Лекция 7. **Постановка задачи нелинейного программирования. Теорема Куна-Таккера**

Содержание лекции:

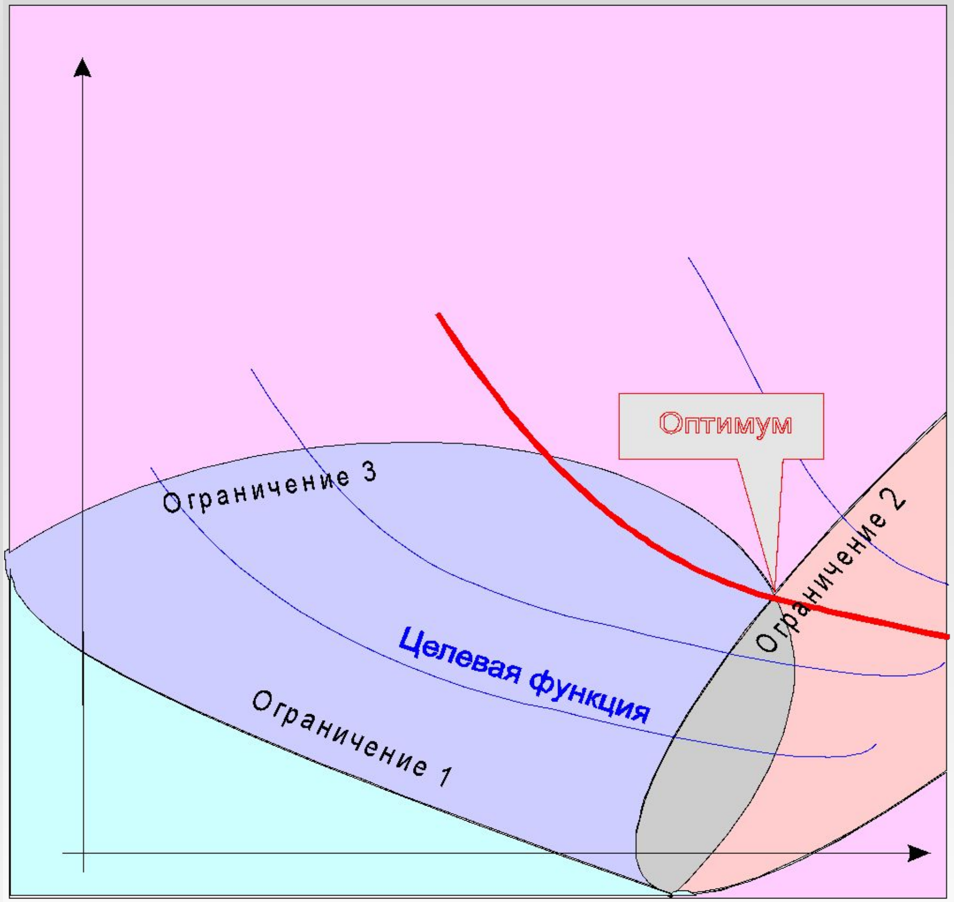
1. Формулировка общей задачи математического программирования
2. Классификация задач нелинейного программирования
3. Понятие о функции Лагранжа
4. Теорема Куна-Таккера. Интерпретация множителей Лагранжа

Литература

- *Шелобаев С.И.* Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — Разделы 4.1 (до начала подраздела «Аналитические методы решения задач условной оптимизации»), 4.2.
- Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Под ред. *Н.Ш. Кремера*. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. — Разделы 10.2, 11.2.

7.1

Формулировка общей задачи математического программирования



$$
\begin{cases}
\max z(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{''}{\underset{\dots}{=}} b_1 \\
q_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{''}{\underset{\dots}{=}} b_2 \\
\dots \\
q_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{''}{\underset{\dots}{=}} b_m \\
x_1 \dots 0; x_2 \dots 0; \dots ; x_n \dots 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\max z(\mathbf{x}) \\
\mathbf{q}(\mathbf{x}) \dagger \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \ddagger \mathbf{0}
\end{cases}
$$

(часто формулируют без условий неотрицательности).

7.1

Найти значения переменных

$$x_1, x_2, \ldots\ x_n,$$

доставляющие максимум (минимум) заданной целевой функции

$$z(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$$

при условиях:

$$q_1(x_1, x_2, \ldots\ , x_n) \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_1,$$

$$q_2(x_1, x_2, \ldots\ , x_n) \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_2,$$

$$\ldots\ ,$$

$$q_m(x_1, x_2, \ldots\ , x_n) \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b_m,$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \ldots\ ; x_n \ge 0$$

Вышеприведённым формулировкам отвечают:

задача линейного программиро-вания	задача нелинейного программиро-вания
$z(\mathbf{x})$ и все $q_i(\mathbf{x})$, $i = 1\ldots m$ – линейные функции	среди $z(\mathbf{x})$ и $q_i(\mathbf{x})$, $i = 1\ldots m$ есть *хотя бы одна* нелинейная функция

7.2

Повторение

ЗМП является *задачей выпуклого программирования*, если:

все её ограничения представлены выпукл ыми функциями;

её целевая функция представлена вогнут ой функцией.

%Функция $f(\mathbf{x})$ является *выпуклой*, если д ля любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и положительных α, β, в сумме равных 1, имеет место $f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) \ldots \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2)$.

%Функция $f(\mathbf{x})$ является *строго выпуклой*, если для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и положительных α, β, в сумме равных 1, при $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ имеет место $f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) > \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2)$.

%Функция $f(\mathbf{x})$ является *вогнутой*, если для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и положительных α, β, в сумме равных 1, имеет место $f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$„ $\alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2)$.

%Функция $f(\mathbf{x})$ является *строго вогнутой*, если для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и положительных α, β, в сумме равных 1, при $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ имеет место $f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) < \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2)$.

%%Линейные функции одновременно являются и выпуклыми, и вогнутыми, но не являются ни строго выпуклыми, ни строго вогнутыми.

7.2

Классификация задач нелинейного программирования

7.3 Понятие о функции Лагранжа

Решение любой задачи математического программирования (в том числе нелинейного) можно свести к решению задачи нелинейного программирования без ограничений.

Для этого необходимо на основе исходной ЗМП построить ***функцию Лагранжа***:

$$\begin{cases} \max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ \ldots \\ q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \ldots; x_n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_1 \leq 0 \\ q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_2 \leq 0 \\ \ldots \\ q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_m \leq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \ldots; x_n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & z(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ & -\lambda_1(q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_1) - \\ & -\lambda_2(q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_2) - \\ & -\ldots - \\ & -\lambda_m(q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_m) + \\ & +\lambda_{m+1}x_1 + \lambda_{m+2}x_2 + \ldots + \lambda_{m+n}x_n \end{aligned}}$$

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n}) = \boxed{z(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j} x_j}$$

В отсутствие условий неотрицательности: $\Lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boxed{z(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{q}(\mathbf{x})}$

7.4 Теорема Куна-Таккера

Если исходная задача строго выпукла и все ограничения – равенства

- её единственный оптимум $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ (если имеется) соответствует единственной *седловой точке* функции Лагранжа

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \; \min_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n}} \Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n})$$

Если исходная задача выпукла и все ограничения – равенства

- любой из существующих оптимумов соответствует *седловой точке* функции Лагранжа

см. следующий слайд

В остальных случаях

- любой из существующих оптимумов соответствует *точке Куна-Таккера* функции Лагранжа
  - любая седловая точка обязательно является точкой К.Т.; обратное не всегда верно
- точка К.Т. не обязательно соответствуют оптимумам исходной задачи

Это утверждение называется ***теоремой Куна-Таккера***

Если задача строго выпукла, точек Куна-Таккера не более одной.
Если т. К.-Т. имеется, то в ней находится оптимум.

7.4

Точка Куна-Таккера $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+n}^*)$ определяется следующими условиями

Условия первого порядка:

$$\mathrm{M}_j(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+n}^*) \text{„}\ 0,\ j = 1\ldots\ n;$$

$$\mathrm{N}_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+n}^*) \ldots\ 0,\ i = 1\ldots\ m+n,$$

условия дополняющей нежёсткости:

$$x_j^* \cdot \mathrm{M}_j(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+n}^*) = 0,\ j = 1\ldots\ n;$$

$$\lambda_i^* \cdot \mathrm{N}_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+n}^*) = 0,\ i = 1\ldots\ m+n,$$

где

$$\mathrm{M}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n}) = \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n})}{\partial x_j},\ j = 1\ldots\ n;$$

$$\mathrm{N}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n}) = \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+n})}{\partial \lambda_i},\ i = 1\ldots\ m+n$$

Переменные λ_i называются ***множителями Лагранжа***.

7.4

Экономическая интерпретация множителей Лагранжа, соответствующих оптимальному решению, аналогична интерпретации двойственных оценок ограничений ЗЛП

- Они показывают величину изменения целевой функции в расчёте на единицу изменения свободного члена ограничения, которому соответствует множитель Лагранжа, в очень малой окрестности оптимума
  - Если ограничение можно рассматривать в качестве баланса ресурса и максимизируется прибыль, то множитель Лагранжа в точке оптимума равен оптимальной цене
    - Если найдётся рынок, где ресурс дешевле, то его покупка увеличит прибыль
    - Если найдётся рынок, где ресурс дороже, то для увеличения прибыли его следует продать
- В отличие от случая ЗЛП, множители Лагранжа (кроме частных случаев) не обладают свойством устойчивости
  - Они меняют свои значения даже при сколь угодно малом изменении свободных членов ограничений

7.4

Теорема Куна-Таккера используется для аналитического отыскания оптимума задачи нелинейного программирования

Впрочем, этот приём приводит к успешным результатам отнюдь не для любой задачи

Главное, чем полезна теорема Куна-Таккера:

- выяснение роли множителей Лагранжа в формулировании условий оптимальности
- экономическая интерпретация множителей Лагранжа