{t_0}\in(0,1]\Rightarrow 1-\beta=1-\frac{t_0-t}{t_0}=\frac{t}{t_0}$$

Имеет место включение $\beta \underbrace{u}_{\in U}+(1-\beta)\underbrace{(u+t_0e)}_{\in U}\in U.$ С другой стороны

$$\overbrace{\beta}^{\frac{t_0-t}{t_0}} u+\overbrace{(1-\beta)}^{\frac{t}{t_0}}(u+t_0e)=\frac{t_0-t}{t_0}u+\frac{t}{t_0}(u+t_0e)=u-\frac{t}{t_0}u+\frac{t}{t_0}u+te=u+te\Rightarrow$$

Тогда

$$u+te\in U,\quad t\in(0,t_0].$$

$$I\Bigg(\overbrace{u+te}^{\beta u+(1-\beta)(u+t_0e)}\Bigg)=I\big(\beta u+(1-\beta)(u+t_0e)\big)\overset{\text{выпуклость } I}{\le}\beta I(u)+(1-\beta)I(u+t_0e)\Rightarrow$$

$$h(t)=\frac{\overbrace{I(u+te)}^{\le\beta I(u)+(1-\beta)I(u+t_0e)}-I(u)}{t}\le\frac{\beta I(u)+(1-\beta)I(u+t_0e)-I(u)}{t}=$$

$$=\frac{(\beta-1)I(u)+(1-\beta)I(u+t_0e)}{t}=\frac{\overbrace{(1-\beta)}^{=\frac{t}{t_0}}\big[I(u+t_0e)-I(u)\big]}{t}=$$

$$=\frac{t\cdot\big[I(u+t_0e)-I(u)\big]}{t_0\cdot t}=\overbrace{\frac{I(u+t_0e)-I(u)}{t_0}}^{h(t_0)}=h(t_0)\Rightarrow$$

$$t\le t_0\Rightarrow h(t)\le h(t_0).$$

Таким образом, функция $h(t)$ монотонно убывает при $t\to +0.$ Полагаем

$$\gamma=\frac{t_0}{t+t_0}\in(0,1]\Rightarrow 1-\gamma=\frac{t}{t+t_0}.$$

Имеет место равенство

$$\overset{\frac{t_0}{t+t_0}}{\gamma}\,(u+te)+\left(\overset{\frac{t}{t+t_0}}{1-\gamma}\right)(u-t_0e)=\frac{t_0}{t+t_0}(u+te)+\frac{t}{t+t_0}(u-t_0e)=$$

$$=\frac{t_0u+t_0\cdot te+tu-t\cdot t_0e}{t+t_0}=\frac{t_0u+tu}{t+t_0}=u.$$

Тогда

$$I\Big(\overset{\gamma(u+te)+(1-\gamma)(u-t_0e)}{u}\Big)=I\big(\gamma(u+te)+(1-\gamma)(u-t_0e)\big)\overset{\text{выпуклость } I}{\le}$$

$$\overset{\text{выпуклость } I}{\le}\gamma I(u+te)+(1-\gamma)I(u-t_0e)\Rightarrow$$

$$I(u)\le\gamma I(u+te)+(1-\gamma)I(u-t_0e)\Rightarrow\gamma\cdot I(u+te)\ge I(u)-(1-\gamma)I(u-t_0e)\Rightarrow$$

$$I(u+te)\ge\frac{I(u)-(1-\gamma)I(u-t_0e)}{\gamma}\Rightarrow$$

$$I(u+te) \ge \frac{I(u) - \overbrace{(1-\gamma)}^{\frac{t}{t+t_0}} I(u-t_0e)}{\underbrace{\gamma}_{\frac{t_0}{t+t_0}}} = \frac{(t+t_0)I(u) - tI(u-t_0e)}{t_0} =$$

$$= \frac{tI(u) + t_0I(u) - tI(u-t_0e)}{t_0} = I(u) + \frac{t}{t_0}\left[I(u) - I(u-t_0e)\right] \Rightarrow$$

$$I(u+te) \ge I(u) + \frac{t}{t_0}\left[I(u) - I(u-t_0e)\right] \Rightarrow$$

$$\overbrace{\frac{I(u+te) - I(u)}{t}}^{h(t)} \ge \frac{I(u) - I(u-t_0e)}{t_0} \Rightarrow h(t) \ge \overbrace{\frac{I(u) - I(u-t_0e)}{t_0}}^{\text{не зависит от } t}, \quad t \in (0, t_0],$$

т.е. функция $h(t)$ ограничена снизу при $t \to +0.$ Существование конечного предела следует теперь из монотонного убывания функции $h(t)$. Теорема доказана.

Упражнение 1. Найти производную по направлению от функции $I(u)=\|u\|$.

Решение.

Функция нормы выпукла и конечна. Следовательно, ее производная по любому направлению существует. Для всех точек кроме $u=0$ эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{dI}{de}(u)=\left\langle \frac{\partial \|u\|}{\partial u},\ e\right\rangle=\left\langle \frac{\partial \sqrt{\langle u,u\rangle}}{\partial u},\ e\right\rangle=\left\langle \frac{u}{\sqrt{\langle u,u\rangle}},\ e\right\rangle=\frac{\langle u,\ e\rangle}{\|u\|}.$$

В точке $u=0$ имеем

$$\frac{dI}{de}(u)=\lim_{t\to+0}\frac{I(u+te)-I(u)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{\|te\|}{t}=\|e\|=1.$$