Тема:
Преобразование логических выражений

Учитель информатики и ИКТ Бородина И.В.
МБОУ СОШ №13 ст. Новоджерелиевская
2011-2012 уч.год

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

1). Условные обозначения логических операций:

¬ A, $\overline{A}$ не A (отрицание, инверсия)

A ∧ B, $A \cdot B$ A и B (логическое умножение, конъюнкция)

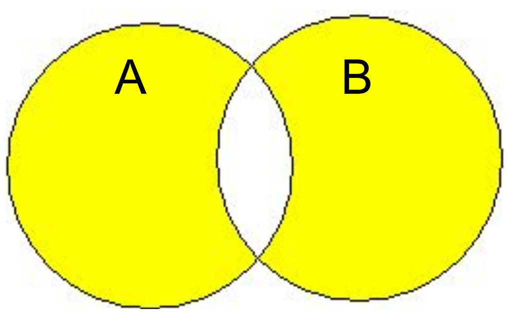
A ∨ B, $A + B$ A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

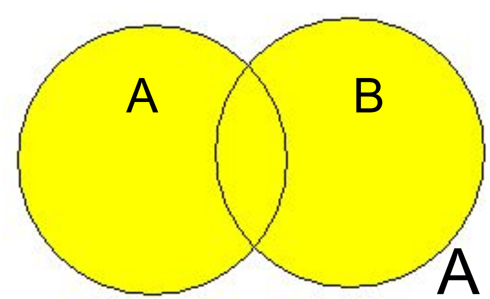
A → B импликация (следование)

A ↔ B, $A \equiv B$ эквиваленция (эквивалентность, равносильность)

A ⊕ B исключающее или (только одно из A или B)

A ⊕ B





A + B

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

2). Таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция», «исключающее ИЛИ»

A	B	A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

3). Операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

A → B = ¬ A ∨ B или в других обозначениях **A → B =** $\overline{A} + B$

4). Операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

A ↔ B = (¬ A ∧ ¬ B) ∨ (A ∧ B) или в других обозначениях $A \equiv B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

5). Законы исключающее «ИЛИ»

A ⊕ B = $\overline{A \equiv B}$, A ⊕ B = $A\overline{B} + \overline{A}B$

6). Если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация».

7). Логическое произведение A·B·C·… равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0).

8). Логическая сумма A+B+C+… равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)

ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ):

Закон	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A;\ A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A;\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_2 \equiv X_1) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$
...
$$(X_9 \equiv X_1) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = (X_2 \equiv X_3)$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

3). По таблице истинности находим варианты

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_3
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	0
1	1	1

$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0 1
1	1	1	0 1

…

4). Подключили X_4 – получили 8 решений, подключим X_5 – получим 10 решений, X_6 – получим 12 решений, X_7 – получим 14 решений, X_8 – получим 16 решений, X_9 – получим 18 решений, X_{10} – получим 20 решений.

5). Остается одно последнее уравнение $\mathbf{X_{10} \equiv X_1 = 0}$**,** из которого следует, что **X_{10} не равен X_1**, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2 решения, таким образом, получается **20 – 2 = 18** решений

Ответ: 18 решений

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$\ldots$$

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$\ldots$$

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

3). Будем решать уравнения последовательно табличным методом

$$(X_1 \equiv X_2)+(X_1 \equiv X_3)=1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_3
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	1
0	0	0
1	1	1

$$(X_2 \equiv X_3)+(X_2 \equiv X_4)=1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	0	0 1
1	1	1	0 1

…

4). Подключили X_4 – получили 8 решений, подключим X_5 – получим 10 решений, X_6 – получим 12 решений, X_7 – получим 14 решений, X_8 – получим 16 решений, X_9 – получим 18 решений, X_{10} – получим 20 решений.

Ответ: 20 решений

Сколько различных решений имеет система уравнений

$(X_1 \equiv X_2) \lor (X_2 \land X_{10}) \lor (\neg X_2 \land \neg X_{10}) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) \lor (X_3 \land X_{10}) \lor (\neg X_3 \land \neg X_{10}) = 1$
...
$(X_8 \equiv X_9) \lor (X_9 \land X_{10}) \lor (\neg X_9 \land \neg X_{10}) = 1$
$X_{10} \equiv X_1 = 0$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x_1, x_2, …, x_{10}, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_1 \equiv X_2) + X_2 \cdot X_{10} + \overline{X_2} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + X_3 \cdot X_{10} + \overline{X_3} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$\dots$$
$$(X_8 \equiv X_9) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$$X_2 \cdot X_{10} + \overline{X_2} \cdot \overline{X_{10}} = (X_2 \equiv X_{10})$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$$
$$\dots$$
$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

3). По таблице истинности находим варианты

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_{10}
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	0
1	1	1

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$$

1	0
0	1
1	1

X_1	X_2	X_{10}	X_3
0	0	1	0 1
1	1	0	0 1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1

…

4). Подключили X_3 – получили 8 решений, подключим X_4 – получим 10 решений, X_5 – получим 12 решений, X_6 – получим 14 решений, X_7 – получим 16 решений, X_8 – получим 18 решений, X_9 – получим 20 решений.

5). Остается одно последнее уравнение $\mathbf{X_{10} \equiv X_1 = 0}$, из которого следует, что **X_{10} не равен X_1**, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2 решения, таким образом, получается **20 – 2 = 18** решений

Ответ: 18 решений

Сколько различных решений имеет система уравнений

$\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3) = 0$
$\neg(X_2 \equiv X_3) \wedge (X_2 \vee X_4) \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_4) = 0$
...
$\neg(X_8 \equiv X_9) \wedge (X_8 \vee X_{10}) \wedge (\neg X_8 \vee \neg X_{10}) = 0$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x_1, x_2, …, x_{10}, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \cdot (X_1 + X_3) \cdot (\overline{X_1} + \overline{X_3}) = 0$$

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \cdot (X_2 + X_4) \cdot (\overline{X_2} + \overline{X_4}) = 0$$

...

$$\overline{(X_8 \equiv X_9)} \cdot (X_8 + X_{10}) \cdot (\overline{X_8} + \overline{X_{10}}) = 0$$

2). Заметим, что

$$(X_1 + X_3) \cdot (\overline{X_1} + \overline{X_3}) = (X_1 \cdot \overline{X_3}) + (\overline{X_1} \cdot X_3) = (X_1 \oplus X_3)$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(\overline{X_1 \equiv X_2}) \cdot (X_1 \oplus X_3) = 0$$

$$(\overline{X_2 \equiv X_3}) \cdot (X_2 \oplus X_4) = 0$$

...

$$(\overline{X_8 \equiv X_9}) \cdot (X_8 \oplus X_{10}) = 0$$

3). По таблице истинности находим варианты

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \cdot (X_1 \oplus X_3) = 0$$

0	0
0	1
1	0

X_1	X_2	X_3
0	0	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	1

…

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \cdot (X_2 \oplus X_4) = 0$$

0	0
0	1
1	0

X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	0	0 1
1	1	1	0 1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0

4). Подключили X_4 – получили 8 решений, подключим X_5 – получим 10 решений, X_6 – получим 12 решений, X_7 – получим 14 решений, X_8 – получим 16 решений, X_9 – получим 18 решений, X_{10} – получим 20 решений.

Ответ: 20 решений

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \vee (X_3 \equiv X_4)) \wedge (\neg(X_1 \equiv X_2) \vee \neg(X_3 \equiv X_4)) = 1$$
$$((X_3 \equiv X_4) \vee (X_5 \equiv X_6)) \wedge (\neg(X_3 \equiv X_4) \vee \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$
$$\ldots$$
$$((X_7 \equiv X_8) \vee (X_9 \equiv X_{10})) \wedge (\neg(X_7 \equiv X_8) \vee \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$((X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4)) \cdot ((\overline{X_1 \equiv X_2}) + (\overline{X_3 \equiv X_4})) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6)) \cdot ((\overline{X_3 \equiv X_4}) + (\overline{X_5 \equiv X_6})) = 1$$

$$\ldots$$

$$((X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10})) \cdot ((\overline{X_7 \equiv X_8}) + (\overline{X_9 \equiv X_{10}})) = 1$$

2). Раскроем скобки и перепишем систему уравнений в виде

$$(X_1 \equiv X_2) \cdot (\overline{X_3 \equiv X_4}) + (\overline{X_1 \equiv X_2}) \cdot (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_4) \cdot (\overline{X_5 \equiv X_6}) + (\overline{X_3 \equiv X_4}) \cdot (X_5 \equiv X_6) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_7 \equiv X_8) \cdot (\overline{X_9 \equiv X_{10}}) + (\overline{X_7 \equiv X_8}) \cdot (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

3). Используя закон исключающее «ИЛИ», перепишем систему уравнений в виде

$$(X_1 \equiv X_2) \oplus (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_4) \oplus (X_5 \equiv X_6) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_7 \equiv X_8) \oplus (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

4). По таблице истинности находим варианты

$$(X_1 \equiv X_2) \oplus (X_3 \equiv X_4) = 1$$

0	1
1	0

X_1	X_2	X_3	X_4
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
0	0	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4). Количество переменных:

X_4 – получили 8 решений, X_6 – получили 16 решений, X_8 – получим 32 решения, X_{10} – получим 64 решения.

Ответ: 64 решения

…

$$(X_3 \equiv X_4) \oplus (X_5 \equiv X_6) = 1$$

0	1
1	0

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X6
0	1	0	0	0 1	1 0
0	1	1	1	0 1	1 0
1	0	0	0	0 1	1 0
1	0	1	1	0 1	1 0
0	0	0	1	0 1	0 1
0	0	1	0	0 1	0 1
1	1	0	1	0 1	0 1
1	1	1	0	0 1	0 1

Используемые источники

Ссылка на используемый источник при подготовке презентации:

http://kpolyakov.narod.ru/download/B15.doc