

**Тема:**  
**Преобразование  
ЛОГИЧЕСКИХ  
ВЫРАЖЕНИЙ**

*Учитель информатики и ИКТ Бородина И.В.  
МБОУ СОШ №13 ст. Новоджерелиевская  
2011-2012 уч.год*

# ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

## 1). Условные обозначения логических операций:

$\neg A$ ,  $\bar{A}$  не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B$ ,  $A \cdot B$  A и B (логическое умножение, конъюнкция)

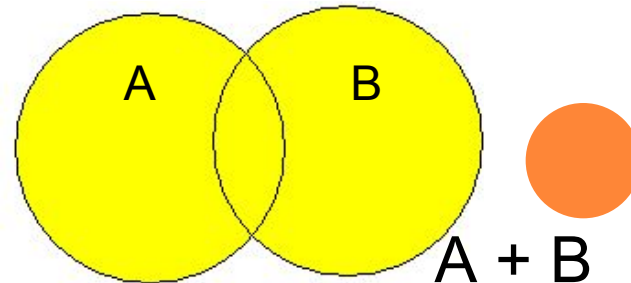
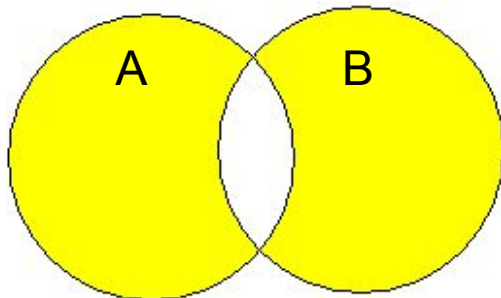
$A \vee B$ ,  $A + B$  A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$  импликация (следование)

$A \leftrightarrow B$ ,  $A \equiv B$  эквиваленция (эквивалентность, равносильность)

$A \oplus B$  исключающее или (только одно из A или B)

$A \oplus B$



# ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

2). Таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция», «исключающее ИЛИ»

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



## ЗНАТЬ:

3). Операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B \quad \text{или в других обозначениях} \quad A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

4). Операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \quad \text{или в других обозначениях} \quad A \equiv B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

5). Законы исключающее «ИЛИ»

$$A \oplus B = \frac{A \equiv B}{A \equiv B}, \quad A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

6). Если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация».

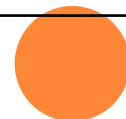
7). Логическое произведение  $A \cdot B \cdot C \cdot \dots$  равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0).

8). Логическая сумма  $A + B + C + \dots$  равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)



# ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ):

Закон	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A; A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$



Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_2 \equiv X_1) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_1) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_1) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (табличный метод):**

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$

$$(X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = (X_2 \equiv X_3)$   
поэтому уравнения можно

переписать в виде

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$



3). По таблице истинности находим варианты

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_3$
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	0
1	1	1

$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0
			1
1	1	1	0
			1

...



4). Подключили  $X_4$  – получили 8 решений, подключим  $X_5$  – получим 10 решений,  $X_6$  – получим 12 решений,  $X_7$  – получим 14 решений,  $X_8$  – получим 16 решений,  $X_9$  – получим 18 решений,  $X_{10}$  – получим 20 решений.

5). Остается одно последнее уравнение  $X_{10} \equiv X_1 = 0$ , из которого следует, что  $X_{10}$  не равен  $X_1$ , то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2 решения, таким образом, получается  $20 - 2 = 18$  решений

**Ответ: 18 решений**





Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$\dots$$
$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (табличный метод):**

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$



3). Будем решать уравнения последовательно табличным методом

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_3$
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	1
0	0	0
1	1	1

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	0	0
			1
1	1	1	0
			1

...

4). Подключили  $X_4$  – получили 8 решений, подключим  $X_5$  – получим 10 решений,  $X_6$  – получим 12 решений,  $X_7$  – получим 14 решений,  $X_8$  – получим 16 решений,  $X_9$  – получим 18 решений,  $X_{10}$  – получим 20 решений.

**Ответ: 20 решений**

## Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \equiv X_2) \vee (X_2 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) \vee (X_3 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

### Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_1 \equiv X_2) + X_2 \cdot X_{10} + \overline{X_2} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + X_3 \cdot X_{10} + \overline{X_3} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

2). Заметим, что по свойству операции эквивалентности

$$X_2 \cdot X_{10} + \overline{X_2} \cdot \overline{X_{10}} = (X_2 \equiv X_{10})$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

3). По таблице истинности находим варианты

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_{10}$
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	0
1	1	1

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$$

1	0
0	1
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_{10}$	$X_3$
0	0	1	0
			1
1	1	0	0
			1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1

...



4). Подключили  $X_3$  – получили 8 решений, подключим  $X_4$  – получим 10 решений,  $X_5$  – получим 12 решений,  $X_6$  – получим 14 решений,  $X_7$  – получим 16 решений,  $X_8$  – получим 18 решений,  $X_9$  – получим 20 решений.

5). Остается одно последнее уравнение  $X_{10} \equiv X_1 = 0$ , из которого следует, что  $X_{10}$  не равен  $X_1$ , то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2 решения, таким образом, получается  $20 - 2 = 18$  решений

**Ответ: 18 решений**



## Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_3}) = 0$$

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \wedge (X_2 \vee X_4) \wedge (\overline{X_2} \vee \overline{X_4}) = 0$$

...

$$\overline{(X_8 \equiv X_9)} \wedge (X_8 \vee X_{10}) \wedge (\overline{X_8} \vee \overline{X_{10}}) = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

### Решение (табличный метод):

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \cdot (X_1 + X_3) \cdot (\overline{X_1} + \overline{X_3}) = 0$$

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \cdot (X_2 + X_4) \cdot (\overline{X_2} + \overline{X_4}) = 0$$

...

$$\overline{(X_8 \equiv X_9)} \cdot (X_8 + X_{10}) \cdot (\overline{X_8} + \overline{X_{10}}) = 0$$

2). Заметим, что

$$(X_1 + X_3) \cdot (\overline{X_1} + \overline{X_3}) = (X_1 \cdot \overline{X_3}) + (\overline{X_1} \cdot X_3) = (X_1 \oplus X_3)$$

поэтому уравнения можно переписать в виде

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \cdot (X_1 \oplus X_3) = 0$$

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \cdot (X_2 \oplus X_4) = 0$$

...

$$\overline{(X_8 \equiv X_9)} \cdot (X_8 \oplus X_{10}) = 0$$



3). По таблице истинности находим варианты

$$\overline{(X_1 \equiv X_2)} \cdot (X_1 \oplus X_3) = 0$$

0	0
0	1
1	0

$X_1$	$X_2$	$X_3$
0	0	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	1

...

$$\overline{(X_2 \equiv X_3)} \cdot (X_2 \oplus X_4) = 0$$

0	0
0	1
1	0

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	0	0	0
			1
1	1	1	0
			1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0

4). Подключили  $X_4$  – получили 8 решений, подключим  $X_5$  – получим 10 решений,  $X_6$  – получим 12 решений,  $X_7$  – получим 14 решений,  $X_8$  – получим 16 решений,  $X_9$  – получим 18 решений,  $X_{10}$  – получим 20 решений.

**Ответ: 20 решений**



Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \vee (X_3 \equiv X_4)) \wedge (\neg(X_1 \equiv X_2) \vee \neg(X_3 \equiv X_4)) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) \vee (X_5 \equiv X_6)) \wedge (\neg(X_3 \equiv X_4) \vee \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$

...

$$((X_7 \equiv X_8) \vee (X_9 \equiv X_{10})) \wedge (\neg(X_7 \equiv X_8) \vee \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

**Решение (табличный метод):**

1). Перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$((X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4)) \cdot ((\overline{X_1 \equiv X_2}) + (\overline{X_3 \equiv X_4})) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6)) \cdot ((\overline{X_3 \equiv X_4}) + (\overline{X_5 \equiv X_6})) = 1$$

...

$$((X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10})) \cdot ((\overline{X_7 \equiv X_8}) + (\overline{X_9 \equiv X_{10}})) = 1$$

2). Раскроем скобки и перепишем систему уравнений в виде

$$(X_1 \equiv X_2) \cdot (\overline{X_3 \equiv X_4}) + (\overline{X_1 \equiv X_2}) \cdot (X_3 \equiv X_4) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_4) \cdot (\overline{X_5 \equiv X_6}) + (\overline{X_3 \equiv X_4}) \cdot (X_5 \equiv X_6) = 1$$

...

$$(X_7 \equiv X_8) \cdot (\overline{X_9 \equiv X_{10}}) + (\overline{X_7 \equiv X_8}) \cdot (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

3). Используя закон исключаящее «ИЛИ», перепишем систему уравнений в виде

$$(X_1 \equiv X_2) \oplus (X_3 \equiv X_4) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_4) \oplus (X_5 \equiv X_6) = 1$$

...

$$(X_7 \equiv X_8) \oplus (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$





4). По таблице истинности находим варианты

$$(X_1 \equiv X_2) \oplus (X_3 \equiv X_4) = 1$$

0	1
1	0

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
0	0	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4). *Количество переменных:*

$X_4$  – получили 8 решений,  $X_6$  – получили 16 решений,  $X_8$  – получим 32 решения,  $X_{10}$  – получим 64 решения.

**Ответ: 64 решения**

...

$$(X_3 \equiv X_4) \oplus (X_5 \equiv X_6) = 1$$

0	1
1	0

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
0	1	0	0	0	1
				1	0
0	1	1	1	0	1
				1	0
1	0	0	0	0	1
				1	0
1	0	1	1	0	1
				1	0
0	0	0	1	0	0
				1	1
0	0	1	0	0	0
				1	1
1	1	0	1	0	0
				1	1
1	1	1	0	0	0
				1	1

## □ **Используемые источники**

**Ссылка на используемый источник при  
подготовке презентации:**

**<http://kpolyakov.narod.ru/download/B15.d>**

**ос**

