

Системы линейных уравнений

Коэффициенты при неизвестных будем записывать в виде матрицы, которую назовём *матрицей системы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, стоящие в правых частях уравнений, b_1, \dots, b_m называются *свободными членами*.

- Решение системы — совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему обращает все ее уравнения в тождества.
- Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее нет ни одного решения.

Матрицы дают возможность кратко записать систему линейных уравнений.

Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

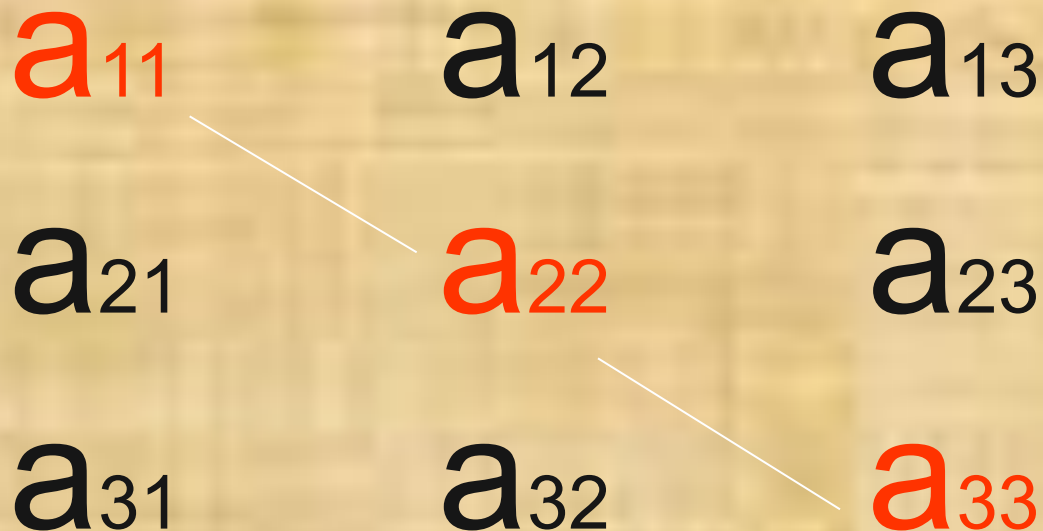
Рассмотрим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

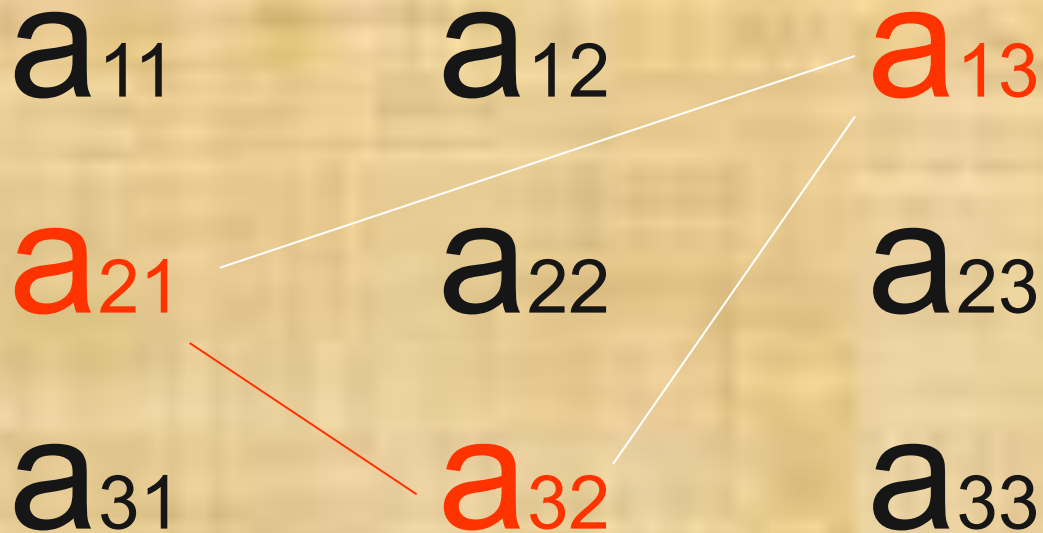
Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

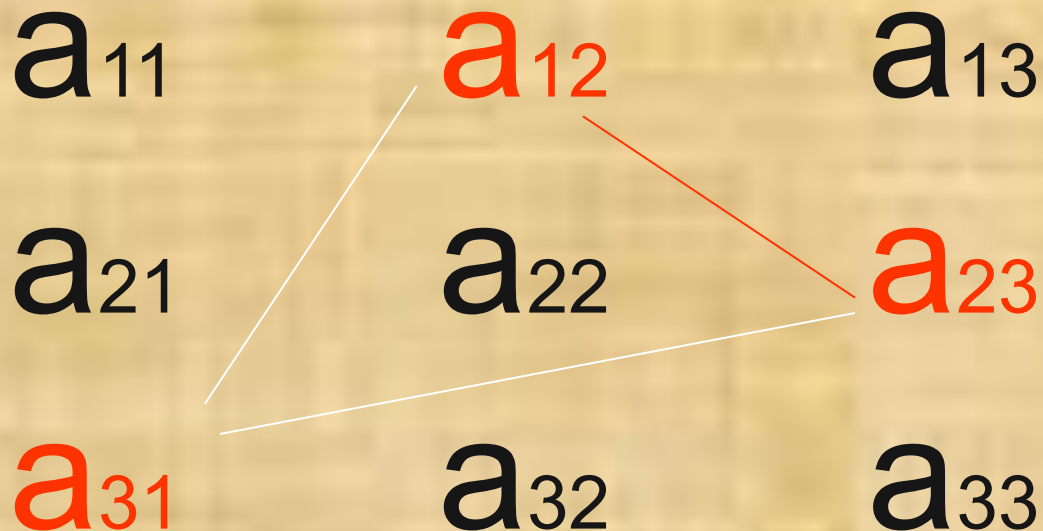
Определитель, действие 1



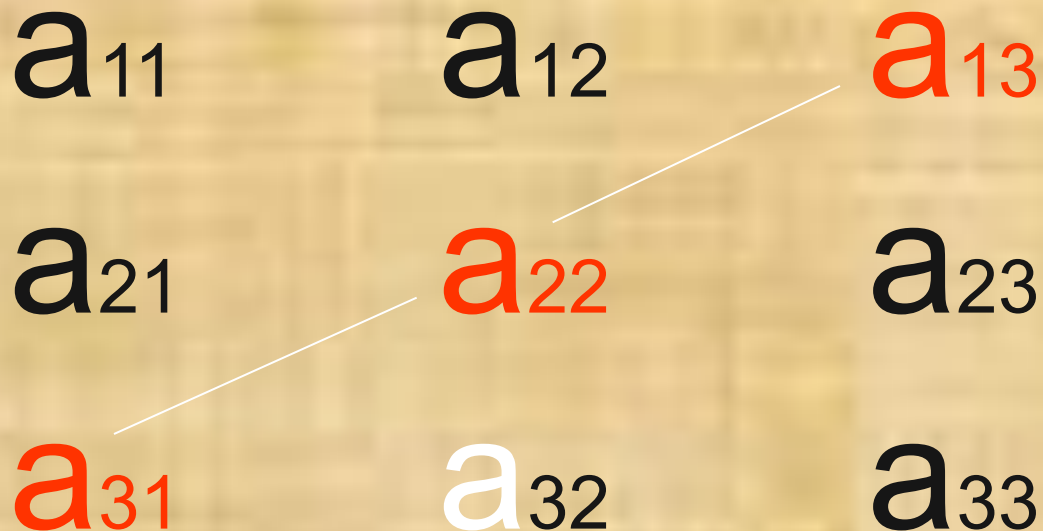
Определитель, действие 2



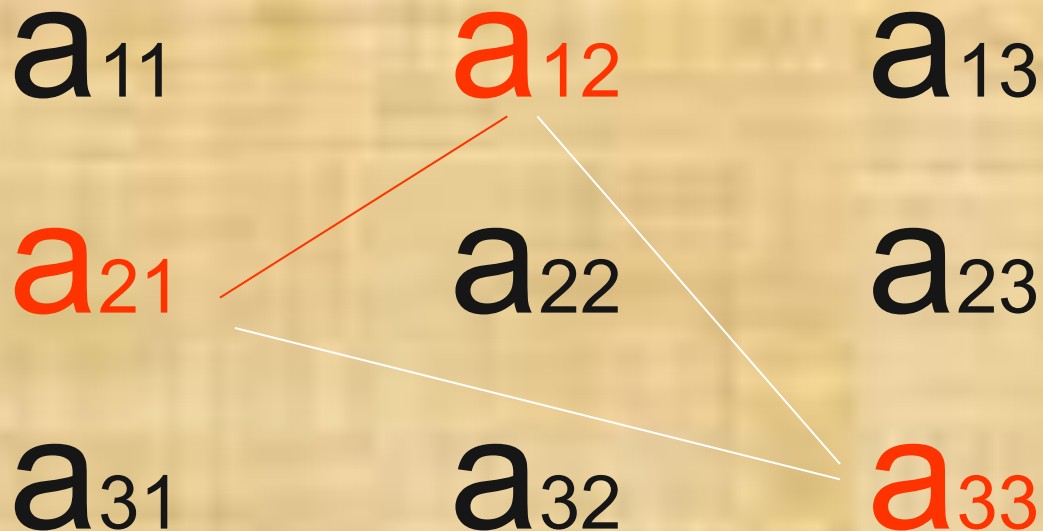
Определитель, действие 3



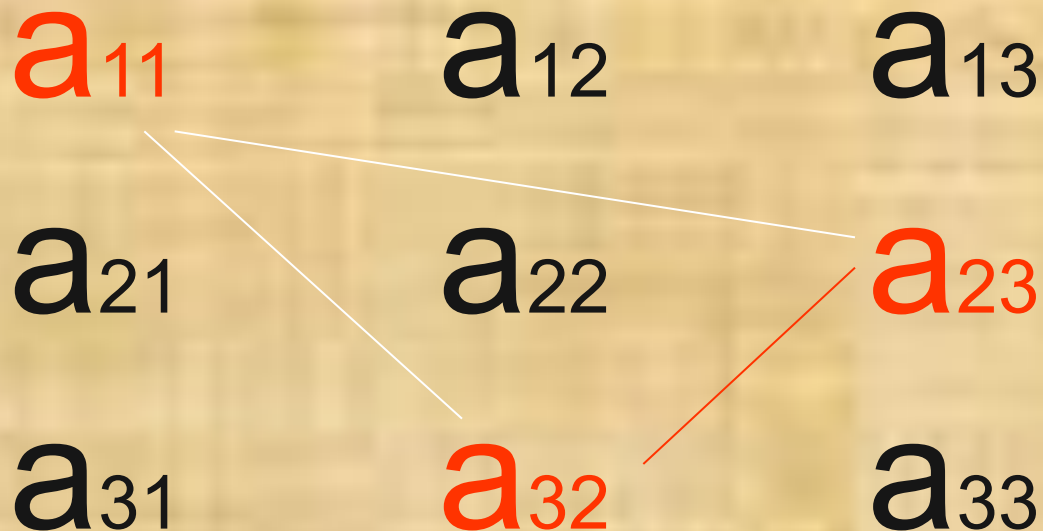
Определитель, действие 4



Определитель, действие 5



Определитель, действие 6



$$\begin{aligned}
&= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + \\
&a_{21} * a_{32} * a_{13} - \\
&- a_{31} * a_{22} * a_{13} - a_{12} * a_{21} * a_{33} - \\
&a_{23} * a_{32} * a_{11}
\end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Составим ещё три определителя следующим образом:
заменяем в определителе D последовательно 1, 2 и 3
столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

КРАМЕР Габриель

(Cramer Gabriel 1704-1752)

- Крамер - швейцарский математик. Родился в Женеве. Был учеником и другом Иоганна Бернулли. Учился и работал в Женеве.
- Основные труды по высшей алгебре и аналитической геометрии. Установил и опубликовал правила решения систем n линейных уравнений с n неизвестными с буквенными коэффициентами (правило Крамера), заложил основы теории определителей, но при этом еще не пользовался удобным обозначением определителей.
- Член Лондонского королевского общества (1749г.)



$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2 \cdot 4 - 11 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24.$$

Методы решения системы

- Прямые методы
 - Метод Гаусса
 - Метод Жордана-Гаусса
 - Метод Крамера
 - Матричный метод
 - Метод прогонки
- Приближенные методы
 - Метод Якоби Метод Якоби (метод простой итерации)
 - Метод Гаусса-Зейделя
 - Метод релаксации
 - Многосеточный метод