

Кафедра «Экономики и менеджмента»

# Лекция 4

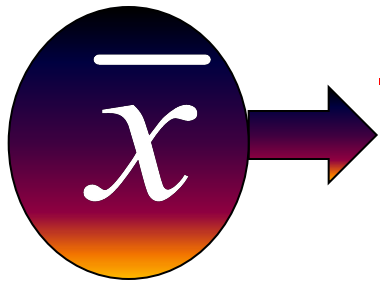
## Средние величины в статистике

Астафурова И.С.



# § 1. ПОНЯТИЕ СРЕДНЕЙ ВЕЛИЧИНЫ

СРЕДНЯЯ ВЕЛИЧИНА В  
СТАТИСТИКЕ- ОБОБЩАЮЩИЙ  
ПОКАЗАТЕЛЬ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЙ  
ТИПИЧНЫЙ УРОВЕНЬ ЯВЛЕНИЯ,  
СВОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА  
ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ТОГО  
ПРОЦЕССА, В КОТОРЫХ ОН  
ПРОТЕКАЕТ.



- Величины, в которых находят выражение общие условия, закономерность изучаемого явления;
- Величины, отражающие то общее, что складывается в каждом единичном объекте;
- Обобщённая количественная характеристика признака в статистической совокупности в конкретных условиях места и времени;
- Является обобщением какого-то одного свойства изучаемого явления или процесса.

# Определяющее свойство средней

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

## Исходное соотношение средней (ИСС)

Суммарное значение осредняемого

показателя

---

ИСС=

Количество единиц совокупности

(объём)

# ИСС для некоторых экономических показателей

Средняя цена  
реализованного=  
товара

Стоимость реализованного товара  

---

Количество реализованного товара

Средняя  
себестоимость=  
продукции

Затраты на производство продукции  

---

Количество произведённой продукции

Средняя  
Заработная =  
плата

Фонд заработной платы  

---

Количество работающих

Средний  
процент =  
выполнения плана

Фактически достигнутый показатель  

---

Запланированный показатель

Астафурова И.С.

# ВИДЫ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН В СТАТИСТИКЕ

- ❖ Средняя арифметическая (простая, взвешенная, средняя из групповых средних);
- ❖ Средняя гармоническая;
- ❖ Средняя геометрическая;
- ❖ Средняя степенная (квадратическая, кубическая и т.д.);
- ❖ Структурные средние.

Астафурова И.С.

**§ 2 СРЕДНЯЯ**  
**АРИФМЕТИЧЕСКАЯ**  
**ВЕЛИЧИНА**

Используется для  
расчёта среднего  
значения признака  
при ИЗВЕСТНОМ  
объёме совокупности

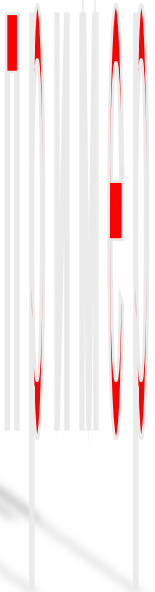


# Средняя арифметическая простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

вычисляется, как сумма отдельных значений признака ( $x_i$ ) делённая на их число ( $n$ )

Используется для расчёта среднего значения признака при известных индивидуальных значениях признака (для несгруппированных данных)



№ квартиры	Задолженность по оплате за электроэнергию, руб.
А	1
1	250
2	258
3	1234
4	180
5	194
6	706
Итого	2824

Найти задолженность по оплате за  
электроэнергию в среднем на 1 квартиру

Астафурова И.С.

№ квартиры	Задолженность по оплате за электроэнергию, руб.
А	1
1	250
2	258
3	1234
4	180
5	194
6	706
Итого	2824

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 470,67 \text{ руб.}$$

Астафурова И.С.

# Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Вычисляется, если имеются многократные повторения значения признака и совокупность разбита на группы, используется для расчёта среднего значения группировочного признака (при сгруппированных данных)

# РЯДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**ДИСКРЕТНЫЙ  
РЯД**

$x_i$  - конкретное  
значение

признака в  $i$ - й  
группе

**ИНТЕРВАЛЬНЫЙ  
РЯД**

  $x_i$  - середина  
 $i$ - го интервала

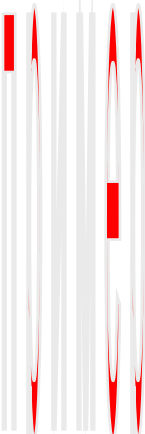
$f_i$  - численность  $i$ -ой группы (частота,  
частость)

Если  $f_i$  - численность группы

$$\Sigma f_i = \begin{cases} n \\ 1 (100\%) \end{cases}$$

Если  $f_i$  - доля (удельный) вес

Группы



№ пр-ия	Численность промышленно-производственного персонала, чел.	Средняя заработная плата на предприятии, руб.
1	540	28583
2	275	30343
3	458	28357
4	312	28127
5	204	28179

**Найти среднюю заработную плату на предприятиях отрасли**

№ пр-ия	Численность промышленно- производственного персонала, чел., $f_i$	Средняя заработная плата на предприятии, руб., $x_i$	$x_i \cdot f_i$
1	540	28583	15434820
2	275	30343	8344325
3	458	28357	12987506
4	312	28127	8775624
5	204	28179	5748516

Итого:

1789

51290791

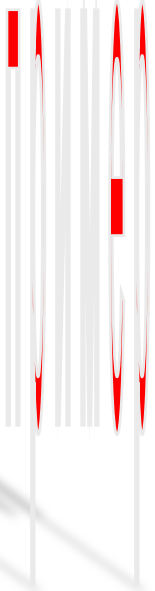
$$\bar{x} = \frac{51290971}{1789} = 28670,09 \text{ руб.}$$



# Средняя из групповых средних

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k}$$

Используется для расчёта среднего значения  
результативного признака  
( при сгруппированных данных )



Группы заводов по стоимости ОПФ		Число заводов	Средняя стоимость продукции в группе
180,0	260,0	3	583,3
260,0	340,0	6	1135,0
340,0	420,0	4	1532,5
420,0	500,0	2	2300,0

**Найти среднюю стоимость продукции на 1 предприятии**

Группы заводов по стоимости ОПФ		Число заводов	Средняя стоимость продукции в группе
180,0	260,0	3	583,3
260,0	340,0	6	1135,0
340,0	420,0	4	1532,5
420,0	500,0	2	2300,0

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{5550,8}{4} = 1387,7$$

**§3. СРЕДНЯЯ**  
**ГАРМОНИЧЕСКАЯ**  
**и другие виды**  
**средних величин**

# Средняя гармоническая

Используется

при неизвестном объёме

совокупности или

необходимости обобщения

величины, обратной

изучаемому признаку.

# Средняя гармоническая

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

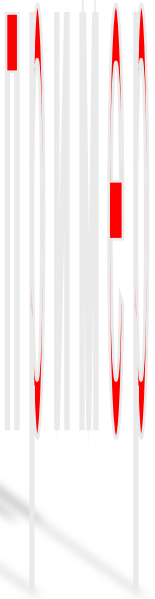
**несгруппированные  
е  
данные**

# Средняя гармоническая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot M_i}$$

**сгруппирован  
ные  
данные**

$M_i \Rightarrow x_i \cdot f_i$



<b>Магазин</b>	<b>Выручка от реализации сахара, тыс.руб.</b>	<b>Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб.</b>
<b>A</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>9,936</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>6,279</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>8,93</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>6,612</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>4,788</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>14,4942</b>	<b>17,4</b>

Найти среднюю цену реализованного сахара в коммерческой фирме и выручку в среднем на 1 магазин



Магазин	Выручка от реализации сахара, тыс.руб.	Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб.	$M_i \cdot \frac{1}{x_i}$
А	1	2	3
1	9,936	18	0,552
2	6,279	21	0,299
3	8,93	19	0,470
4	6,612	19	0,348
5	4,788	21	0,228
6	14,4942	17,4	0,833
Итого	53,0392		2,734

$$\bar{x}_{\text{цена}} = \frac{\sum M_i}{\sum \frac{1}{x_i} \cdot M_i} = 19,40 \text{ руб.}$$

Астафурова И.С.

Магазин	Выручка от реализации сахара, тыс.руб.	Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб.	$M_i \cdot \frac{1}{x_i}$
А	1	2	3
1	9,936	18	0,552
2	6,279	21	0,299
3	8,93	19	0,470
4	6,612	19	0,348
5	4,788	21	0,228
6	14,4942	17,4	0,833
<b>Итого</b>	<b>53,0392</b>		<b>2,734</b>

$$\bar{x}_{\text{выручка}} = \frac{\sum M_i}{n} = \frac{53,0392}{6} = 8,839 \text{ тыс.руб.}$$

Астафурова И.С.

# Средняя геометрическая

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

**Используется для расчёта средних  
темпов и коэффициентов роста  
в рядах динамики**

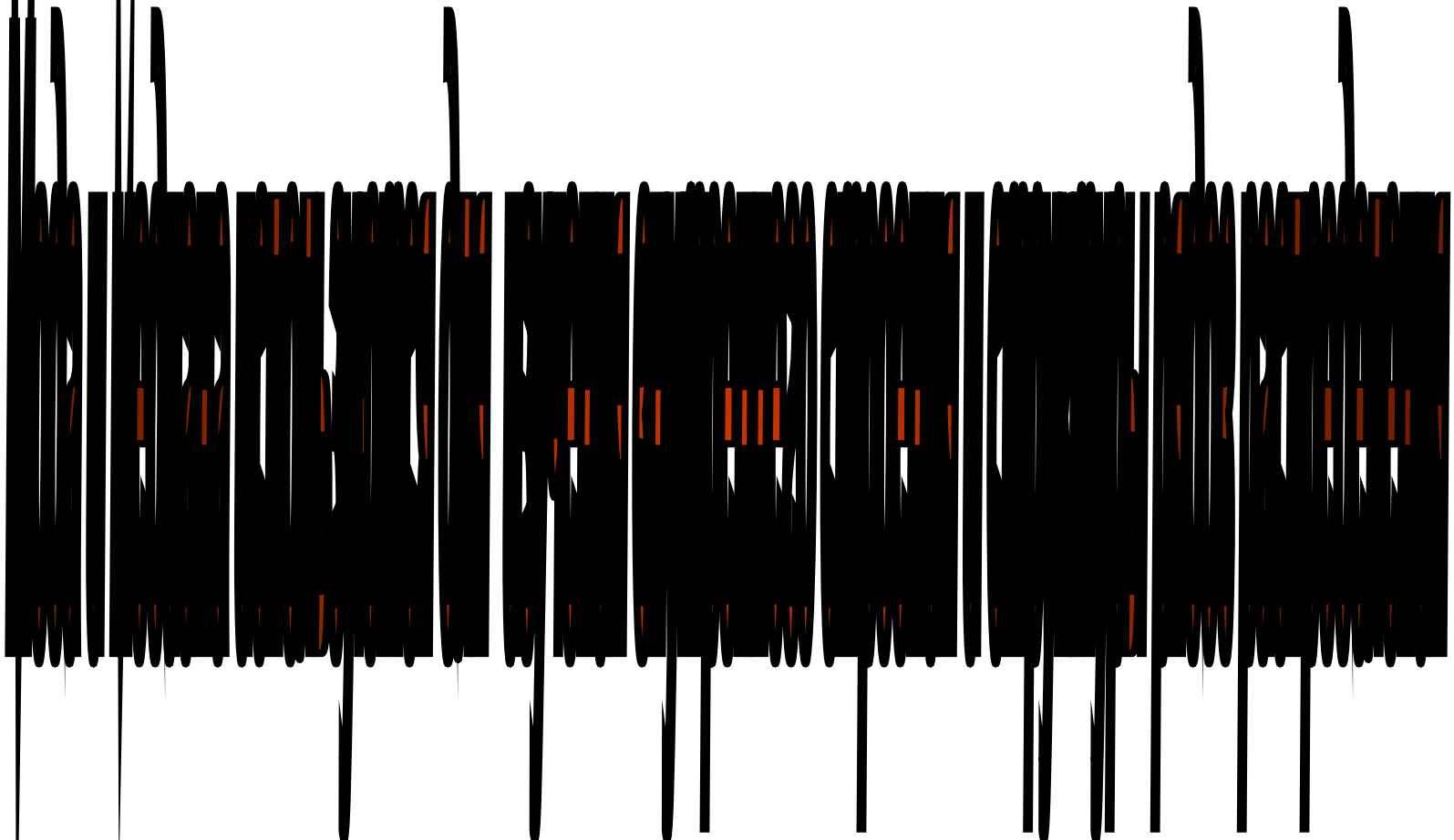
# САМОСТОЯТЕЛЬНО:

- Построить последовательность действий по выбору формулы для расчёта среднего значения признака;
- Подготовить распечатку презентаций по теме «Мода и медиана»

# § 4. СТРУКТУРНЫЕ СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Астафурова И.С.





Астафурова И.С.

# Mo

- Мода (Mo) –  
значение признака  
наиболее часто  
встречающееся в  
вариационном ряду.

# Me

- Медиана (Me) -  
значение варьирующего признака, приходящееся на середину ряда, варианта, делящая ряд на две равные части



# СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Вариационные  
ряды

Атрибутивные  
ряды

несгруппированные  
данные

Ряды  
распределения

первичные

ранжированные

дискретные

интервальные

# ПЕРВИЧНЫЙ РЯД

Моды и медианы  
первичного ряда  
не существует!

# ПЕРВИЧНЫЙ

№ предприятия	Расходы производства, тыс. руб.
1	1147,7
2	1150,8
3	1215,2
4	1219,7
5	1191
6	1205,2
7	1192,8
8	1180
9	1184,4
10	1151,7
11	1187,7
12	1166
13	1168,2
14	1168,9
15	1186,6

Астафурова И.С.

# РАНЖИРОВАННЫЙ РЯД

**Моды не  
существует!**

# **РАНЖИРОВАННЫЙ РЯД**

**Медиана - центральная  
варианта при нечетном  
числе единиц  
совокупности, при  
четном числе она равна  
полусумме срединных  
вариант**

РАНЖИРОВАННЫЙ

№ предприятия	Расходы производства, тыс. руб.
1	1147,7
2	1150,8
3	1151,7
4	1166
5	1167,8
6	1168,2
7	1168,9
8	1180
9	1184,4
10	1186,6
11	1187,7
12	1191
13	1192,8
14	1205,2
15	1215,2

$$Me = 1180$$

Астафурова И.С.

# СТРУКТУРНЫЕ СРЕДНИЕ ДЛЯ СГРУППИРОВАННЫХ ДАнных

Определение:

Кумулятивная частота ( $S_i$ ) результат суммирования предшествующей кумулятивной частоты с частотой текущей группы. Для первой группы кумулятивная частота равна частоте в группе.

$$S_i = S_{i-1} + f_i,$$

где  $i$  изменяется от 1

# ДИСКРЕТНЫЙ ряда распределения

МОДА  
дискретного  
ряда

определяется  
по наибольшей  
частоте  
признака

МЕДИАНА  
дискретного  
ряда

определяется  
по кумулятивной  
частоте  
признака



# ДИСКРЕТНЫЙ РЯД

## Мода и медиана - конкретные варианты

- Мода - варианта с максимальной частотой,
- Медиана - варианта с с кумулятивной частотой, превышающей полусумму частот

$$S_{Me} \geq \frac{\sum f_i}{2}$$

Астафурова И.С.

ДИСКРЕТНЫЙ

<b>Разряд</b>	<b>Число рабочих, чел.</b>
<b>1</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>2</b>

*Найти моду и медиану  
дискретного ряда, сделать  
выводы.*

Астафурова И.С.

Разряд	Число рабочих, чел.	Кумулятивная частота, $S_i$
1	15	15
2	27	42
3	32	74
4	40	114
5	14	128
6	2	130
	130	

$$M_o = 4$$

$$M_e = 3$$

*Это означает, что большая часть рабочих имеет 4 разряд.*

*Половина рабочих имеет разряд ниже 3, а половина - выше.*

# ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ряд распределения

**МОДА и МЕДИАНА  
определяются по специальной  
методике**

# ИНТЕРВАЛЬНЫЙ РЯД

## • Определение 1

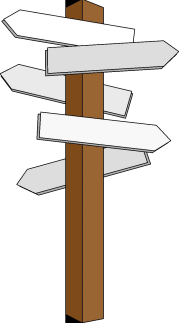
- Модальный интервал - интервал с максимальной частотой

## • Определение 2

- Медианный интервал - интервал, у которого кумулятивная частота не менее полусуммы частот

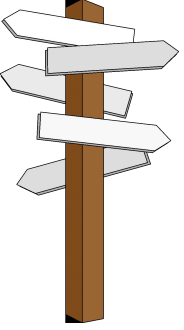
$$S_{Me} \geq \frac{\sum f_i}{2}$$

Астафурова И.С.



МОДА

$$M_o = x_{M_o} + \frac{f_{M_o} - f_{M_{o-1}}}{(f_{M_o} - f_{M_{o-1}}) + (f_{M_o} - f_{M_{o+1}})} \cdot h_{M_o}$$



# МЕДИАНА

$$M_e = x_{Me} + \frac{\frac{\Sigma f_i}{2} - S_{M_{e-1}}}{f_{M_e}} \cdot h_{Me}$$

Величина доходов, тыс.руб.		Число семей
10	20	152
20	30	211
30	40	304
40	50	207
50	60	36
60	70	11

Найти моду и медиану, сделать  
выводы по результатам расчетов



Величина доходов, тыс.руб.		Число семей	Кумулятивная частота, $S_i$
10	20	152	152
20	30	211	363
30	40	304	667
40	50	207	874
50	60	36	910
60	70	11	<b>921</b>

**921**

$$\frac{\sum f_i}{2} = \frac{921}{2} = 460,5$$

Величина доходов, тыс.руб.		Число семей	Кумулятивная частота, $S_i$
10	20	152	152
20	30	211	363
<b>30</b>	<b>40</b>	304	667
40	50	207	874
50	60	36	910
60	70	11	921



**МОДАЛЬНЫЙ И МЕДИАННЫЙ ИНТЕРВАЛЫ**

$$M_o = 30 + (40 - 30) \cdot \frac{304 - 211}{(304 - 211) + (304 - 207)} =$$

34,895 тыс.руб.

Большая часть семей имеет доход,  
близкий к 34895 руб.

$$M_e = 30 + (40 - 30) \cdot \frac{460,5 - 363}{304} =$$

40,321 тыс.руб.

Половина семей имеет величину доходов менее 40321 руб., а половина более 40321 руб.

- ❖ Выбор формулы для расчёта среднего значения признака начинается с построения ИСС;
- ❖ Основные виды средних величин в статистике - средняя арифметическая, средняя гармоническая и средняя геометрическая;
- ❖ Окончательный выбор формулы Астафурова И.С. зависит от вида исходных данных.

# ВЫВОДЫ:

- Мода и медиана описывают структуру совокупности по изучаемому признаку;
- Для первичного ряда моды и медианы не существует;
- Для ранжированного ряда существует только медиана;
- Для дискретного ряда мода и медиана - конкретные значения признака, для интервального мода и медиана рассчитываются по формулам.

# Лекция № 5

## РЯДЫ ДИНАМИКИ



# § 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ (ВРЕМЕННЫЕ) РЯДЫ, основные понятия и классификации

**РЯДЫ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ  
ЗНАЧЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО  
ПОКАЗАТЕЛЯ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В  
ХРОНОЛОГИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ  
ОПИСЫВАЮЩИХ РАЗВИТИЕ , ДВИЖЕНИЕ  
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ  
ПРОЦЕССОВ**

*$y_i$  – уровни в рядах динамики,*

*$t_i$  – показатели времени*



# Главное правило построения рядов динамики

## Сопоставимость рядов динамики:

- по территории;
- по кругу охватываемых объектов;
- по единицам измерения;
- по времени регистрации;
- по ценам;
- по методологии расчёта

# ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ДИНАМИКИ

- ❖ Расчёт характеристик интенсивности отдельных изменений в уровнях ряда от периода к периоду, от даты к дате;
- ❖ Определение общей закономерности на базе средних показателей динамического ряда;
- ❖ Выявление основных закономерностей динамики исследуемого явления и факторов, обуславливающих изменение изучаемого объекта во времени;
- ❖ Построение прогноза развития явления на будущее.

# Классификация рядов динамики

**1** Способ  
выражения  
уровней

**2** Способ  
выражения  
показателей  
времени

**3** Способ  
выражения  
временных  
промежутков

# Способ выражения уровней ряда динамики:

Составленный из абсолютных величин;

Составленный из относительных величин;

Составленный из средних величин.



# Способ выражения показателей времени ряда динамики:

Интервальный;

Моментный.

# Способ выражения временных промежутков ряда динамики:

- С равноотстоящими уровнями;
- С неравноотстоящими уровнями.

# Данные о студентах дневной формы обучения государственного университета экономики

Показатель	1995	1999	2001	2006	2014
Число студентов, чел.	12345	13012	15673	20902	20465
Средний возраст, лет	23,9	21,4	19,8	20,1	20,8
Удельный вес девушек, %	62,7	60,7	60,0	60,1	59,8

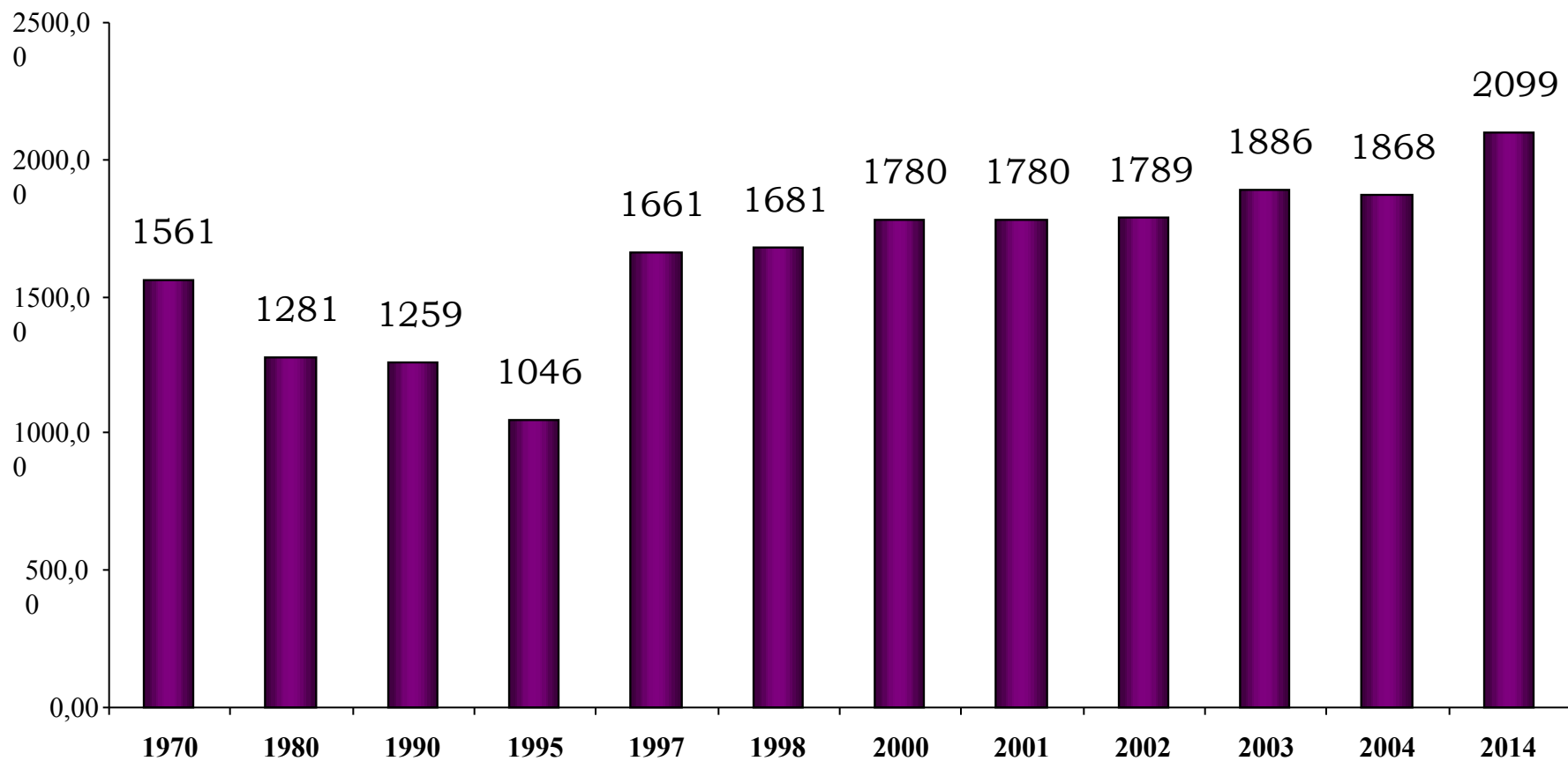
Укажите вид ряда динамики по способу выражения уровней ряда, показателей времени и временных промежутков

# **ПРИМЕРЫ ГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ**

Астафурова И.С.

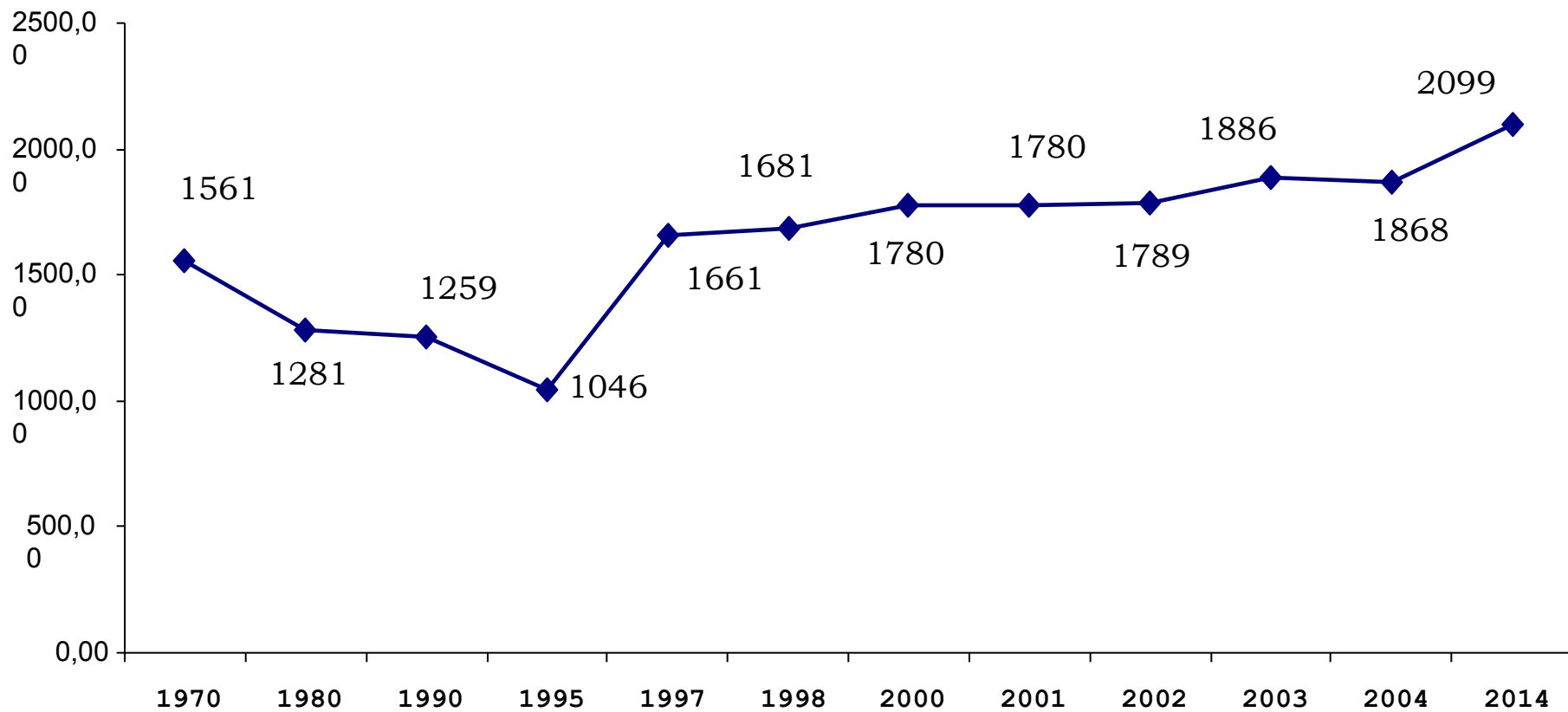


# Прибыль фирмы, тыс. у.е.



Астафурова И.С.

# Прибыль фирмы, тыс. у.е.

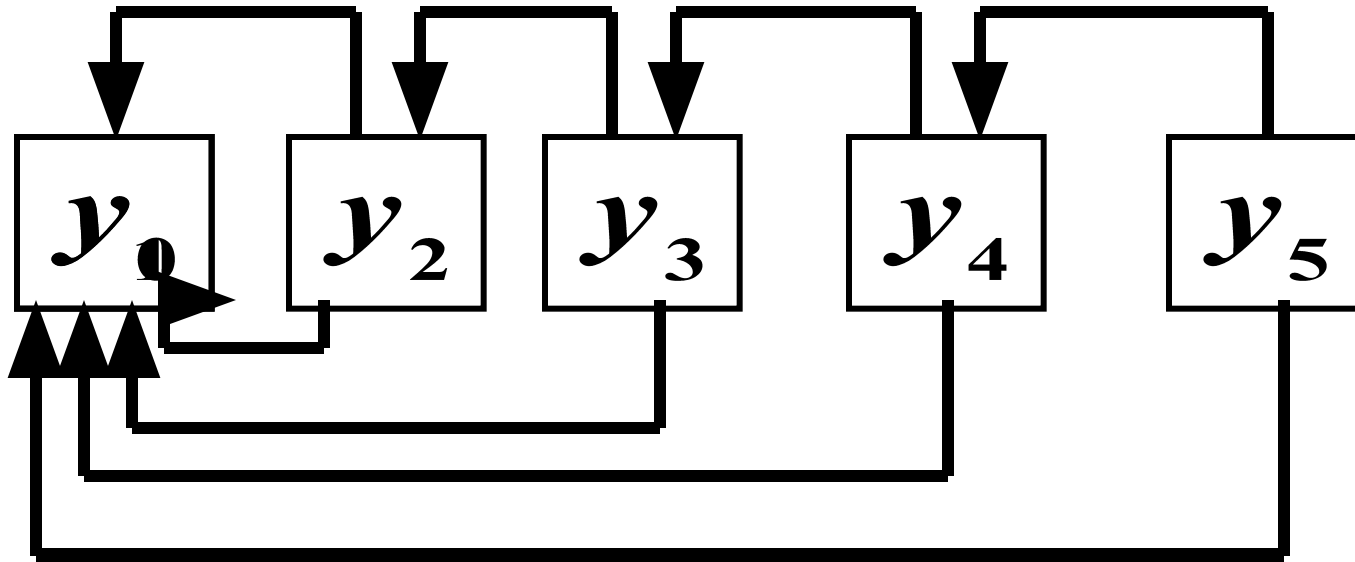


Астафурова И.С.

## § 2.

# Характеристики рядов динамики

# Цепные



# Базисные

# Абсолютный прирост

$$\Delta_i = \begin{cases} y_i - y_{i-1} & \text{цепной} \\ y_i - y_0 & \text{базисный} \end{cases}$$

# Коэффициент роста

$$K_i = \begin{cases} \frac{y_i}{y_{i-1}} & \text{цепной} \\ \frac{y_i}{y_0} & \text{базисный} \end{cases}$$

# Темп роста

$$T_i = K_i \cdot 100\%$$

# Темп прироста

$$\Delta T_i = T_i - 100\% = \begin{cases} \frac{\Delta_{i(\text{баз})}}{y_0} \cdot 100\% & \text{базисный} \\ \frac{\Delta_{i(\text{цеп})}}{y_{i-1}} \cdot 100\% & \text{цепной} \end{cases}$$



# Абсолютное значение 1 % прироста

$$A_i = \frac{\Delta_{i(\text{цен})}}{\Delta T_{i(\text{цен})}} = 0,01 \cdot y_{i-1}$$

## Цепные и базисные показатели рядов динамики

Название показателя	Расчетная формула	Содержание
Абсолютный прирост	$\Delta_i = \begin{cases} y_i - y_0 & \text{базисный} \\ y_i - y_{i-1} & \text{цепной} \end{cases}$	<p>В абсолютных величинах отличие текущего уровня от базисного или предыдущего (приращение уровня ряда). Если абсолютный прирост положителен, то показатель увеличился, а если отрицателен – уменьшился</p>
Темп и коэффициент роста	$k_i = \begin{cases} \frac{y_i}{y_0} & \text{базисный} \\ \frac{y_i}{y_{i-1}} & \text{цепной} \end{cases}$ $T_i = k_i \cdot 100\%$	<p>В относительных величинах сравнение текущего уровня с базисным или предыдущим. Если коэффициент превышает 1 (темп роста 100%), то уровень увеличился, а если менее 1 (темп роста менее 100%), то уменьшился.</p>
Темп прироста	$\Delta T_i = T_i - 100\% =$ $\begin{cases} \frac{\Delta_{i(\text{баз})}}{y_0} \cdot 100\% & \text{базисный} \\ \frac{\Delta_{i(\text{цеп})}}{y_{i-1}} \cdot 100\% & \text{цепной} \end{cases}$	<p>В относительных величинах отличие текущего уровня от базисного или предыдущего (на сколько процентов произошел рост или снижение уровня ряда).</p>
Абсолютное значение 1 % прироста	$A_i = \frac{\Delta_{i(\text{цеп})}}{\Delta T_{i(\text{цеп})}} = 0,01 \cdot y_{i-1}$	<p>Показывает размер уровня ряда, приходящегося на 1 % изменения (темпа прироста).</p>

# § 3. СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*1. средний абсолютный прирост*

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{i(\text{цепные})}}{n - 1}$$

# § 3. СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2. *средний коэффициент роста*

$$\bar{K} = \sqrt[n-1]{K_2 \cdot K_3 \cdot \dots \cdot K_n}$$

$$\bar{T} = \bar{K} \cdot 100\%$$

# § 3. СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*3. средний темп прироста*

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} - 100\%$$

# 4. средний уровень ряда интервальный

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

Равноотстоящие

уровни

# 4. средний уровень ряда интервальный

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot t_i}{\sum t_i}$$

Неравноотстоящие

**уровни**

Астафурова И.С.

# 4. средний уровень ряда моментный

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i}{n-1}$$

Равноотстоя  
щие

уровни  
Астафурова И.С.



# 4. средний уровень ряда моментный

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2) \cdot t_1 + \dots + (y_{n-1} + y_n) \cdot t_{n-1}}{2(t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1})}$$

Неравноотстоящие  
уровни

# 4. средний уровень ряда моментный

$$\bar{y} = \frac{\sum_1^n (y_{i-1} + y_i) \cdot t_{i-1}}{2 \sum_1^n t_{i-1}}$$

Неравноотстоящие  
уровни

Астафурова И.С.

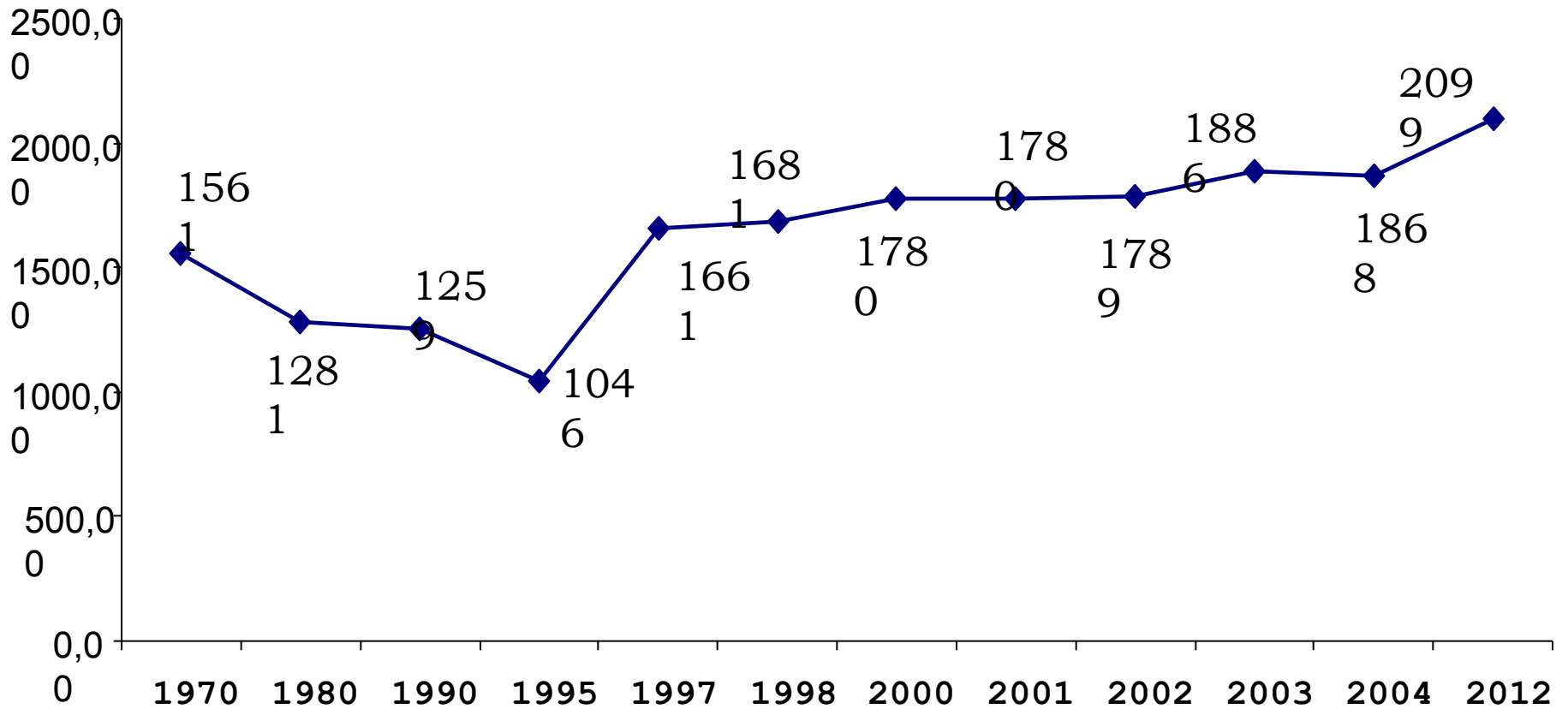
# § 4. МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ РЯДОВ ДИНАМИКИ



ГРАФИК

- УКРУПНЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ
- СКОЛЬЗЯЩЕЙ СРЕДНЕЙ
- АНАЛИТИЧЕСКОГО  
ВЫРАВНИВАНИЯ

# Прибыль фирмы, тыс. у.е.

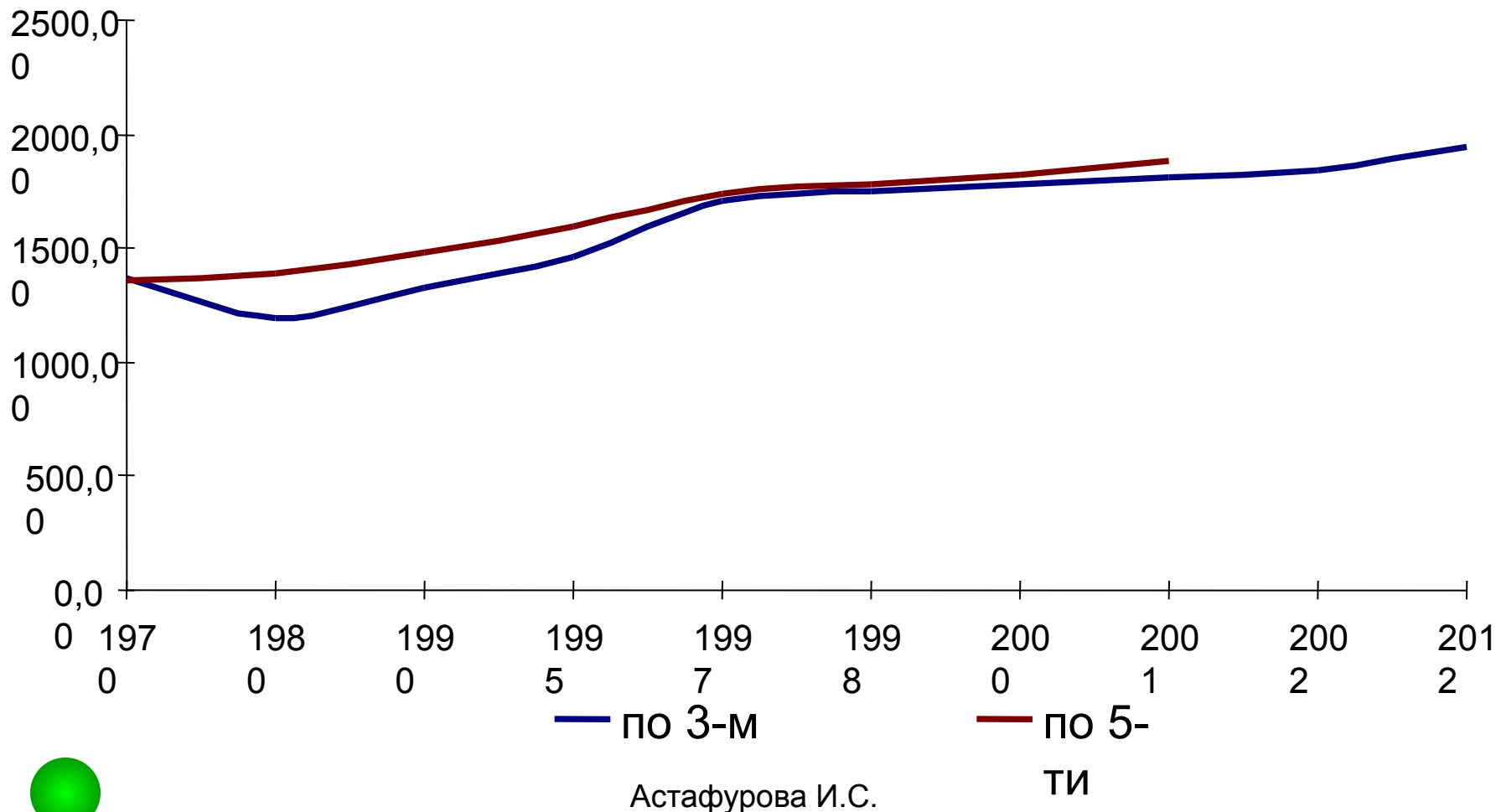


Астафурова И.С.

<b>Год</b>	<b>Прибыль, тыс.у.е.</b>	<b>Средние по 2-м уровням</b>	
<b>1970</b>	1561,31	1970-1980	1421,31
<b>1980</b>	1281,31		
<b>1990</b>	1258,69	1990-1995	1152,50
<b>1995</b>	1046,31		
<b>1997</b>	1661,39	1997-1998	1671,40
<b>1998</b>	1681,41		
<b>2000</b>	1780,08	2000-2001	1780,08
<b>2001</b>	1780,08		
<b>2002</b>	1789,08	2002-2003	1832,54
<b>2003</b>	1876,00		
<b>2004</b>	1868,20	2004-2009	1983,42
<b>2012</b>	2098,63		

Год	Прибыль, тыс.у.е.	<i>Скользящие средние</i>	
		по 3- уровням	по 5-ти уровням
<b>1970</b>	1561,31	-	-
<b>1980</b>	1281,31	1367,10	-
<b>1990</b>	1258,69	1195,44	1361,79
<b>1995</b>	1046,31	1322,12	1385,80
<b>1997</b>	1661,35	1463,01	1485,55
<b>1998</b>	1681,36	1707,58	1589,82
<b>2000</b>	1780,04	1747,15	1738,37
<b>2001</b>	1780,04	1783,04	1783,30
<b>2002</b>	1789,04	1818,36	1820,56
<b>2003</b>	1886,00	1847,58	1884,27
<b>2004</b>	1867,70	1950,76	-
<b>2012</b>	2098,59	-	-

# Скользящие средние прибыли



# Аналитическое выравнивание

способ выявления основной тенденции  
закономерности развития, представляет  
собой подбор функции времени

$$\hat{y}_t = f(t)$$

где  $\hat{y}_t$  теоретические уровни  
динамического ряда, рассчитанные на  
основе адекватной математической  
модели

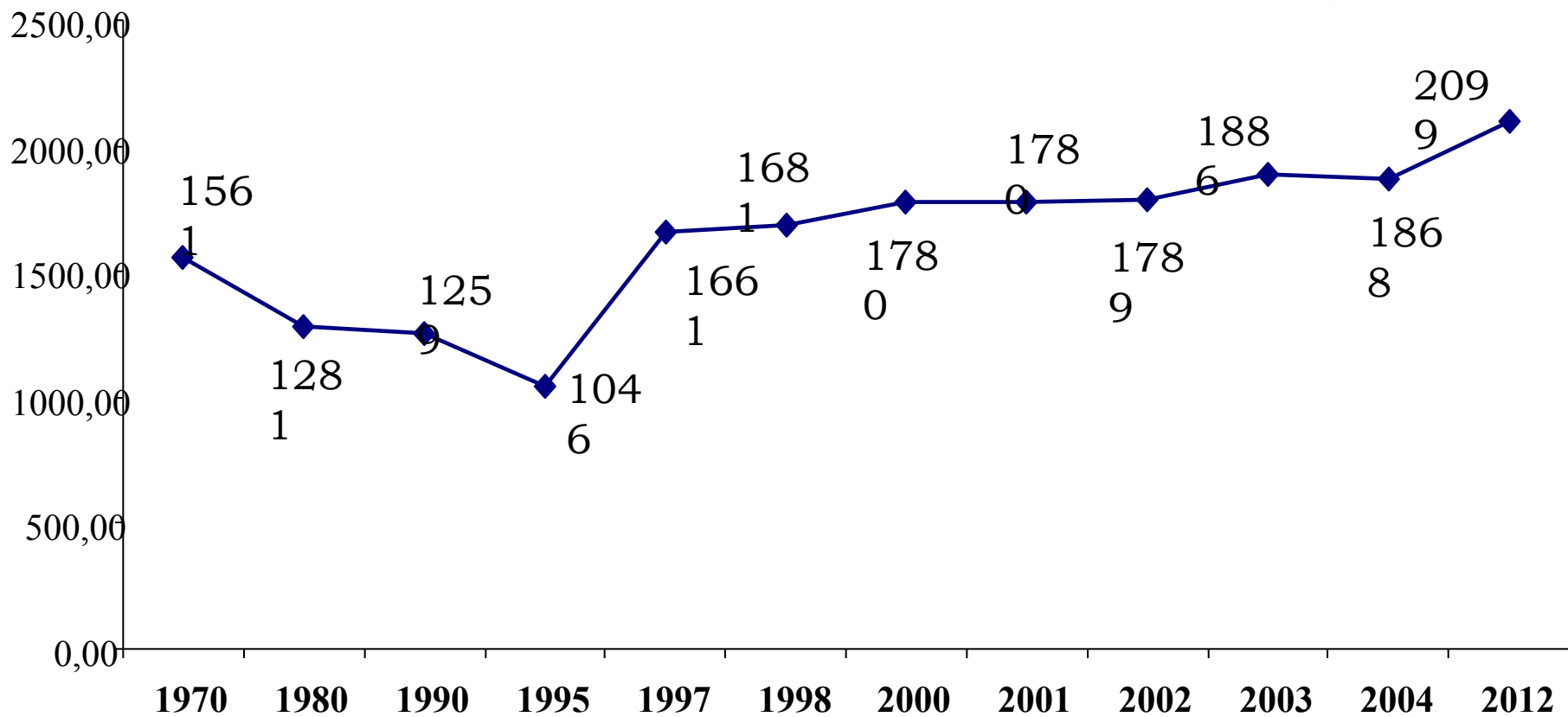


*Основная тенденция*  
*развития (тренд) –*  
плавное и устойчивое  
изменение уровня  
явления во времени,  
свободное от случайных  
колебаний

# Алгоритм построения прогноза на основе тренда

- ▶ Графическое изображение ряда в виде линейной диаграммы
- ▶ Выбор тренда (аналитического выражения зависимости от показателя времени)
- ▶ Расчёт параметров тренда, его оценка
- ▶ Экстраполяция уровней в прошлое (ретроспектива) и в будущее (перспектива) не более  $1/3$  изучаемого периода

# Прибыль фирмы, тыс. у.е.



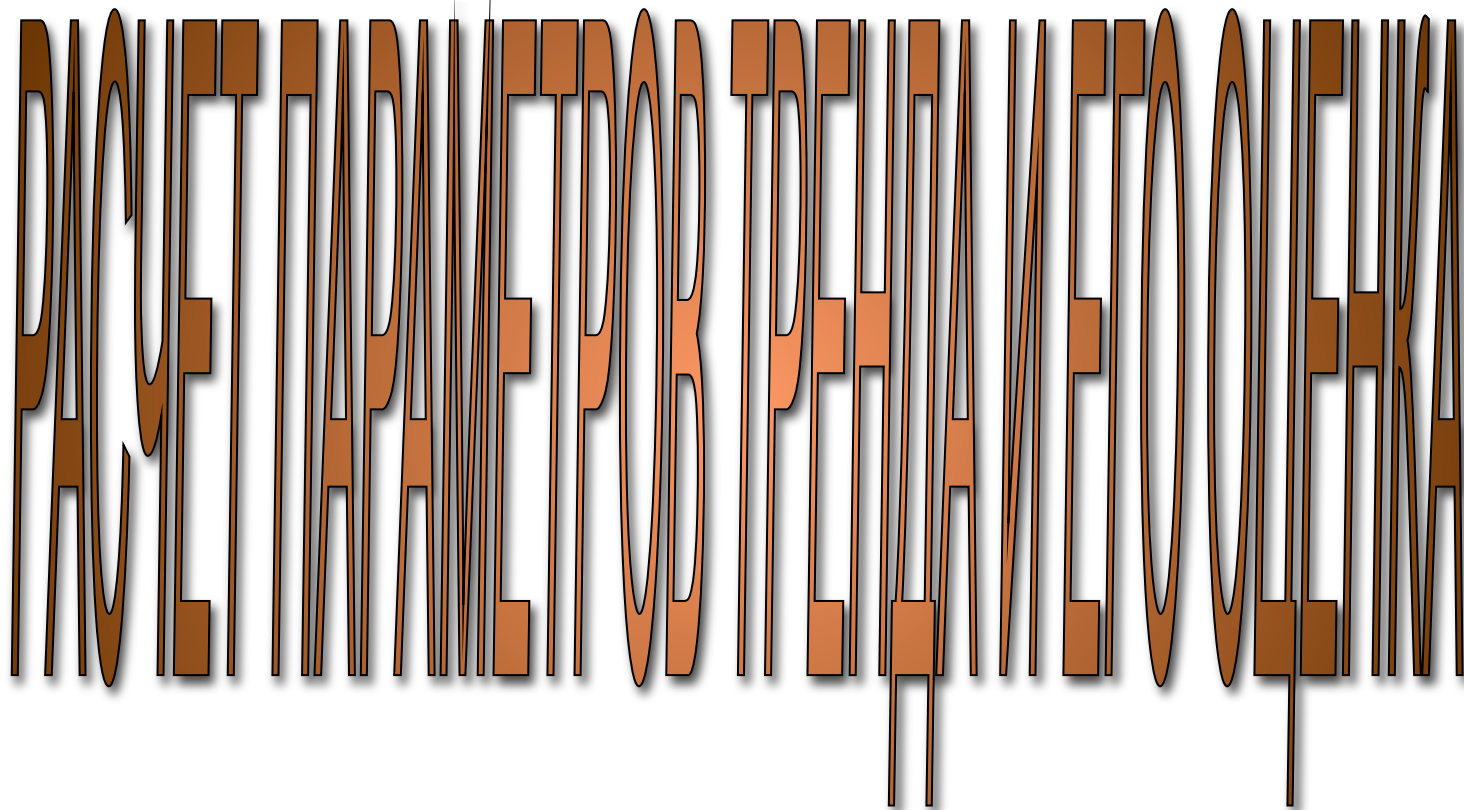
# Простейшие

## • ВИДЫ ТРЕНДОВ

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t$$

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

$$\hat{y}_t = a \cdot b^t \quad \text{И Т.Д.}$$



Астафурова И.С.

# Линейный тренд

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t$$

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum t_i = \sum y_i \\ a \cdot \sum t_i + b \cdot \sum t_i^2 = \sum y_i \cdot t_i \end{cases}$$

$$\sum t_i^{2k-1} = 0$$

Астафурова И.С.

$$\delta = \frac{S_{\hat{y}_t}}{\bar{y}} \cdot 100\%$$

$$S_{\hat{y}_t} = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - \hat{y}_t(\text{расч}))^2}{n - m}}$$

$$\delta \approx 6\%$$

# Параболический тренд

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum t_i + c \cdot \sum t_i^2 = \sum y_i \\ a \cdot \sum t_i + b \cdot \sum t_i^2 + c \cdot \sum t_i^3 = \sum y_i \cdot t_i \\ a \cdot \sum t_i^2 + b \cdot \sum t_i^3 + c \cdot \sum t_i^4 = \sum y_i \cdot t_i^2 \end{cases}$$

●  $\delta \approx 6\%$



# Построение расчёта

Экстраполяция - нахождение уровней за пределами изучаемого ряда;

Экстраполяция на период не превышающий  $1/3$  изучаемого.

# Построение расчёта

$\hat{y}_t = f(t_i)$  – в уравнение тренда

ставят значение  $t_i$ ,

соответствующее

расчётному периоду

# Задание значений условным $t_i$

$$n = 8 \Rightarrow t_i = (-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7)$$

$$n = 7 \Rightarrow t_i = (-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;)$$

$\hat{y}_t$  - при подстановке соответствующего значения  $t$   
получаем точечный прогноз

# Построение доверительного интервала прогноза на основе тренда

$$\hat{y}_t - t_\alpha \cdot S_{\hat{y}_t} \leq y_{\text{прогноз}} \leq \hat{y}_t + t_\alpha \cdot S_{\hat{y}_t}$$

$$S_{\hat{y}_t} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_{t(\text{расч})})^2}{n - m}}$$

# Построение доверительного интервала прогноза на основе тренда

Коэффициент доверия по таблице распределения Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы  $(n-m)$  и значения  $\alpha$  (вероятность наступления нежелательного события)



$$\alpha = 1 - p$$

# ПРИМЕР

Астафурова И.С.

<b>Год</b>	<b>Прибыль, тыс.руб.</b>
<b>2005</b>	2960,04
<b>2006</b>	2903,05
<b>2007</b>	2945,04
<b>2008</b>	2786,00
<b>2009</b>	2989,04
<b>2010</b>	2900,00
<b>2011</b>	2777,50
<b>2012</b>	2798,04

# ЗАДАНИЕ



1. Рассчитать:

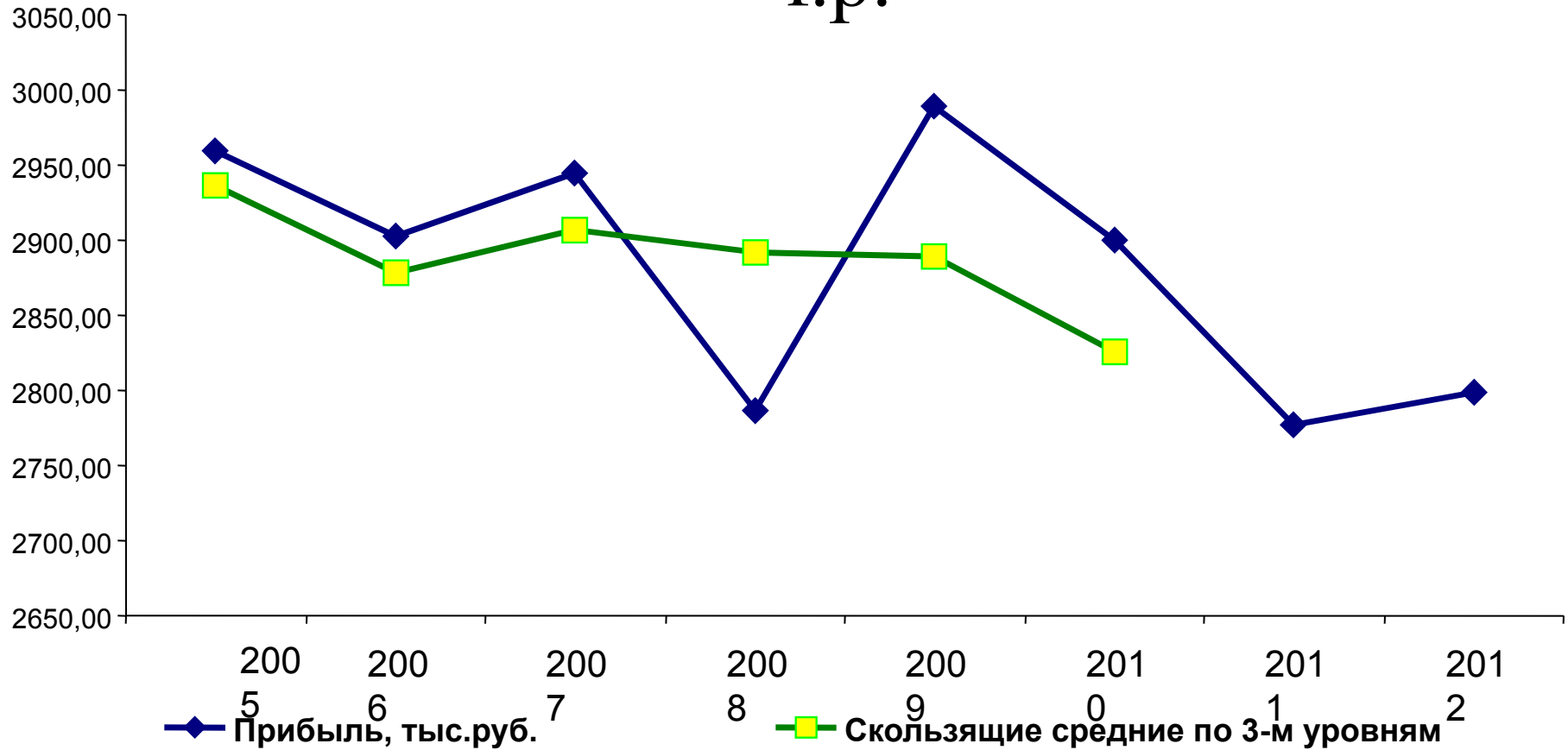
- характеристики ряда;
- средние характеристики ряда;

2. Построить тренд, спрогнозировать прибыль на 2014 г., построить доверительный интервал прогноза с вероятностью 0,99.

3. Сделать выводы.



# Прибыль фирмы за период 2005-2012 г.г., Т.р.



# 1

## Цепные и базисные характеристики ряда

Год	Прибыль, тыс. руб.	$\Delta_i$		$T_i$		$\Delta T_i$		$A_i,$ руб.
		цепно	базисны	цепно	базисны	цепно	базисны	
200	2960,04	й -	й -	й -	й -	й -	й -	-
200	2903,05	-56,99	1341,7	98,07%	185,94%	-1,93%	85,94%	29600,4
200	2945,04	41,9	4383,7	101,45%	188,63%	1,45%	88,63%	29030,5
200	2786,00	-159,04	3224,6	94,60%	178,44%	-5,40%	78,44%	29450,4
200	2989,04	203,04	9427,7	107,29%	191,44%	7,29%	91,44%	27860
201	2900,00	-89,04	3338,6	97,02%	185,74%	-2,98%	85,74%	29890,4
201	2777,50	-122,50	9216,1	95,78%	177,90%	-4,22%	77,90%	29000
201	2798,04	20,5	9236,7	100,74%	179,21%	0,74%	79,21%	27775

2

4

3

**1**

# Средние характеристики ряда

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{i(\text{ценные})}}{n-1} = \frac{-162}{7} = -23,143$$

$$\bar{T} = \sqrt[7]{98,07 \cdot 101,45 \cdot 94,60 \cdot 107,29 \cdot 97,02 \cdot 95,78 \cdot 100,74} = 99,2\%; \quad \Delta \bar{T} = -0,8\%$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 2882,34 \text{ тыс. руб.}$$

$$y_{2014} = 2798,04 + 2 \cdot (-23,143) = 2751,75 \text{ тыс. руб.}$$

**2**

Год	Прибыль, тыс.руб.	Условные $t_i$	$t_i * y_i$	$t_i^2$
<b>2005</b>	2960,04	-7	-20720,3	49
<b>2006</b>	2903,05	-5	-14515,3	25
<b>2007</b>	2945,04	-3	-8835,12	9
<b>2008</b>	2786,00	-1	-2786	1
<b>2009</b>	2989,04	1	2989,04	1
<b>2010</b>	2900,00	3	8700	9
<b>2011</b>	2777,50	5	13887,5	25
<b>2012</b>	2798,04	7	19586,3	49
	23058,71		-1693,83	168

$$\begin{cases} 8 \cdot a = 23058,71 \\ 168 \cdot b = -1693,83 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2882,34 \\ b = -10,08 \end{cases}$$

Астафурова И.С.

**2**

Год	Прибыль, тыс.руб.	Условные $t_i$	$t_i * y_i$	$t_i^2$
<b>2005</b>	2960,04	-7	-20720,3	49
<b>2006</b>	2903,05	-5	-14515,3	25
<b>2007</b>	2945,04	-3	-8835,12	9
<b>2008</b>	2786,00	-1	-2786	1
<b>2009</b>	2989,04	1	2989,04	1
<b>2010</b>	2900,00	3	8700	9
<b>2011</b>	2777,50	5	13887,5	25
<b>2012</b>	2798,04	7	19586,3	49
	23058,71		-1693,83	168

$$\hat{y}_t = 2882,34 - 10,08 \cdot t$$

Астафурова И.С.

2

Год	Прибыль, тыс.руб.	$\hat{y}_t$	$(\hat{y}_t - y_i)^2$
200	2960,04	2935,28	612,9957016
200	2903,05	2930,23	738,8203516
200	2945,04	2920,14	619,8588306
200	2786,00	2905,02	14164,95278
200	2989,04	2884,85	10855,14679
201	2900,00	2859,65	1628,194554
201	2777,50	2829,41	2694,444172
201	2798,04	2794,13	15,29787656
2	23058,71	23058,71	31329,71105

$$S_{\hat{y}_t} = \sqrt{\frac{\Sigma(\hat{y}_{t_i} - y_i)^2}{n - m}} = \sqrt{\frac{31329,71}{6}} = 72,26$$

$$\delta = \frac{S_{\hat{y}_t}}{\bar{y}} = \frac{72,26}{2882,34} \cdot 100\% = 2,5\%$$

Астафурова И.С.

# Прогноз прибыли на основе тренда на 2014 г.

**11**

$$\hat{y}_t = 2882,34 - 10,08 \cdot t$$

$$\hat{y}_{2014} = 2784,66 \text{ тыс. руб.}$$

Доверительный интервал  
прогноза прибыли с  
вероятностью 0,99  
 $\hat{y}_{2014} = 2784,66 \text{ тыс. руб.}$

$$t_{\alpha} = 3,71; S_{\hat{y}} = 72,26$$

$$2784,66 - 72,26 \cdot 3,71 \leq \hat{y}_t \leq 2784,66 + 72,26 \cdot 3,71$$

$$2516,58 \leq \hat{y}_t \leq 3052,75$$



# ВЫВОДЫ:

Астафурова И.С.

- Динамические ряды позволяют изучать развитие явления во времени с помощью абсолютных и относительных показателей;
- Абсолютные характеристики: абсолютное значение 1 % прироста, абсолютный прирост, средний абсолютный прирост, средний уровень ряда;
- Относительные характеристики: коэффициент, темп роста и прироста, средние коэффициент, темп роста и прироста;
- С помощью тренда осуществляется прогноз на будущее (перспективу) и расчёт уровня в прошлом (ретроспектива);
- Тренд отображает основную тенденцию развития явления во времени, если сумма расчётных уровней совпадает с суммой фактических уровней, а ошибка тренда  $\delta$  близка к 6 %.

# *ВОПРОСЫ*

Астафурова И.С.

1

Что описывает следующая величина

$$\Delta T_{\text{цепной}} = 9\%$$

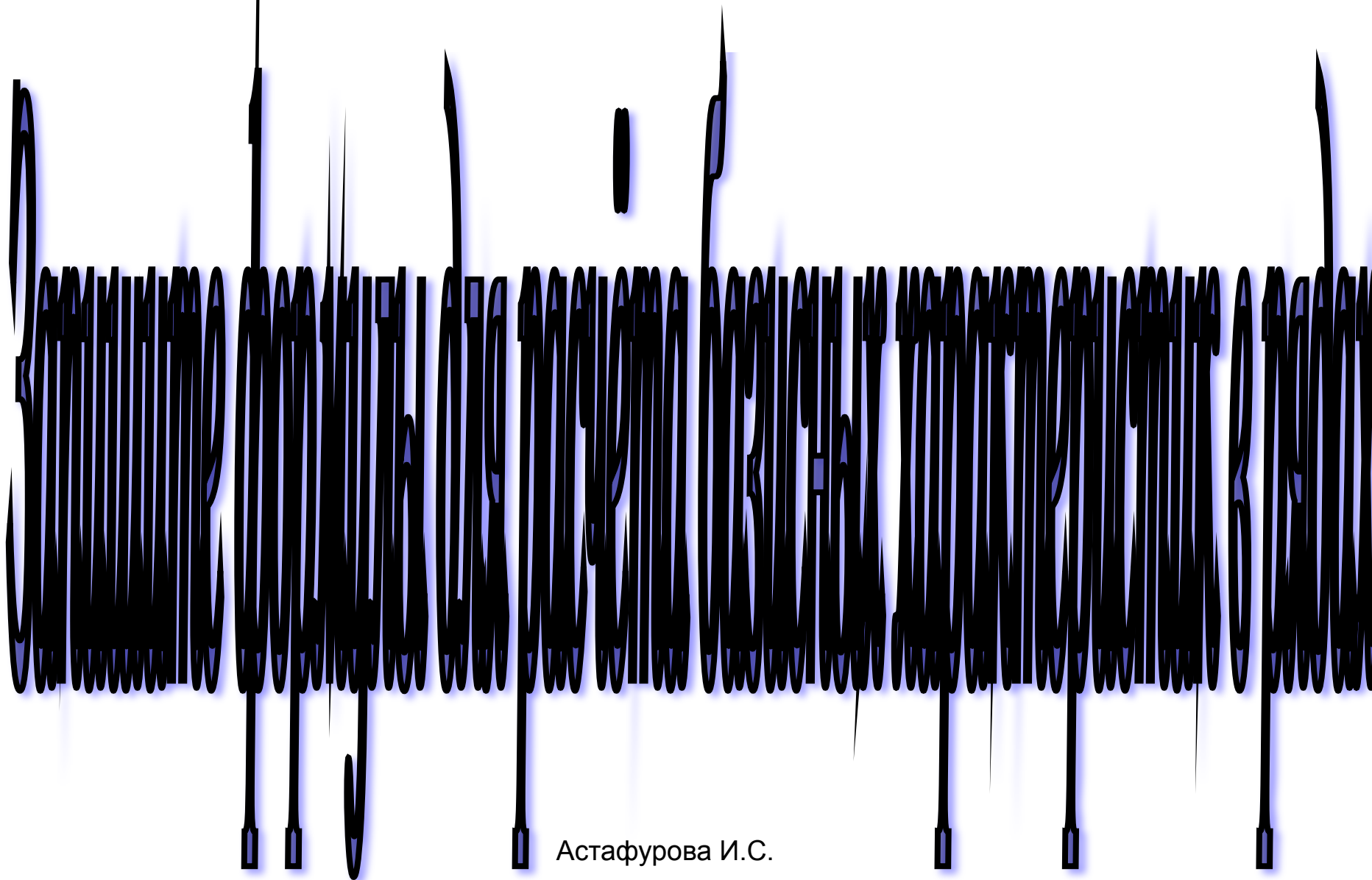
Назовите показатели, рассчитываемые по формуле

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

Что описывает следующая формула

$$A_i = \frac{\Delta i(\text{цепной})}{\Delta T i(\text{цепной})}$$





Астафурова И.С.



Какими бывают  
ряды динамики  
по способу  
выражения  
показателей  
времени?

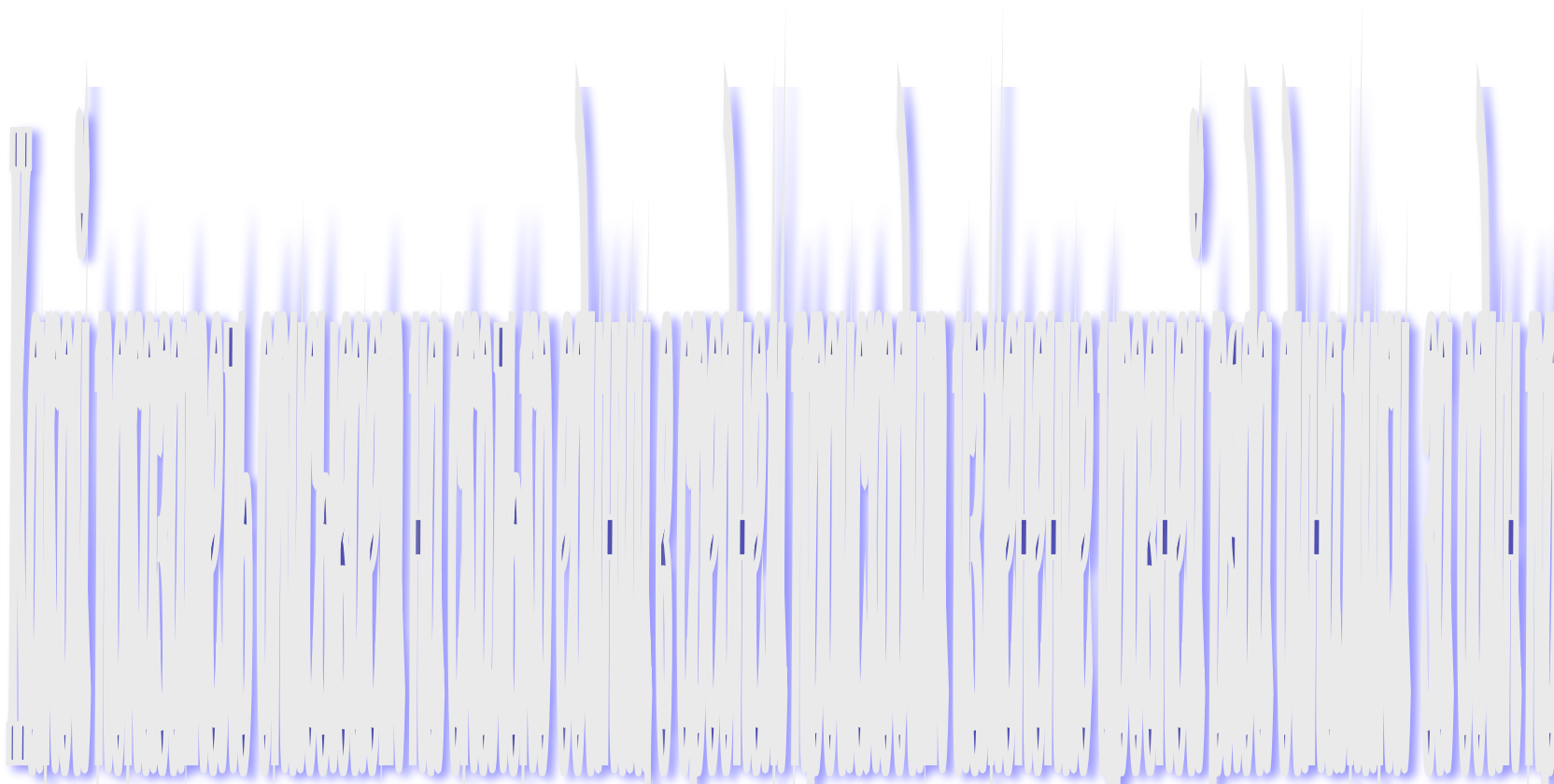


могла бы в центре  
когда же

**8**

**Какая формула для расчета  
среднего уровня ряда используется:**

<b>Дата</b>	<b>Численность работников, чел.</b>
<b>1.1.09</b>	<b>7</b>
<b>1.2.09</b>	<b>9</b>
<b>1.4.09</b>	<b>11</b>
<b>1.8.09</b>	<b>13</b>
<b>1.10.09</b>	<b>15</b>



Астафурова И.С.



**Какие характеристики  
в рядах динамики  
показывают общую  
тенденцию изменений  
в уровнях ряда?**



СПАСИБО  
ЗА  
ВНИМАНИЕ!

Астафурова И.С.