Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет - ИРНИТУ »

МАТЕМАТИКА

Электронное пособие для обучения бакалавров 1-ого курса технических специальностей

Составитель*: Сергиенко Людмила Семёновна - доктор технических наук, профессор по кафедре математики, заслуженный деятель науки и образования, член-корреспондент Российской Академии Естествознания*

2017 г

« Математику уже за то
любить надо, что она ум
в порядок приводит… «

Леонардо Да Винчи

Суть математики –

в познаньи мироздания.

Царица разума, наук кумир,

вооружая силой знания

уводит в виртуальный мир

. . . . .

Людмила Сергиенко

Часть1.
Краткие справочно – информационные сведения

Основные обозначения

$\equiv$ означает «тождественно равно» ;

$\cong$ или $\approx$ означает «приближённо равно» ;

$\neq$ означает « не равно» ;

$\parallel$ означает « параллельно» ;

$\perp$ означает « перпендикулярно» ;

(a, b) – интервал означает «$a < x < b$» ;

$(a,b]$ - полуинтервал означает «$a < x \leq b$» ;

$[a, b]$ – сегмент означает «$a < x < b$» ;

$[a,b)$ – полусегмент означает «$a \leq x < b$» ;

Y= exp x = e^x– экспонента ($e = 2.71828\ldots \approx 2.72$).

Логические символы

$=>$	означает	« следует » или « влечёт » ;
$<=>$	означает	« эквивалентно » или «тогда и только тогда »;
$\forall$	означает	« для всех » (квантор всеобщности);
$\exists$	означает	« существует » (квантор существования);
$\overline{\exists}$ или $\nexists$	означает	« не существует ».
$\in$	означает	« принадлежит »
$\overline{\in}$ или $\notin$	означает	« не принадлежит»
$\ni$	означает	« содержит»
$\overline{\ni}$ или $\not\ni$	означает	«не содержит»
$\emptyset$	означает	« пустое множество»
$A \cup B$	означает	«объединение множеств»
$A \cap B$	означает	«пересечение множеств»

Латинский алфавит

Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы	Заглавные буквы	Строчные буквы	Название Буквы
A	a	а	N	n	эн
B	b	бэ	O	o	о
C	c	цэ	P	p	пэ
D	d	дэ	Q	q	Ку
E	e	е	R	r	эр
F	f	эф	S	s	эс
G	g	гэ (же)	T	t	тэ
H	h	ха (аш)	U	u	у
I	i	и	V	v	вэ
J	j	йот (жи)	W	w	дубль-вэ
K	k	ка	X	x	Икс
L	ℓ	эль	Y	y	игрек
M	m	эм	Z	z	зет

Греческий алфавит

Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы	Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы
Α	[illegible]	альфа	Ν	ν	ню
Β	[illegible]	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	[illegible]	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	[illegible]	дельта	Π	[illegible]	пи
Ε	[illegible]	эпсилон	Ρ	[illegible]	ро
Ζ	ζ	дзета	[illegible]	[illegible]	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
[illegible], [illegible]	[illegible]	тэта	Φ	[illegible]	фи
Ι	ι	йота	Χ	χ	хи
Κ	[illegible]	каппа	Υ	γ	ипсилон
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	[illegible]	мю	[illegible]	[illegible]	омега

Математические константы

C = const - обозначение константы - произвольной постоянной;

$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3.14159\ldots \approx 3.14}$ отношение длины окружности к диаметру;

$\mathbf{e} = \mathbf{2.71828\ldots \approx 2.72}$ основание натурального логарифма.

Числовые множества

R – множество действительных чисел.

C - множество комплексных чисел.

N = $\{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \ldots; \boldsymbol{n}; \ldots\}$ - множество натуральных чисел.

Z = $\{\ldots; \mathbf{-3}; \mathbf{-2}; \mathbf{-1}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \ldots\}$ - множество целых чисел.

Q = $\left\{\frac{m}{n},\ m \ni Z, n \ni Z, n \neq 0\right\}$ - множество рациональных чисел.

Признаки делимости целых чисел

Число без остатка делится:

на 2 - если его последняя цифра чётная (кратна 2);

на 3 - если сумма цифр в его изображении кратна 3;

на 4 - если две его последние цифры составляют число, кратное 4;

на 5 - если оно оканчивается на 0 или на 5;

на10 - если его последняя цифра 0.

Правила действий с числовыми дробями

1. <u>Сложение и вычитание правильных дробей</u>

Числовая дробь $\frac{a}{d}$ *правильная, если числитель меньше знаменателя:* $a < \mathrm{d}$.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}= \frac{a^{\backslash f}}{m}+\frac{b^{\backslash q}}{n}-\frac{c^{\backslash r}}{p}= \frac{af+bq-cr}{\beta}$$

$$(mnp\beta \neq 0, \quad a < \quad m, \quad b < n, \; c < p)$$

Общий знаменатель β – наименьшее целое число, которое делится на все знаменатели слагаемых дробей без остатка - *наименьшее общее кратное чисел* $m, \; n, \; p$: β *= Н.О.К.* $(m, \; n, \; p)$. Число β равно произведению наибольшего из этих чисел на простые делители следующего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первого выбранного знаменателя, умноженному на простые делители оставшегося третьего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первых двух знаменателей.

Дополнительные множители $f = \beta : m$, $q = \beta : n$, $r = \beta : p$.

∗ *Число – простое, если оно делится нацело (без остатка) только само на себя:*
1;2;3;5;7;11;13;23;29;… . Таких чисел бесконечное множество.

П р и м е р 1: Вычислить $A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60}$.

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели на простые делители

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{r|c|}
\underline{81} & 3 \\
27 & \underline{3} \\
9 & \underline{3} \\
3 & \underline{3} \\
1 &
\end{array}
\quad \text{И} \quad
\begin{array}{r|c|}
\underline{12} & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{r|c}
\underline{60} & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Общий знаменатель
[illegible] = Н. О. К. (81,12,60) =
= 81 x (2x2) x 5 = 1620.

Дополнительные множители

f = 1620 : 81 = 20, q = 1620: 12 = 135, r = 1620 : 60 = 27 $\Rightarrow$

$$A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60} = \frac{11^{\backslash 20}}{81} - \frac{5^{\backslash 135}}{12} + \frac{7^{\backslash 27}}{60} = \frac{11x20 - 5x135 + 7x27}{1620} =$$

$$= \frac{220 - 675 + 189}{1620} = -\frac{266}{1620} = -\frac{133x2}{810x2} = -\frac{133}{810}.$$

О т в е т: $A = -\frac{133}{810}$.

2. <u>Сложение и вычитание любых числовых дробей</u>

- *рационально проводить по алгоритму, представленному в примере 2.*

Пример 2. *Вычислить* $B = \mathbf{\frac{11}{81} - 3\frac{5}{12} + 6\frac{7}{60}}$.

Решение. $B => \left(\underbrace{0} + \frac{11}{81}\right) - \left(\underbrace{3} + \frac{5}{12}\right) + \left(\underbrace{6} + \frac{7}{60}\right)$.

Перегруппируем слагаемые в виде $B = (0 - 3 + 6) + \left(\frac{11}{21} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60}\right) = 3 + A$,

где $A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60} = -\frac{133}{810}$ (см. пример1). $=>$

$$B = 3 + A = 3 + \left(-\frac{133}{810}\right) = \left\| 3 => 2 + 1 => 2 + \frac{810}{810} \right\| = \left(2 + \underbrace{\frac{810}{810}}\right) - \underbrace{\frac{133}{810}} =$$

$$= 2 + \left(\frac{810}{810} - \frac{133}{810}\right) = 2 + \frac{810 - 133}{810} = 2 + \frac{677}{810}.$$

Ответ: $B = \mathbf{2\frac{677}{210}}$

Умножение и деление числовых дробей

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \cdot b}{m \cdot n} \quad (mn \neq 0),$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{a \cdot n}{m \cdot b} \quad (mnb \neq 0)$$

* **1. Модуль действительного числа и его свойства.**

$$|a| = \left[\begin{array}{lll} a & \text{при} & a \geq 0, \\ -a & \text{при} & a < 0. \end{array}\right]$$

$$|a| \geq 0, \qquad |ab| = |a| \cdot |b|, \qquad |a+b| \leq |a| + |b|,$$

$$|-a| = |a|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0), \qquad a^2 + b^2 \geq 2|ab|.$$

* Арифметический корень $|a| = \sqrt{a^2}$

Определение и свойства степени

*

1. $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$,

2. $a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n}$,

3. $a^n a^m = a^{n+m}$,

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

5. $\dfrac{a^n}{a^m} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{a^{n-m}}{1} = a^{n-m}, & \text{при } n > m \text{ или } (n-m) > 0, \\ \dfrac{1}{a^{m-n}}, & \text{при } m > n \text{ или } (m-n) > 0; \end{array}\right.$

6. $\dfrac{1}{a^c} = a^{-c} \ (a \neq 0)$,

7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$,

8. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0)$,

9. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (принято $\sqrt[2]{a^1}$ обозначать просто $\sqrt{a}$, $a \geq 0$),

11. $\sqrt[(2n)]{a^{2n}} = |a|$,

12. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

13. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}}$.

Формулы сокращённого умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы двух чисел;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности двух чисел;
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – разность квадратов двух чисел;
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы двух чисел ;
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности двух чисел;
6. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов двух чисел ;
7. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов двух чисел .

Замечание 1* Перечисленные формулы можно читать так:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – **квадрат суммы двух чисел** равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго числа;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – **квадрат разности двух чисел** равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго;

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – **разность квадратов двух чисел** равна произведению разности оснований этих чисел на сумму оснований.

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – **куб суммы двух чисел равен** кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс кубу второго числа;

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – **куб разности двух чисел** равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго числа;

6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – **сумма кубов двух чисел** равна произведению суммы оснований этих чисел на неполный квадрат их разности ;

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – **разность кубов двух чисел** равна

произведению разности оснований этих чисел на неполный квадрат их суммы.

$Замечание\ 2^*$ Формулы сокращённого умножения можно применять при сложении алгебраических дробей по тому же алгоритму, что и для числовых дробей .

Арифметическая прогрессия

*

Последовательность чисел вида $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{2d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{3d},\ \ldots\}$ называется *арифметической прогрессией.*

Константа $d \neq 0$ называется *разностью арифметической прогрессии.*

$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)\cdot d}$, $n = 1; 2; 3; \cdots$ - *общий член прогрессии.*

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

- *характеристическое свойство прогрессии.*

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]\cdot n}{2}}}.$$

Геометрическая прогрессия

* последовательность чисел $\{b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3, \dots\}$

- $q \neq 0$ - *знаменатель геометрической прогрессии.*

$b_n = b_{n-1} \cdot q, b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n = 1; 2; 3; \dots$, - *общий член прогрессии.*

Геометрическая прогрессия называется:

возрастающей, если $|q| > 1$; *убывающей*, если $0 < |q| < 1$;

знакочередующейся, если $q < 0$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q}}.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \cdots b_1 q^n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Понятие логарифма

При $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ $\boxed{a^c = b \quad <=> \quad log_a b = c.}$

В переводе с французского слово «логарифм» означает показатель.

Например: $2^3 = 8 \quad <=> \quad \log_2 8 = 3.$

$y = \log_a x$ - логарифмическая функция с основанием a.

Обозначают :

$\boxed{log_{10} a = lg\ a}$ - десятичный логарифм,

$\boxed{log_e b = ln\ b}$ – натуральный логарифм - основание натурального логарифма - трансцендентное число

$e = 2.71828\ldots \approx 2.72.$

- График функции $y= e^x$ называется ***экспонентой***.

* Свойства логарифмов

$\boxed{a^{log_a b} = b}$ - **основное логарифмическое тождество.**

1. $log_a a = 1$;
2. $log_a 1 = 0$:
3. $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$;
4. $c \cdot log_a b = log_a(b^c)$;
5. $log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b$;
6. $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$;
7. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$;
8. $log_a b = \frac{1}{log_b a}$.

Например:

$$log_2 16 = log_2(8 \cdot 2) = log_2 8 + log_2 2 = log_2(2^3) + log_2(2^1) = 3 + 1 = 4$$

$$<=> \log_2 16 = \log_2(2^4) = 4.$$

Решение квадратного уравнения

Коэффициенты $a \neq 0,\ b,\ c$ – действительные (вещественные) числа,

дискриминант $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$

- при $\boldsymbol{D > 0}$ – два различных действительных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

- при $\boldsymbol{D = 0}$ – один двукратный действительный корень $\boldsymbol{x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}}$;

- **при D < 0** – два различных комплексных или мнимых корня (пара комплексно – сопряжённых чисел)

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a}$$

* Замечание.

*

Действительные (вещественные) числа изображаются десятью арабскими знаками - цифрами 0;1;2; … ; 9. Вводится ещё один знак – так называемая ***мнимая единица***, которая обозначается символом «$\boldsymbol{i}$» (в технической литературе «**j**»), и удовлетворяет условию $\boxed{i^2 = -1.}$

Выражение $z = \alpha + i\,\beta$ с действительными (вещественными) числами α и β называется ***комплексным или мнимым числом***.

Число $\bar{z} = \alpha - i\,\beta$ называется комплексно-сопряжённым числу z.

Пример. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0.$

Решение. Так как $a = 1,\ b = -4,\ c = 13,\ D = -36,\ D < 0,$ имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\mathbf{4 \pm \sqrt{-36}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4 \pm \sqrt{(-1)\cdot 36}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4 \pm \sqrt{36}\boldsymbol{i}^2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4 \pm 6}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} \pm \frac{\mathbf{6}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2 \pm 3}\boldsymbol{i}.$$

Ответ: корнями квадратного уравнения являются комплексно – сопряжённые числа $x_1 = 2 + 3i$ и $x_2 = 2 - 3i.$

Приведённое квадратное уравнение

* $$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$\left(ax^2 + bx + c = 0 \quad <=> \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,\ \ \frac{b}{a} = p,\ \frac{c}{a} = q\ \right)$$

Коэффициенты p, q – действительные (вещественные числа).

Корни определяются по формуле $\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}.$

Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту p с обратным знаком, а произведение - свободному члену q:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}, \\ \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = q}. \end{cases}$$

П р и м е р. В уравнении $x^2 - 6x + 8 = 0$ имеем $p = -6$, $q = 8$, корни

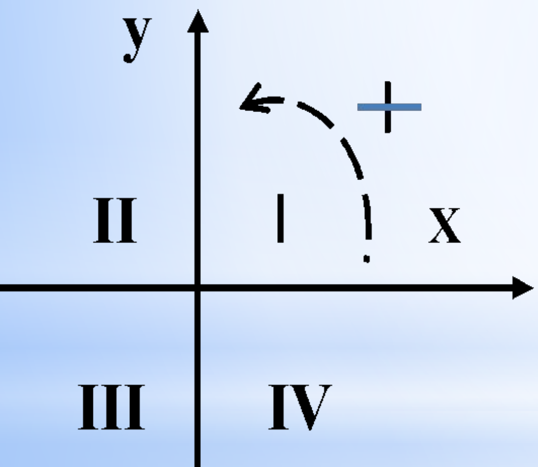
$$\boldsymbol{x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 = \{3-1; 3+1\} = \{2; 4\}}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{2 + 4 = 6 = -p}, \\ \boldsymbol{2 \cdot 4 = 8 = q}. \end{cases}$$

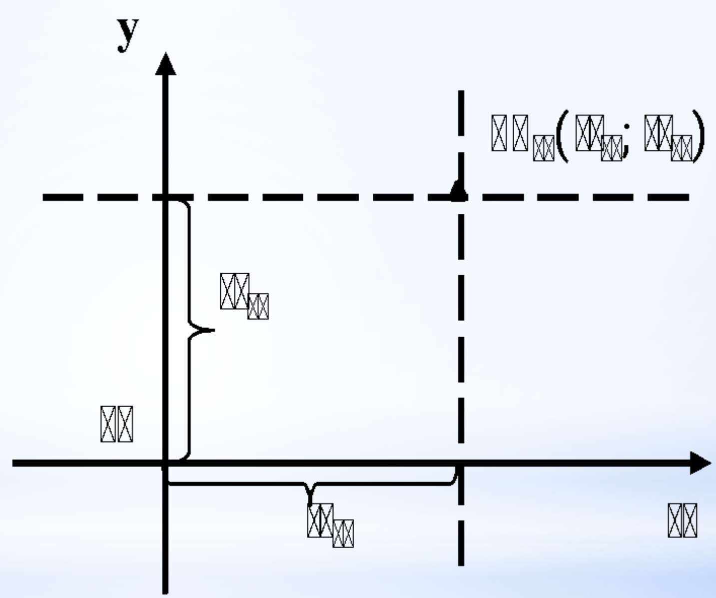
Декартова система координат

<u>на плоскости</u> – в евклидовом пространстве $R^2 = \{x; y\}$:

пара взаимно ортогональных ориентированных против часовой стрелки

четверти или квадранты

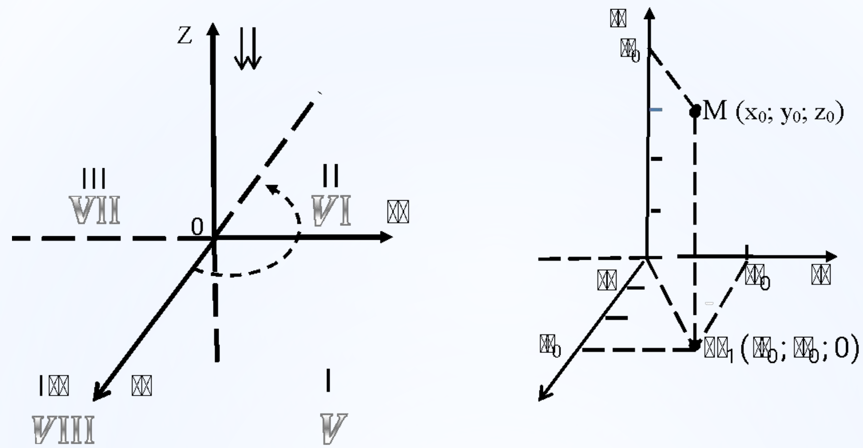




Декартова система координат в евклидовом пространстве $R^3 = \{x; y; z\}$:

x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата

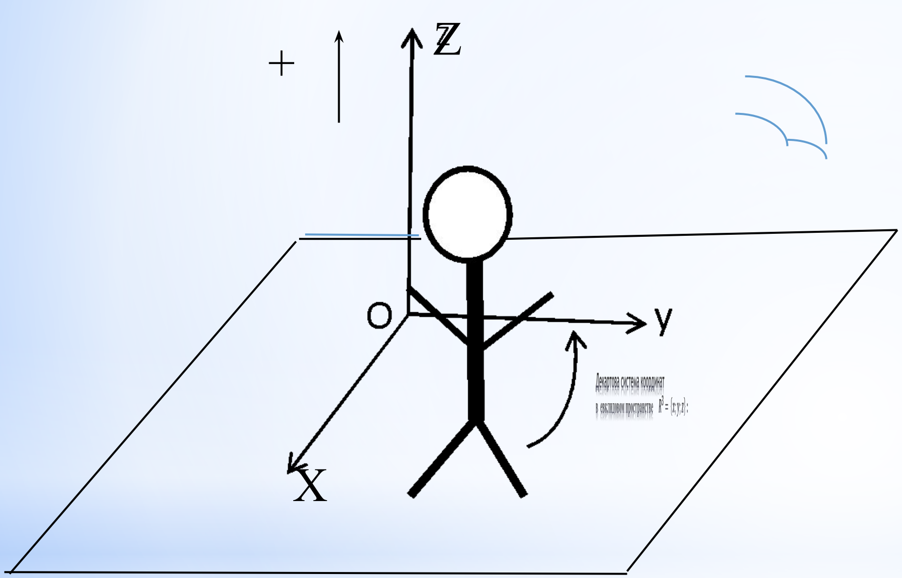
октанты I – VIII

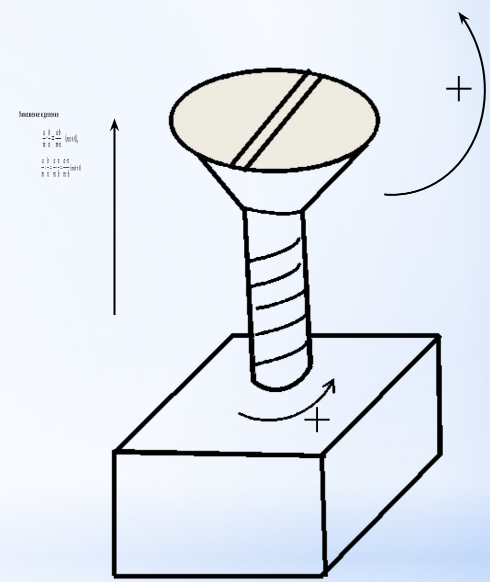


З а м е ч а н и е. Единица масштаба по оси OX по длине составляет примерно 0.8 от одинаковых единиц масштаба по осям OY и OZ.

Ориентация декартовых осей координат

(по правилу буравчика)





Направление обхода контура - ***против часовой стрелки****, начало координат слева*

Правый винт

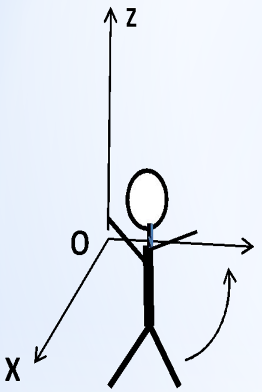
Правая тройка векторов

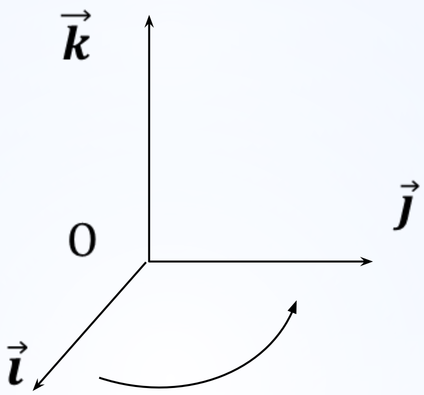
Направление обхода -
против часовой стрелки

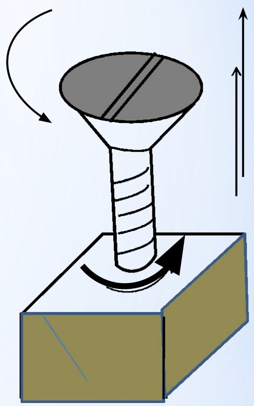
Базисные орты

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

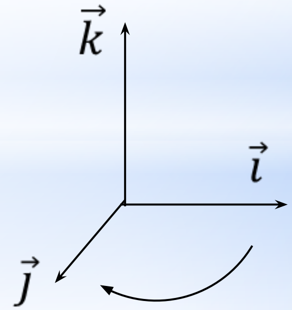
Правило буравчика
(правило правого винта)







* *Левая тройка векторов* = >



Тригонометрия

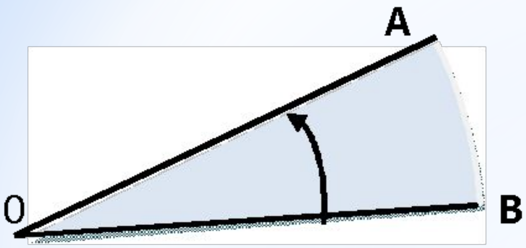


Рис. 1

Плоский угол - часть плоскости между двумя лучами, выходящими из одной точки (вершины).

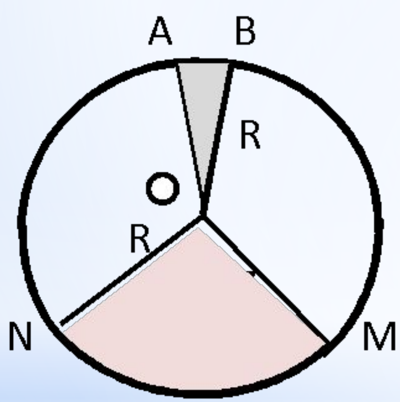


Рис. 2

1° - **один градус** – центральный угол ∠AOB, опирающийся на дугу длиной $l_{AB} = \frac{C}{360}$, где C - длина окружности;

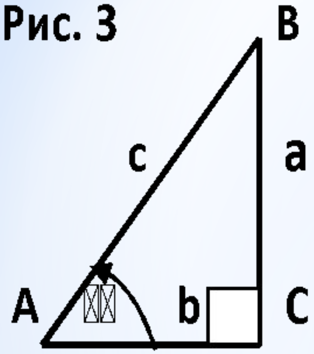
1- один радиан – центральный угол ∠MON, опирающийся на дугу длиной $l_{MN} = R$.

$C \sim 360^0 \sim 2\pi \quad =>$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,рад. \approx 0{,}017\,рад., \quad 1\,рад. = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\,17'\ldots \approx 57^\circ$$

Тригонометрические функции острого угла

Рис. 3



$\angle ACB = 90°, \quad \angle BAC = \alpha, \quad 0° \leq \alpha \leq 90°$

Синус: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{длина противолежащего } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Косинус: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{длина прилежащего к } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Тангенс: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{длина противолежащего катета}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Котангенс: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{длина прилежащего катета}}{\text{длина противолежащего катета}}$

Секанс: $\sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Косеканс: $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина противолежащего катета}}$

Таблица значений тригонометрических функций «острого» угла

Угол ⊠ (радиан/градус)	0 / 0^0	⊠/⊠ 30^0	⊠/⊠ 45^0	⊠/⊠ 60^0	⊠/⊠ 90^0
sin ⊠	ξ $\overline{0}$⊠ 2	ξ $\overline{1}$⊠ 2	ξ $\overline{2}$⊠ 2	ξ $\overline{3}$⊠ 2	ξ $\overline{4}$⊠ 2
	⊠	⊠⊠ ⊠	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	⊠
cos ⊠	ξ $\overline{4}$⊠ 2	ξ $\overline{3}$⊠ 2	ξ $\overline{2}$⊠ 2	ξ $\overline{1}$⊠ 2	ξ $\overline{0}$⊠ 2
	⊠	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	⊠⊠ ⊠	⊠
tg ⊠	0	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	1	ξ $\overline{⊠}$	⊠ $+\infty$
ctg ⊠	⊠ $+\infty$	ξ $\overline{⊠}$	1	ξ $\overline{⊠}$⊠ ⊠	0

Тригонометрические функции произвольного угла

$0 + 2\pi k < \alpha < \pi/2 + 2\pi k \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2;$

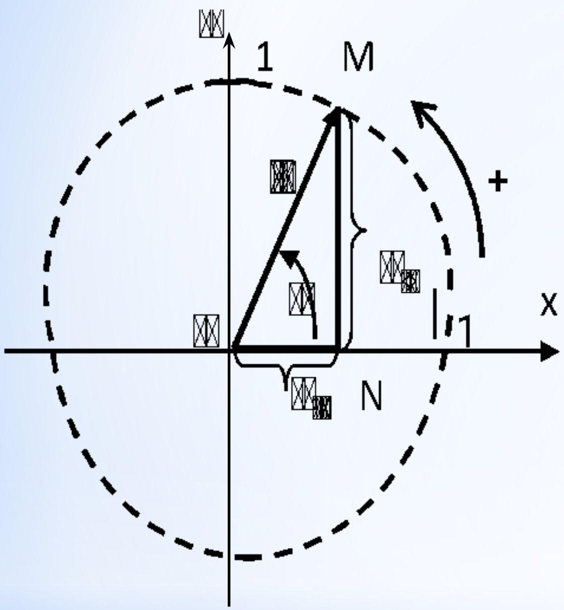


Рис. 4

$\bar{e} = \overline{OM}$ – единичный радиус - вектор

$|\bar{e}| = |\overline{OM}| = 1.$ Из ΔOMN =>

$\cos\alpha = x_M/1, \quad \sin\alpha = y_M/1.$

=> $\overline{OM} = (x_M; y_M) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$

Синусом и косинусом угла, образованного единичным радиус - вектором с положительным направлением оси абсцисс, являются соответственно ордината и абсцисса этого вектора.

При $x_M \neq 0$: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_M}{x_M}$, $\sec\alpha = \frac{1}{x_M}$; при $y_M \neq 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x_M}{y_M}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y_M}$.

Формулы приведения

	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Пример 3. $\sin 300^0 = \begin{cases} \sin(270^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\sqrt{3}/2, \\ \sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0 = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$

Значение тригонометрической функции

$$f(360^0 k \pm \beta) = \pm f(\beta), \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots .$$

Пример 4.

$$\square\, 585^0 = \begin{cases} \square(360^0 + 225^0) = \square\, 225^0 = \square(180^0 + 45^0) = \square\, 45^0 = 1, \\ \square(720^0 - 135^0) = -\square\, 135^0 = -\square(180^0 - 45^0) = \square\, 45^0 = 1. \end{cases}$$

Основные тригонометрические формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}, \quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha,$$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

$$\boxed{\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x}$$

$$\boxed{\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

$$\boxed{\sin 2x = \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2 x}}$$

$$\boxed{\cos 2x = 2cos^2 x - 1}$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2sin^2 x}$$

$$\boxed{tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1-tg^2 x}}$$

$$\boxed{ctg\ 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctg\ x}}$$

Универсальные тригонометрические подстановки

(выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла при $\boxtimes \neq \boxtimes + 2\boxtimes\boxtimes$, где $\boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes$)

$$\cos\boxtimes = \frac{1-\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}}{1+\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};\qquad \sin\boxtimes = \frac{2\boxtimes\boxtimes\frac{\boxtimes}{2}}{1+\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};\qquad \boxtimes\boxtimes\ \boxtimes = \frac{2\boxtimes\boxtimes\frac{\boxtimes}{2}}{1-\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

[illegible] = [illegible] + [illegible] / [illegible] + [illegible]

Преклонение перед числом в пифагорейском союзе сопровождалось мистическими измышлениями, зачатки которых были заимствованы совместно с началами математических знаний из стран Ближнего Востока… .

<u>Космос (понятие, введенное пифагорейцами) - это гармония, совершенство, строй, мера. Вселенная, созданная числом и противоположными принципами (конечность - бесконечность), ведет себя логически, соразмерно необходимости и меры… .</u>

Пифагор родился в 580 г. умер в 500 г. до нашей эры.

Обратные тригонометрические функции

* Arcsin x - («арка», дуга) - это величина, синус которой равен x.

$Arccos\ x$ - это величина («арка», дуга), косинус которой равен x, и т. д.

$\sin(\mathrm{Arcsin}\ x) = x, \quad \cos(Arccos\ x) = x, \quad tg(Arctg\ x) = x, \quad \ldots$

Функция	Область определения	Область изменения	Главное значение
$y = Arcsin\ x = (-1)^n \arcsin x + \pi n.$	$-1 \leq x \leq 1,$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$	$\arcsin x.$
$y = Arccos\ x = \pm \arccos x + 2\pi n.$	$-1 \leq x \leq 1,$	$0 \leq y \leq \pi,$	$\arccos x.$
$y = Arctg\ x = arctg\ x + \pi n.$	$-\infty < x < +\infty,$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$	$arctg\ x,$
$y = Arcctg\ x = arcctg\ x + \pi n$	$-\infty < x < +\infty,$	$0 < y < \pi,$	$arcctg\ x.$

Решения тригонометрических уравнений

$\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$

$\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$tg\, x = a, \quad x = arctg\, a + \pi n, \quad n \in Z$

$ctg\, x = a, \quad x = arcctg\, a + \pi n, \quad n \in Z$

Частные случаи

1) $sin\, x = 0, \quad x = \pi n;$

2) $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

3) $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

4) $cos\, x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

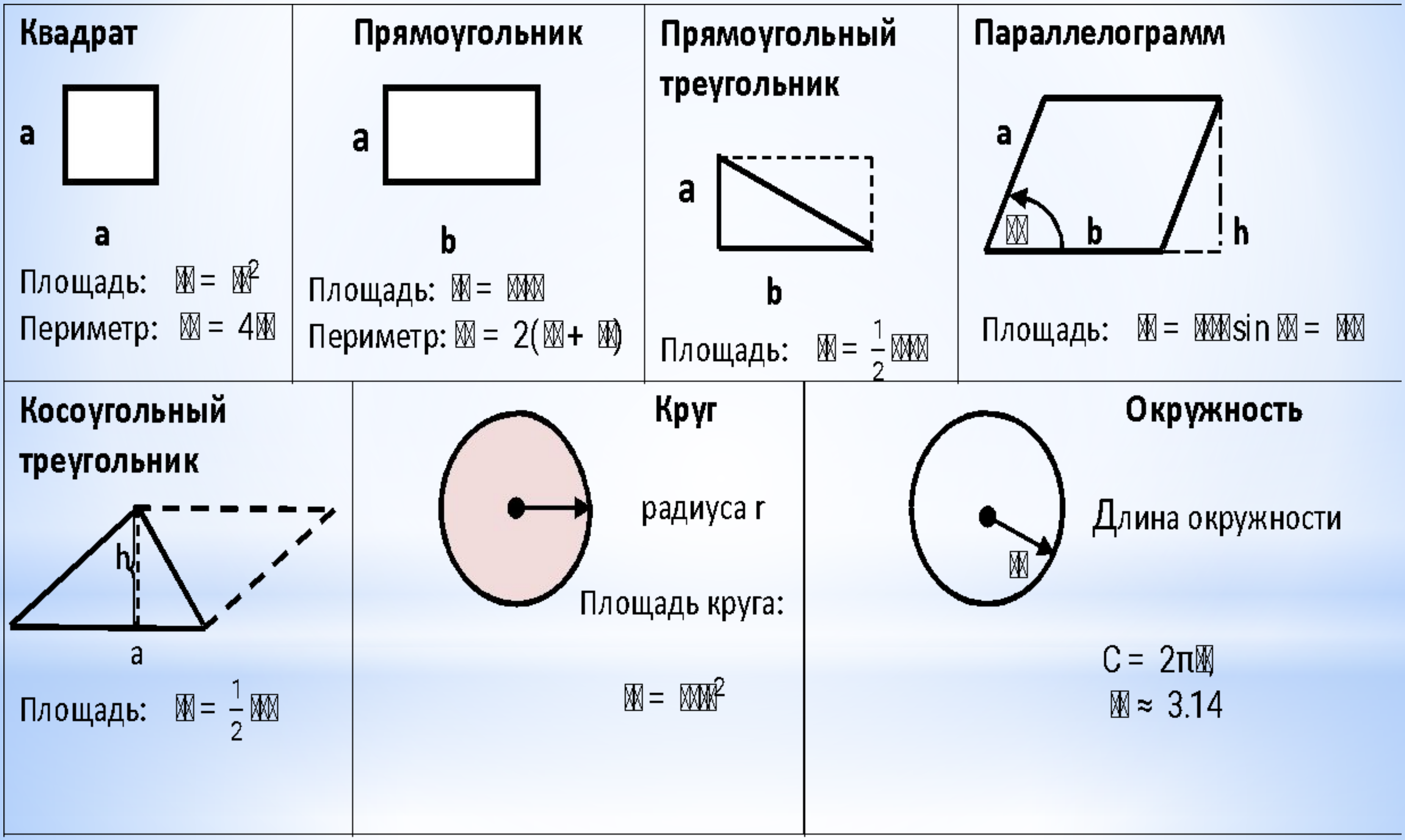
5) $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n\ ;$

6) $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n$

7) $tg = 0, \quad x = \ \pi n\ ;$

8) $ctg\, x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

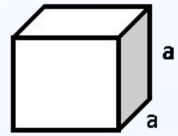
Некоторые из основных геометрических фигур на плоскости



Некоторые из основных геометрических фигур в пространстве

Куб

(гексаэдр)

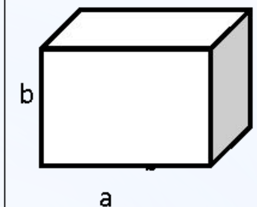


Объём: [illegible] = [illegible]^3

Длина каркаса: [illegible] = 12[illegible]

Площадь поверхности: [illegible] = 6[illegible]^2

Параллелепипед



Объём [illegible] = [illegible]

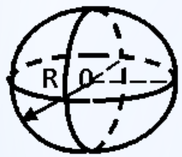
Длина каркаса

[illegible] = 4([illegible] + [illegible] + [illegible])

Площадь поверхности:

[illegible] = 2([illegible] + [illegible] + [illegible])

Шар



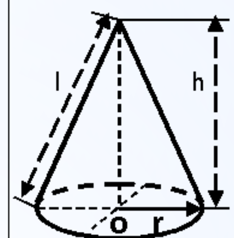
Объём [illegible] = $\frac{4}{3}$[illegible]^3

Площадь поверхности

Место для фшара (площадь сферы):

S=4[illegible]^2

Прямой круговой конус



Объём [illegible] = $\frac{1}{3}$[illegible]^2[illegible]

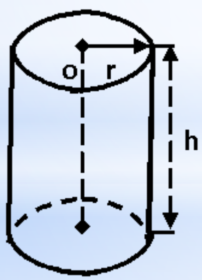
Площадь поверхности:

полной

[illegible]$_{пол}$ = [illegible]([illegible] + [illegible]);

боковой [illegible]$_{бок}$ = [illegible]

Прямой круговой цилиндр



Объём [illegible] = [illegible]^2[illegible]

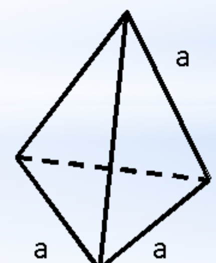
Площадь поверхности:

боковой [illegible] = 2[illegible];

полной

[illegible] = 2[illegible]([illegible] + [illegible])

Правильная четрёхугольная пирамида (тетраэдр)



Объём [illegible] = $\frac{[illegible]^3 \xi \overline{2}}{12}$ ≈ 0.1179 [illegible]^3

Площадь полной поверхности

S = [illegible]^{2}ξ$\overline{3}$ ≈ 1.7321 [illegible]^2