«ПРОМЕЖУТКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА»

СОДЕРЖАНИЕ

- Возрастающая , убывающая функции
- Монотонная функция
- Точки экстремума
- Исследование функции на монотонность и экстремум
- Задача 1
- Задача 2
- Задания для самостоятельной работы

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

Функция *y* = *f(x)* называется возрастающей на некотором интервале,

если для любых $\boxed{x_1 \quad и \quad x_2}$

таких, что $\boxed{x_1 > x_2,}$

- **выполняется неравенство**

$$\boxed{f(x_1) > f(x_2).}$$

УБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

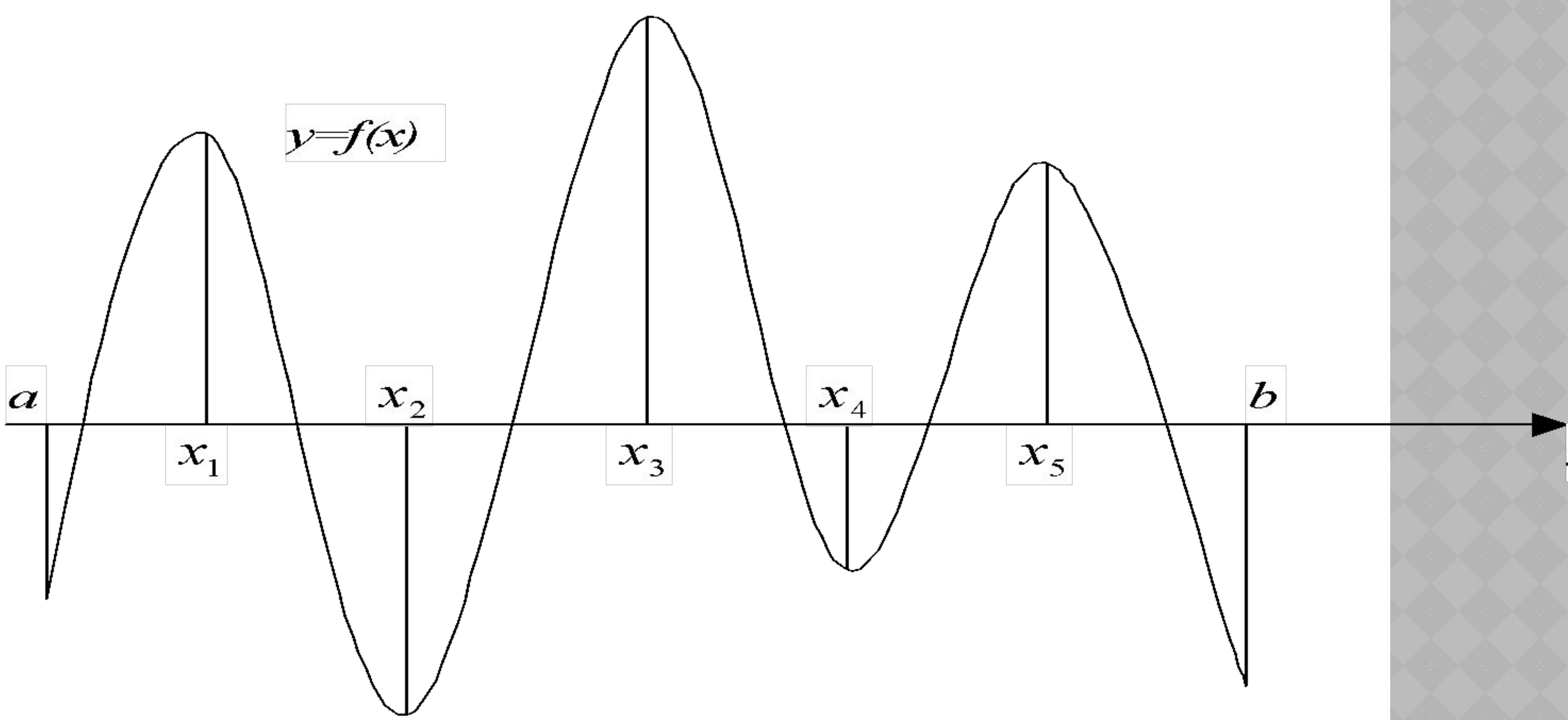
- Функция *y = f(x)* называется убывающей на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала и таких, что $x_1 > x_2$
- выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$

МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Функции, возрастающие или убывающие на некотором интервале, называются *монотонными*.

НА КАЖДОМ ИНТЕРВАЛЕ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ МОНОТОННОЙ



- Например, функция *y* = *f* *(x)* изображенная на рисунке, возрастает на интервалах

$$(a; x_1), \quad (x_2; x_3), \quad (x_4; x_5)$$

- и убывает на интервалах

$$(x_1; x_2), \quad (x_3; x_4), \quad (x_5; b).$$

МАКСИМУМЫ, МИНИМУМЫ ФУНКЦИИ

Точки $\boxed{x_1, \quad x_3, \quad x_5}$ являются точками максимума,

- а точки $\boxed{x_2, \quad x_4 \; -}$ точками минимума.

Точка x_0

называется точкой максимума для функции *y=f(x)*,

если для любого х из окрестности этой точки выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точка $\boxed{x_0}$

называется **точкой минимума** для функции *y=f(x)*,

если для любого х из окрестности этой точки выполняется неравенство

$$\boxed{f(x) > f(x_0).}$$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Точки максимума и минимума называются

точками экстремума

ДАНА ФУНКЦИЯ У = F(X).

Чтобы исследовать функцию на монотонность и экстремумы, нужно:

1. Найти область определения функции.

2. Найти производную данной функции.

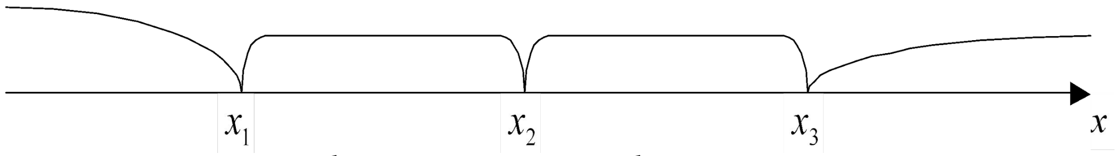
3. Найти критические точки.

Критические точки - это точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Т.е. чтобы найти критические точки, нужно приравнять к нулю производную функции и решить полученное уравнение.

$$f'(x) = 0.$$

4. Отметить критические точки на числовой прямой.



5. Эти точки разбивают область определения функции на некоторые интервалы.

ЗНАК ПРОИЗВОДНОЙ

- Определить знак производной функции на каждом интервале.
- Для этого нужно вычислить значение производной в одной точке каждого интервала
- Определить его знак

УСЛОВИЕ:

6. Если производная функции на данном интервале положительная,

то функция на этом интервале возрастает,

Если производная функции на данном интервале отрицательная,

то убывает.

МАКСИМУМ ФУНКЦИИ

- Если производная функции при переходе через точку x_0
- меняет знак с "+" на "-",

то - x_0 точка максимума

МИНИМУМ ФУНКЦИИ

- Если производная функции при переходе через точку $\boxed{x_0}$

меняет знак с "- " на "+";

то $\boxed{x_0}$ точка минимума

Если знак производной в точке x_0 не меняется,

то в данной критической точке экстремума нет

7. Найти значение функции в точках экстремума, подставив их абсциссы в данную функцию.

8. Написать результат исследования функции.

ЗАДАЧА 1.

Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$$

РЕШЕНИЕ:

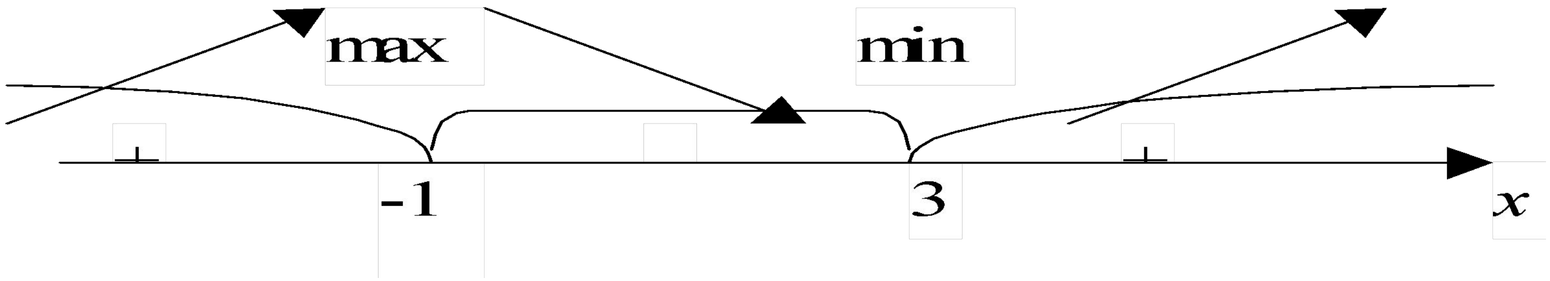
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$$

1. $D(f(x))=(-\infty;+\infty);$

2. $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4\right)'=x^2-2x-3;$

3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$$x_1=-1; \quad x_2=3;$$



6. Функция возрастает при

$$x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$$

т.к. на этих интервалах, $f'(x) > 0$

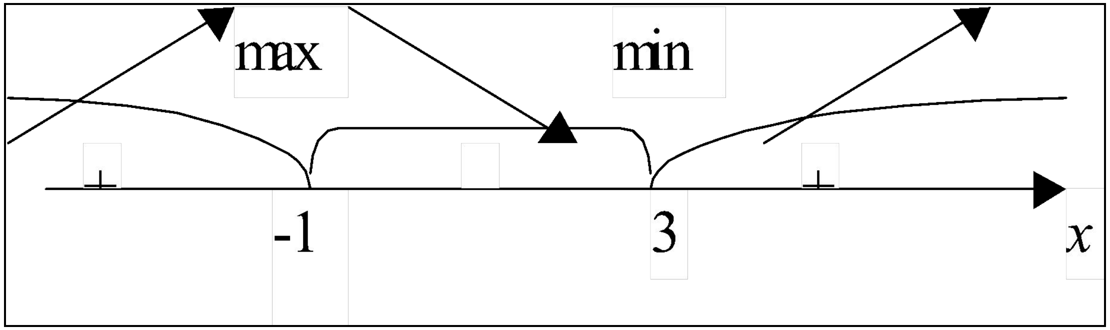
и убывает при

$$x \in (-1;3),$$

т.к. на этом интервале $\boxed{f'(x) < 0.}$

Т.к. при переходе через точку *x=-1* производная функции имеет знак с " + " на "-" то

x=-1 -точка максимума.



При переходе через точку *x=3* знак производной функции меняется с "-" на " +", следовательно,

x=3 - точка минимума.

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМА

$$7.\ f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+4=-\frac{1}{3}-1+3+4=5\frac{2}{3},$$

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+4=9-9-9+4=-5;$$

ОТВЕТ:

- **функция возрастает при** $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ **и убывает при** $x \in (-1;3)$.

$$\left(-1;\quad 5\frac{2}{3}\right) - \textit{точка} \quad \textit{максимума},$$

$$(3;-5) - \textit{точка} \quad \textit{минимума}.$$

ЗАДАЧА 2.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$$

- Исследовать функцию

на монотонность и экстремум.

РЕШЕНИЕ:

$$1.\ D(f(x)) = (-\infty;+\infty);$$

$$2.\ f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)' = x^2 - x^3;$$

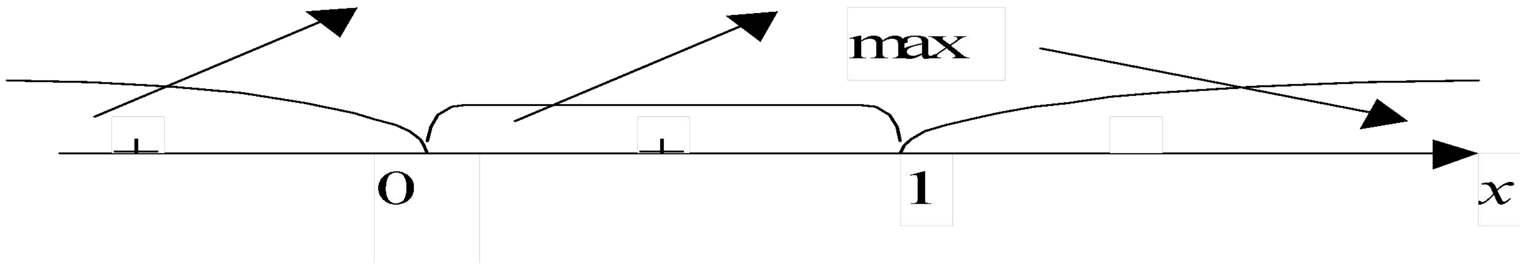
$$3.\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0$$

$$x_{1,2} = 0; \quad x_3 = 1;$$

$$4.\ f'(-1) = 1 - (-1) = 2 > 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > 0$$

$$f'(2) = 2^2 - 2^3 = -4 < 0;$$



6. Функция возрастает при

$$x \in (-\infty;1)$$

т.к. на этих интервалах $f'(x) > 0$

и убывает при

$$x \in (1;+\infty),$$

т.к. на этом интервале $f'(x) < 0.$

- *Т.к.* при переходе через точку *x=0* производная функции не меняет знак, то в точке *x=0* функция экстремума не имеет.
- При переходе через точку *x=1* знак производной функции меняется с "+" на "-", следовательно, *x=1* - точка максимума.

$$7.\ f(1)=\frac{1}{3}(1)^3-\frac{1}{4}(1)^4=\frac{1}{12}, \qquad \left(1;\frac{1}{12}\right)-\textit{точка} \quad \max.$$

ОТВЕТ: ФУНКЦИЯ ВОЗРАСТАЕТ ПРИ

$$x\in(-\infty;1)$$

И УБЫВАЕТ ПРИ

$$x\in(1;+\infty).$$

$$\left(1;\frac{1}{12}\right)-\textit{точка} \quad \textit{максимума}.$$

Задания для самостоятельной работы: исследовать функцию на монотонность и экстремум

$$\boxed{y = 4x^3 + 12}$$

$$\boxed{y = x^3 - 3x}$$