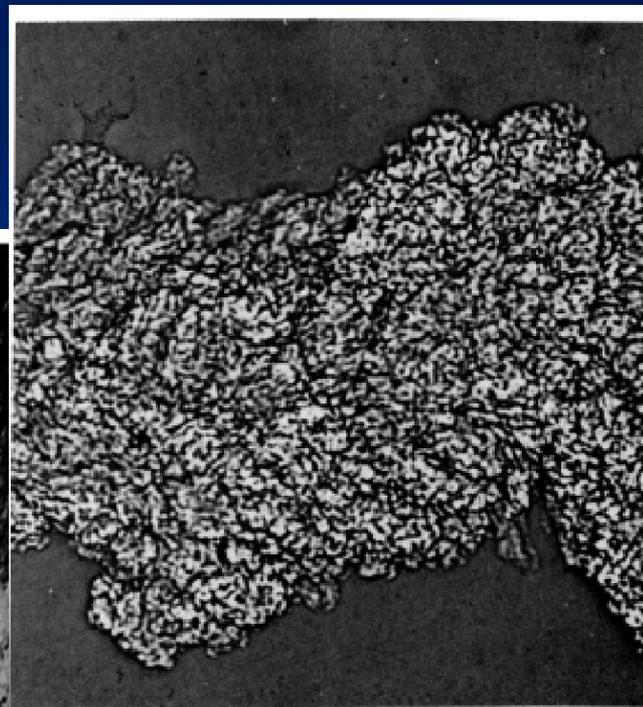


Основы теории турбулентного переноса

Пример: трудности расчета турбулентных потоков (неустойчивость процессов)

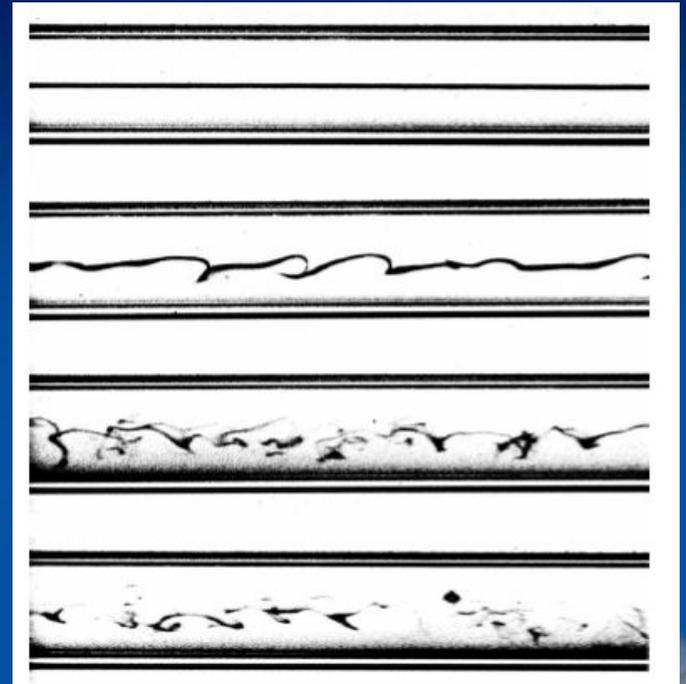
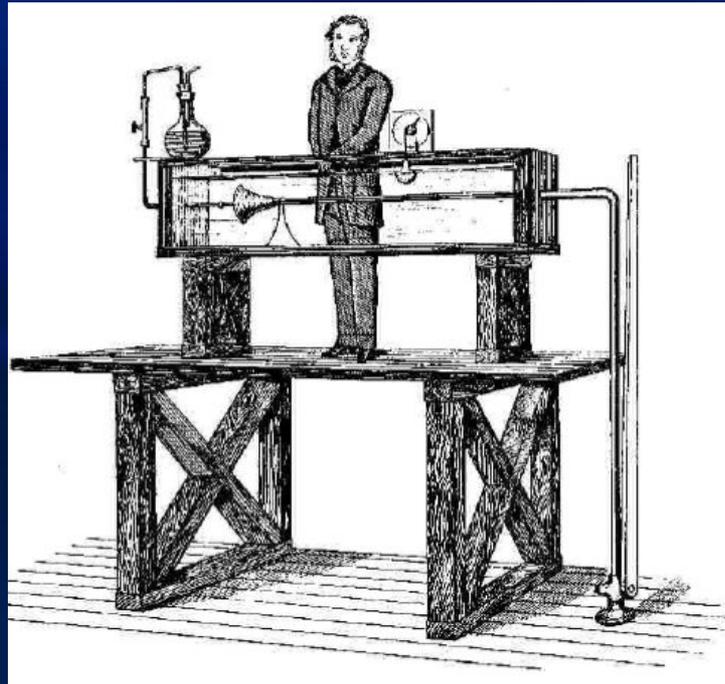


Основы теории турбулентного переноса

Что такое турбулентность ?

Турбулентный поток является сложным **трехмерным нестационарным течением**, характеризующимся хаотичным движением, пульсациями скорости и интенсивным смешением (большие числа Рейнольдса).

Один из первых опытов:
Рейнольдс
(1883)



? Увеличение
вязкости при
переходе к
турбулентному
движению?

Основы теории турбулентного переноса

Характеристики турбулентности (Х.Т.) – турбулентные вихри

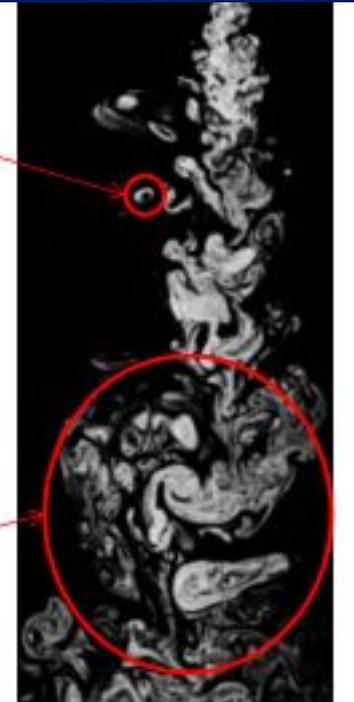
Турбулентность – это совокупность турбулентных вихрей различного размера

- Начиная с некоторого малого размера вихри диссипируют в тепло под воздействием вязкости. Характерный размер минимальных вихрей определяется колмогоровским масштабом

$$\eta_k = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

ε – местная скорость диссипации на единицу массы
 ν – кинематическая вязкость.

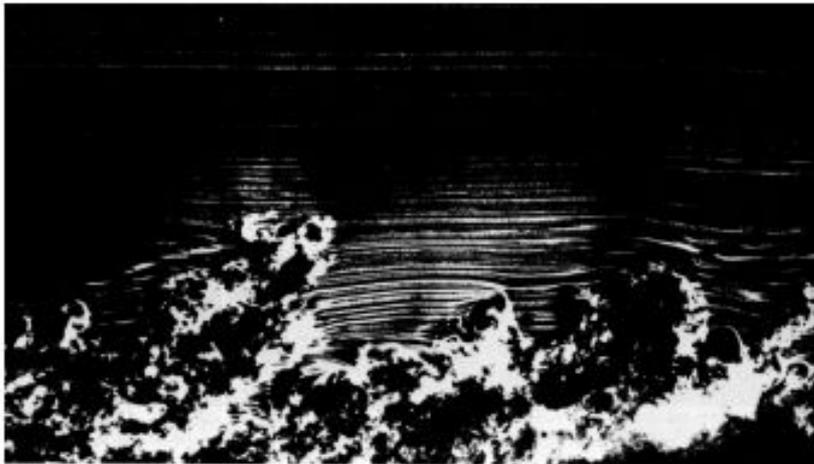
- Максимальный размер турбулентных вихрей, существующих в потоке, имеет порядок характерного линейного масштаба течения



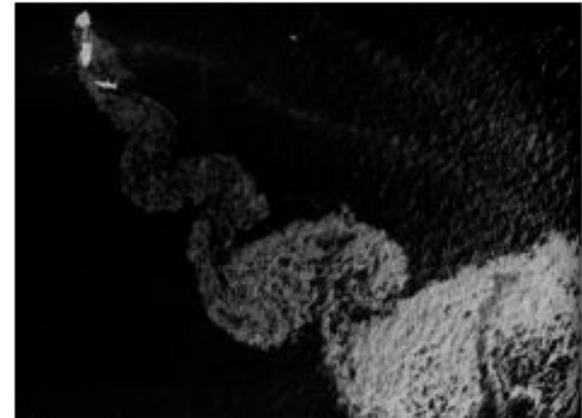
Основы теории турбулентного переноса

Х.Т. – турбулентные вихри

- Каждый вихрь характеризуется «размером» и «временем жизни», которые не могут быть определены точно.
- Вихри, которые переносят наибольшее количество энергии называются «энергонесущими»
 - Понятиями «характерный размер» и «характерное время жизни» вихрей обычно характеризуют средний размер и среднее время жизни «энергонесущих» вихрей
 - ✓ Линейный масштаб турбулентности (теория Прандтля)



Вихри в турбулентном пограничном слое



Вихри в следе
за плохо обтекаемым телом

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – линейный масштаб турбулентности

- Прандтль, основываясь на аналогии молекулярного и турбулентного переноса, ввел понятие “mixing length” l_{mix} (путь смешения или путь перемешивания)
 - Расстояние, которое «турбулентный вихрь» пролетает, не теряя своей идентичности
 - ✓ Аналог длины свободного пробега молекул
- Со временем понятие «путь смешения» было вытеснено понятием «линейный масштаб турбулентности»
 - Размер наиболее типичного (среднего) вихря – «энергонесущего»

Основы теории турбулентного переноса

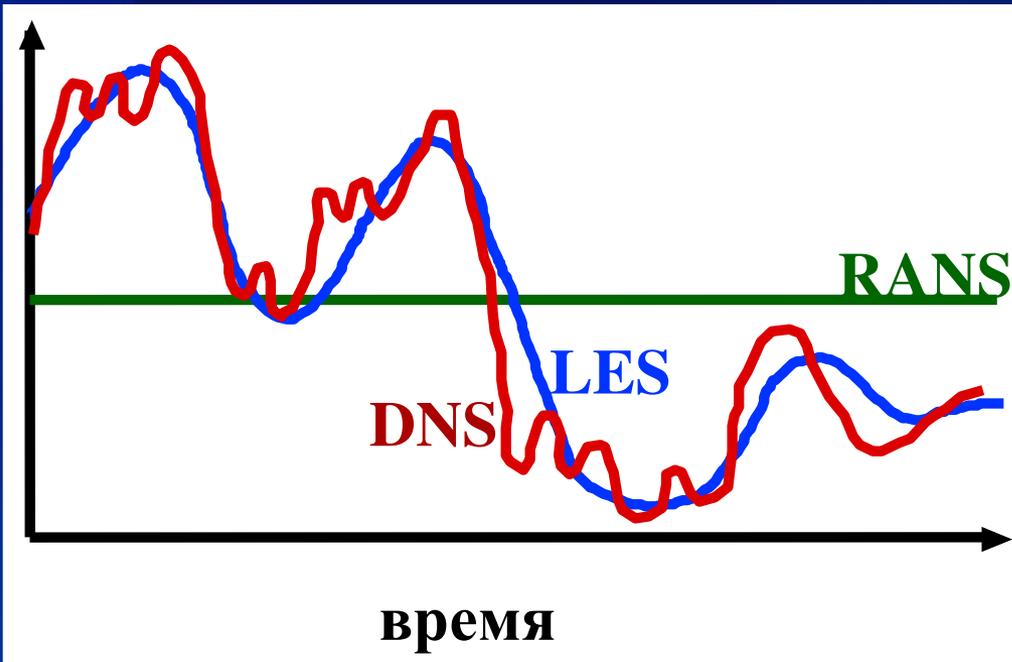
Х. Т. – статистическая теория турбулентности

- Поскольку пульсации газодинамических величин в турбулентном потоке являются случайными величинами, одним из подходов к изучению турбулентности является метод математической статистики
- В рамках статистической теории турбулентности мгновенное поле течения делится на **осредненное** и **пульсационное**

$$u = \bar{u} + u'$$

- Определение осредненного движения зависит от выбранного **способа осреднения**:
 - по ансамблю
 - по времени
 - по пространству
 - по фазе
- **Наиболее корректным (но трудно реализуемым) является осреднение по ансамблю (по реализациям)**
 - Обычно используют другие способы осреднения

Основы теории турбулентного переноса



Изменение рассчитанной турбулентной характеристики в некоторой точке установившегося потока

Метод Рейнольдса (RANS):
разложение турбулентного движения на осредненное и пульсационное

$$U_i = \bar{U}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p',$$
$$T = \bar{T} + t', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Осреднение по достаточно большому промежутку времени

$$\bar{U}_i = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} U_i dt, \quad \bar{u}'_i = 0$$

Основы теории турбулентного переноса

Условия РЕЙНОЛЬДСА

Правила осреднения искомым функций

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}, \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}, \overline{f g} = \overline{f} \overline{g}, \overline{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial q}, \overline{\int f dq} = \int \overline{f} dq$$

$$\overline{U}_i = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} U_i dt$$

Осредненное значение скорости
(математическое ожидание)

$$\overline{u_i'^2} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} (U_i - \overline{U}_i)^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} u_i'^2 dt$$

Дисперсия пульсаций
скорости (второй
статистический момент)

$$\overline{u_i'^n} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} (U_i - \overline{U}_i)^n dt = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} u_i'^n dt$$

n-ый центральный
статистический момент

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – осреднение по времени (по Рейнольдсу)

$$\bar{U}_i = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} U_i dt, \quad \overline{u'_i} = 0$$

- Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции
 - При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ($T = \infty$)
 - В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
 - ✓ В нестационарном случае не всегда возможно подобрать период T такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса

Основы теории турбулентного переноса

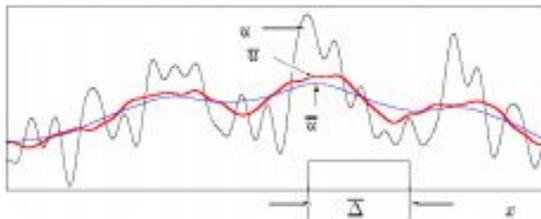
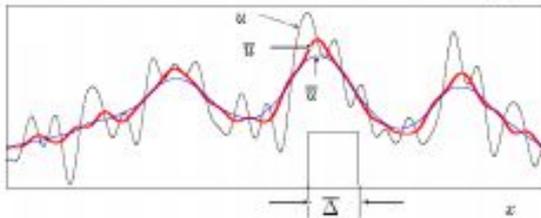
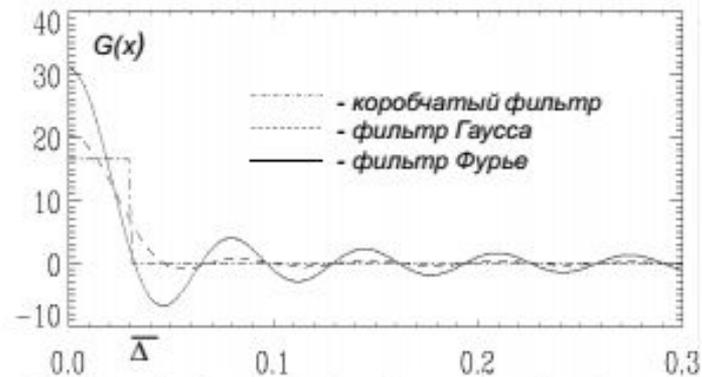
Х. Т. – осреднение по пространству (фильтрация)

$$\bar{f}(r,t) = \int_D G(r-r', \bar{\Delta}) f(r',t) dr'^3$$

D - область решения,
 G - функция фильтра,
 $\bar{\Delta}$ - ширина фильтра.

Условие нормировки $\int_D G(r-r', \bar{\Delta}) dr'^3 = 1$

приводит к $\lim_{\bar{\Delta} \rightarrow 0} \bar{f}(r,t) = \lim_{\bar{\Delta} \rightarrow 0} \int_D G(r-r', \bar{\Delta}) f(r',t) dr'^3 = \int_D \delta(r-r') f(r',t) dr'^3 \equiv f(r,t)$



Для фильтрации $\bar{u} \neq \bar{u}$, $\overline{u'} \neq 0$, $\overline{u'v} \neq \overline{u'v}$

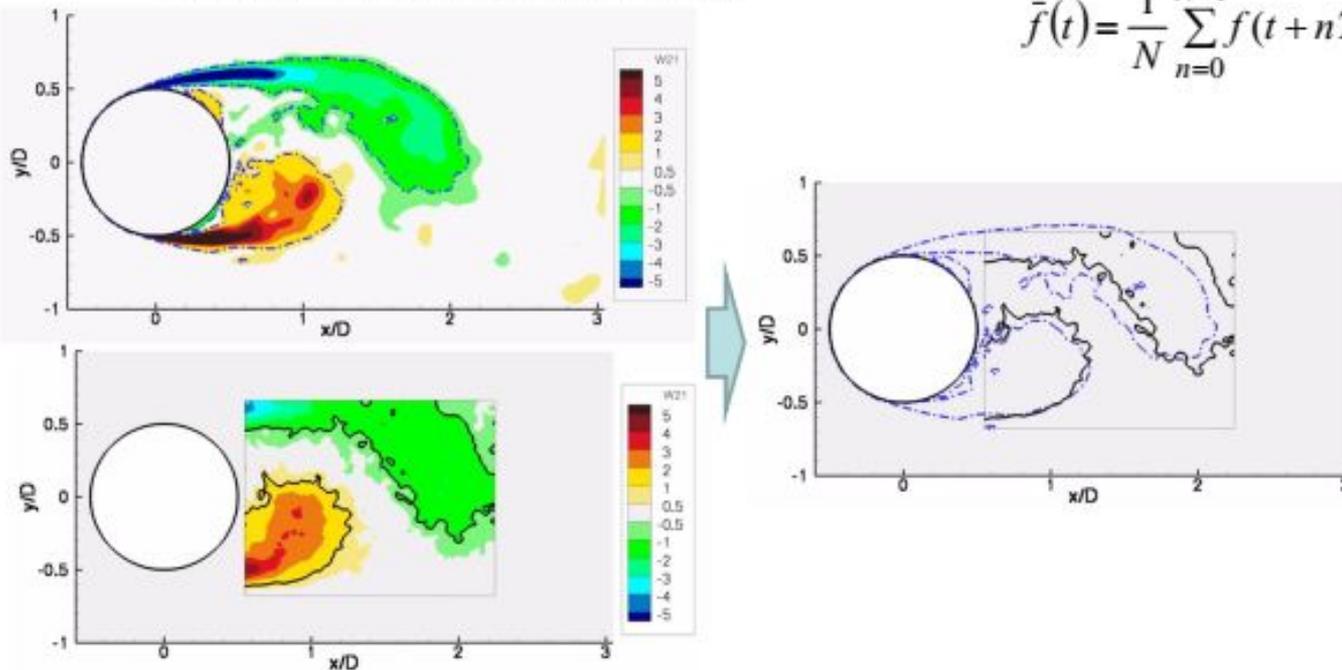
Процедура фильтрации не удовлетворяет условиям Рейнольдса

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – осреднение по фазе

- Применяется в случае периодических течений
 - При отсутствии периода и достаточно большом N совпадает со средним по времени

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t+nT)$$



Сравнение расчетных и экспериментальных осреднённых по фазе характеристик при турбулентном обтекании цилиндра

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – корреляции и автокорреляционные коэффициенты

При выбранном способе осреднения можно определить

- корреляции (статические моменты) $\overline{u'_i u'_j}$
- корреляционные коэффициенты $R_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\sqrt{\overline{u'^2_i}} \sqrt{\overline{u'^2_j}}}$

Применение процедуры осреднения к уравнениям Навье-Стокса позволяет получить систему уравнений для осредненных характеристик вида $\overline{u_i}$.

- RANS - уравнения Рейнольдса (осреднение по времени)
- LES - отфильтрованные уравнения Навье-Стокса (фильтрация)

К сожалению, эти системы уравнений не замкнуты

- Необходимо построение замыкающих соотношений
 - Полуэмпирические модели турбулентности

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – интегральные масштабы турбулентности

Можно определить двухточечные корреляционные коэффициенты. Точки могут быть разнесены

в пространстве
$$R_{ij}^x(\Delta x) = \frac{\overline{u'_i(x)u'_j(x + \Delta x)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(x)}}\sqrt{\overline{u_j'^2(x + \Delta x)}}}$$

во времени
$$R_{ij}^t(\Delta t) = \frac{\overline{u'_i(t)u'_j(x + \Delta t)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(t)}}\sqrt{\overline{u_j'^2(x + \Delta t)}}}$$

На их основе можно определить интегральные масштабы турбулентности

$$\Lambda = \int_0^{\infty} R_{ij}^x(dx)dx \quad T = \int_0^{\infty} R_{ij}^t(dt)dt$$

Такие масштабы используются в теории однородной изотропной турбулентности. При моделировании турбулентности эти масштабы не используются из-за сложности их вычисления.

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – кинетическая энергия турбулентности

Одной из наиболее важных характеристик является кинетическая энергия турбулентности $K_t = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$

Инвариантна (не зависит от выбора системы координат)

- Является инвариантом тензора вторых одноточечных моментов
 - тензор Рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_j}$

Большинство полуэмпирических моделей турбулентности содержат уравнения для определения кинетической энергии турбулентности

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – одномерный энергетический спектр

- Пульсации в точке можно разложить в ряд Фурье

$$u'(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(2\pi f_k t) + b_k \cdot \sin(2\pi f_k t)]$$

где $T = t_1 - t_2$ – используемый временной промежуток,
 $f_k = k/T$ – адресуемый набор частот.

- Коэффициенты ряда Фурье определяются как

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u'(\tau) \cdot \cos(2\pi f_k \cdot \tau) \cdot d\tau, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u'(\tau) \cdot \sin(2\pi f_k \cdot \tau) \cdot d\tau$$

- Амплитуда $B_k = B(f_k) = 2\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ неудобна при рассмотрении сплошных спектров.
 - Зависит от используемого временного промежутка T
- Более удобной величиной является спектральная плотность (одномерный энергетический спектр) $E_1(f_k) = \frac{T}{2} (B(f_k))^2$
 - Интеграл равен дисперсии (среднему квадрату пульсаций - удвоенной кинетической энергии) $\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(f) \cdot df$
 - Можно определить энергию, приходящуюся на интервал частот $[f_1, f_2]$ $E[f_1, f_2] = \frac{1}{2} \int_{f_1}^{f_2} E_1(f) \cdot df$

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – пространственный энергетический спектр

Аналогично можно определить пространственный одномерный спектр

$$u'(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(2\pi\lambda_k x) + b_k \cdot \sin(2\pi\lambda_k x)], \quad L = x_2 - x_1, \quad \lambda_k = \frac{k}{L} - \text{волновое число}$$

$$E_1(f_k) = \frac{T}{2} \left(2\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2 \quad \overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(\lambda) \cdot d\lambda \quad E[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_1(\lambda) \cdot d\lambda$$

На практике обычно используют пространственный **трехмерный энергетический спектр** $E(k)$, k – волновое число

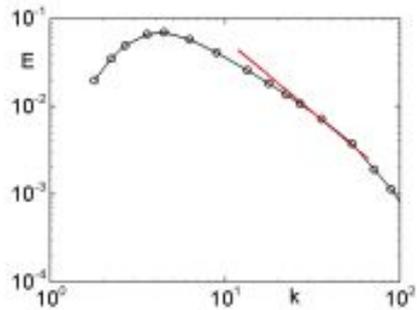
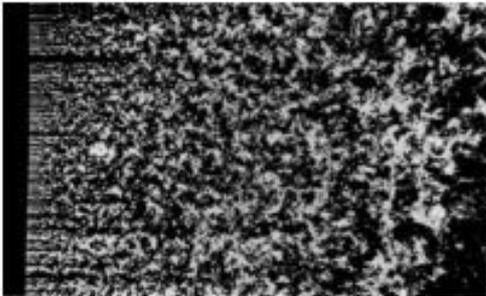
- Для его вычисления необходимо трехмерное преобразование Фурье
- Интеграл равен кинетической энергии турбулентности $K_t = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk$
- Можно определить долю энергии турбулентных вихрей заданного

размера $[l_1, l_2]$ $K_t[l_1, l_2] = \int_{k_2}^{k_1} E(k) \cdot dk, \quad k_1 = \frac{1}{l_1}, \quad k_2 = \frac{1}{l_2}$

Основы теории турбулентного переноса

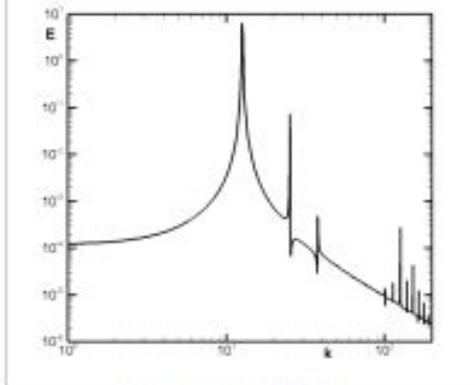
Х. Т. – типы энергетических спектров

Сплошной



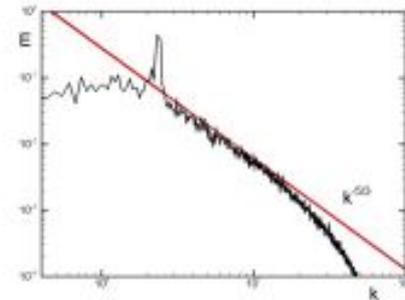
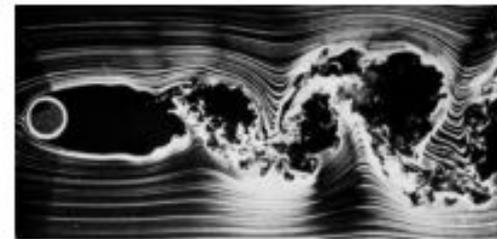
вырождение
однородной
изотропной
турбулентности

Линейчатый



ламинарное
обтекание
цилиндра

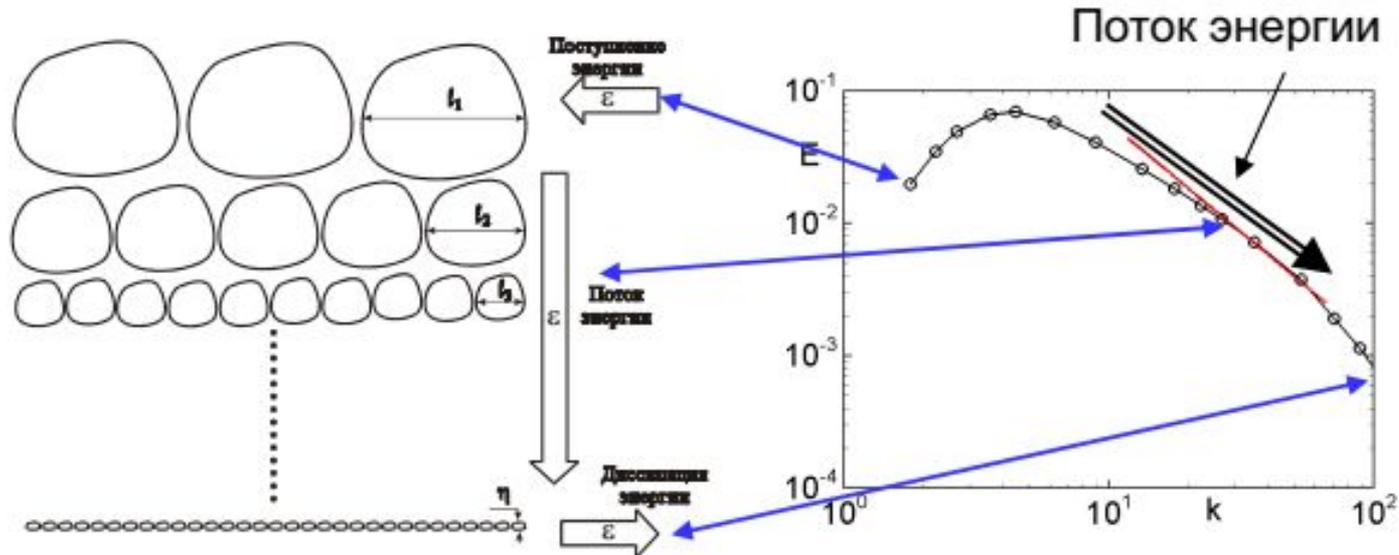
Смешанный



турбулентное
обтекание
цилиндра

Основы теории турбулентного переноса

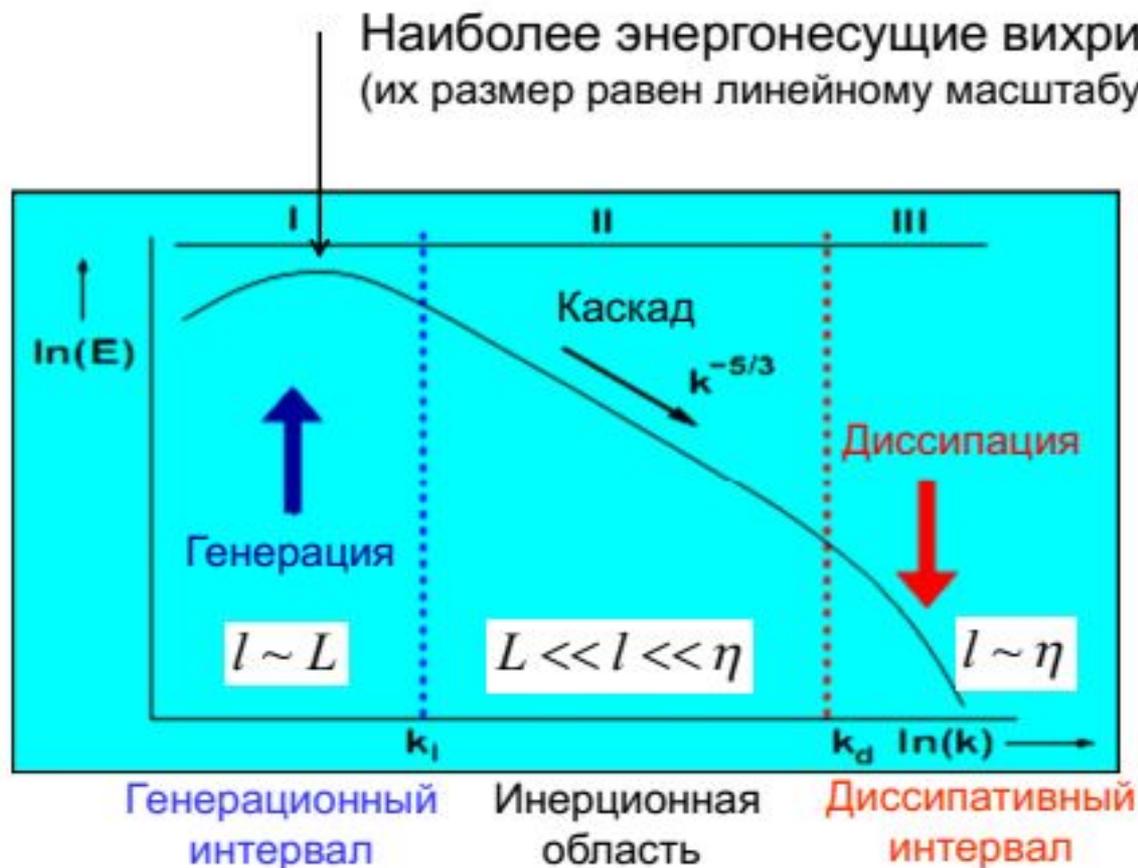
Х. Т. – каскадный перенос энергии



- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям (“каскадный перенос”)
- Наиболее мелкие (колмогоровские) вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – области энергетического спектра



$$\eta = 1/k_D = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

η - масштаб Колмогорова

ε - скорость диссипации энергии

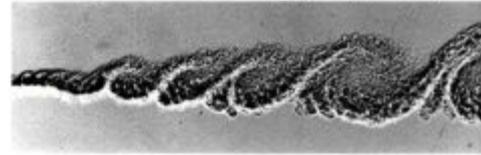
L - характерный размер задачи

Основы теории турбулентного переноса

Х. Т. – двумерные вихри

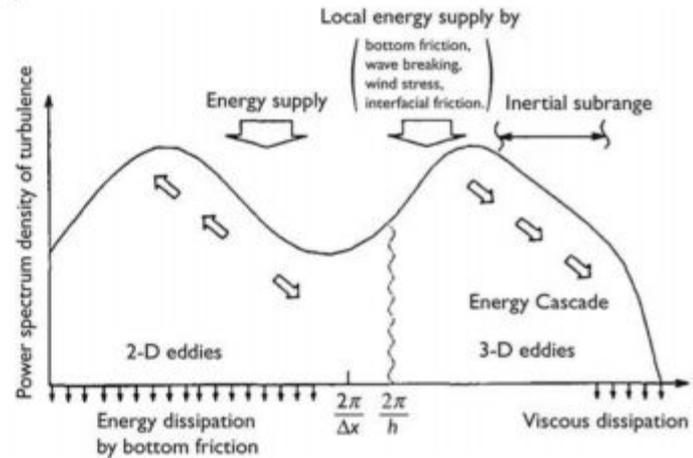
- В некоторых случаях в течении появляются упорядоченные двумерные вихри (часто называемые «когерентные структуры»)

- Дорожка Кармана
- Сворачивание слоя смешения →
- ...



- Для этих вихрей характерны другие законы развития
 - Не «каскадный перенос энергии»!

- ✓ Часто энергия передается от мелких вихрей к крупным – «vortex pairing»



Основы теории турбулентного переноса

Промежуточные выводы

- Турбулентность – сложное явление и для его описания используются различные подходы
- Турбулентность можно рассматривать как совокупность вихрей различного размера, от колмогоровского масштаба до когерентных структур
- Все переменные в турбулентном потоке можно разделить на осредненную и пульсационную составляющие
- Турбулентные пульсации как случайные величины рассматриваются в рамках статистической теории турбулентности, дисперсия характеризует их интенсивность
- Энергетический спектр характеризует распределение энергии по волновым числам
- Процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким играет фундаментальную роль и называется каскадный перенос энергии

Основы теории турбулентного переноса

Уравнения Навье-Стокса - универсальные для турбулентных и ламинарных потоков

Уравнение
неразрывности
Уравнения
движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \text{div} U \right] + F_i$$

Прямое численное моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса возможно



Но отношение между максимальным и минимальными масштабами явлений в турбулентном потоке

$$L/l_k \sim Re^{3/4}$$

Колмогоровский масштаб l_k - минимальный масштаб вихрей

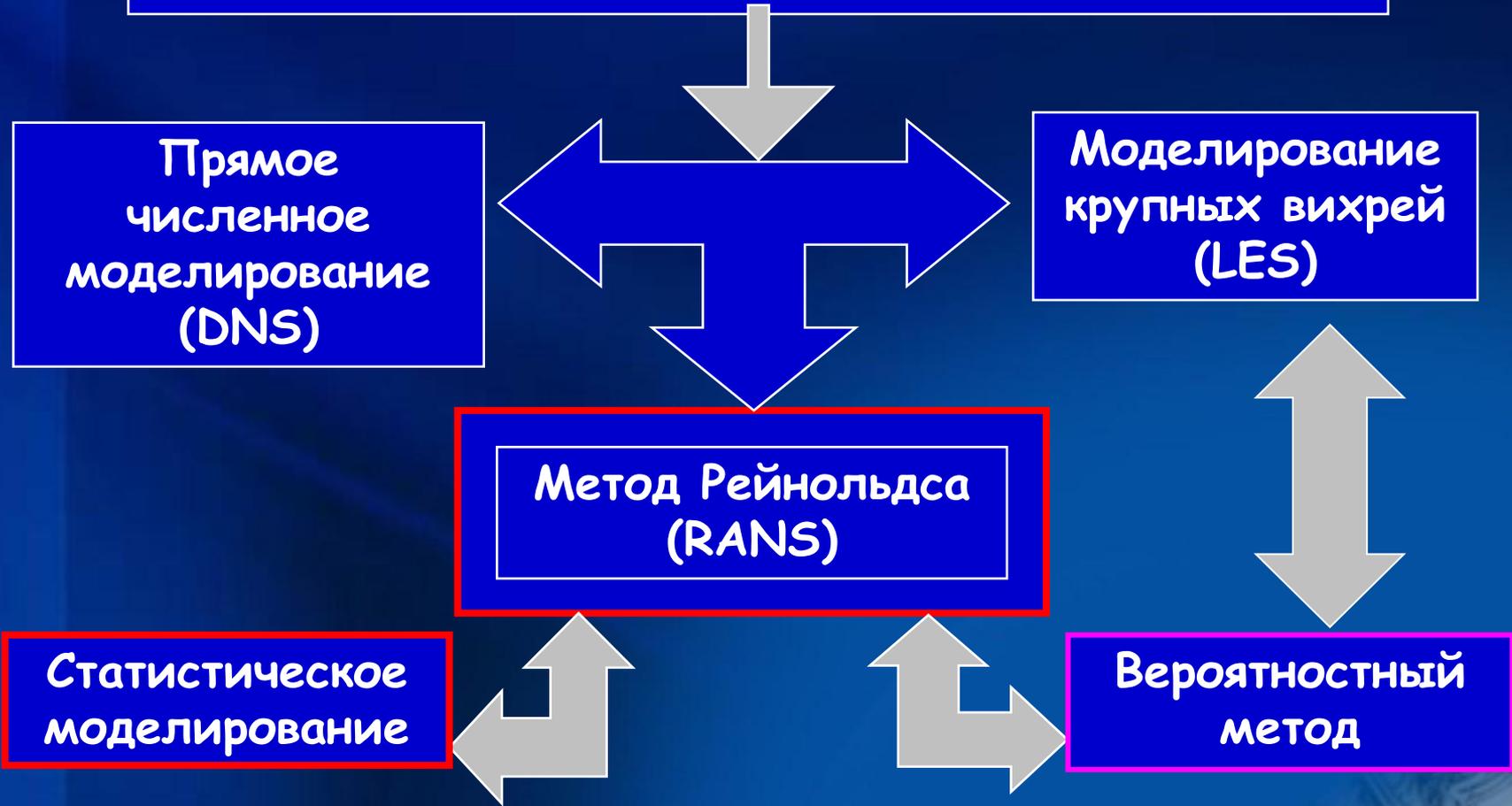
Пример для вычислителей: Количество узлов вычислительной сетки для полного разрешения зависит от числа Рейнольдса (обычно $Re > 10^4$)

$$N_G \sim Re^{9/4}$$



Основы теории турбулентного переноса

Подходы к моделированию турбулентных потоков



Основы теории турбулентного переноса

МЕТОД РЕЙНОЛЬДСА (RANS)

Анализ турбулентного движения проводится на основе уравнений Навье-Стокса: посредством подстановки действительных значений скорости, давления, плотности и проведения осреднения по правилам получают уравнения осредненного движения (**уравнения Рейнольдса**)

Пример: стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости

$$\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} = 0$$

$$\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial y} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Основы теории турбулентного переноса

МЕТОД РЕЙНОЛЬДСА (RANS)

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

$$\tau_{ij} = -\bar{p} + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j}$$

Новые слагаемые – дополнительные напряжения поверхностных сил, возникающих из-за наличия турбулентности (**турбулентные напряжения, составляющие тензор**). Они причина дополнительной вязкости в потоке и являются неизвестными параметрами!!!!.

Для замкнутости уравнений Рейнольдса необходимо ввести дополнительные шесть уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений, но мы СНОВА получим систему незамкнутых уравнений содержащих величины типа:

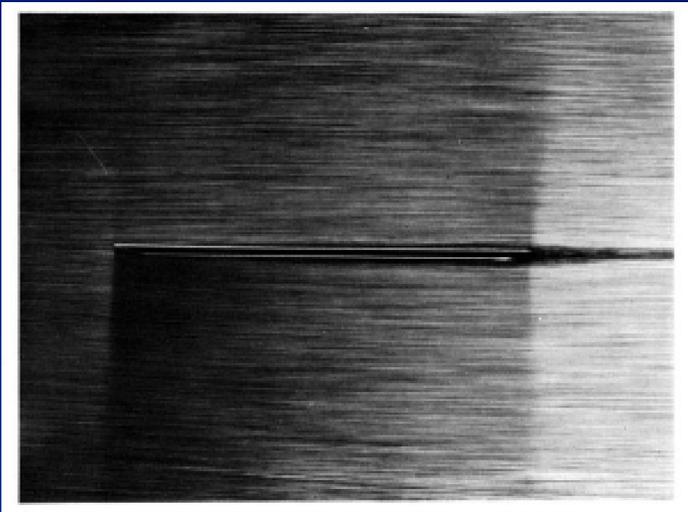
$$\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} \dots \overline{\rho u'_i u'_j u'_k p'}$$

и т.д. **!!!ПРОБЛЕМА ТУРБУЛЕНТНОСТИ!!!**

Основы теории турбулентного переноса

Влияние турбулентности на пристеночные течения

1. Рассмотрим установившееся ламинарное течение вдоль безграничной пластины (скорость зависит только от координаты y , давление можно считать постоянным)



Уравнения Навье-Стокса вырождаются в

$$\frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \text{const} = \tau_{\text{wall}}$$

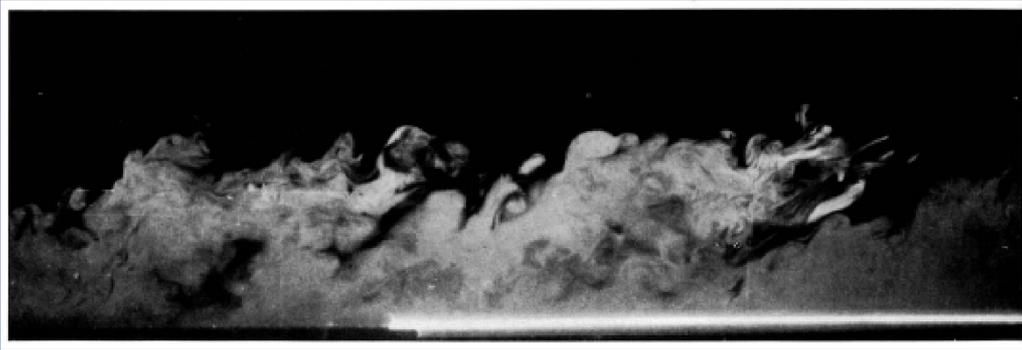
$$U_x = \frac{\tau_{\text{wall}}}{\mu} y + C_1$$

Следствие: Для ламинарного потока вдоль безграничной пластины имеет место линейное распределение скорости ($C_1=0$ т.к. при $y=0$ $U_x=0$)

Основы теории турбулентного переноса

Влияние турбулентности на пристеночные течения

2. Рассмотрим установившееся турбулентное течение вдоль безграничной пластины (скорость зависит только от координаты y , давление можно считать постоянным)



Уравнения Рейнольдса
вырождаются в

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial U_x}{\partial y} + (-\rho u'_x u'_y) \right] = 0$$

Условие на стенке: при $y = 0$ пульсации скорости нулевые, поэтому и напряжения нулевые

$$C_2 = \tau_{wall} = \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \longrightarrow \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} + \bar{\tau}_{xy} = \tau_{wall}$$

$$\longleftarrow \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} + \bar{\tau}_{xy} = C_2$$

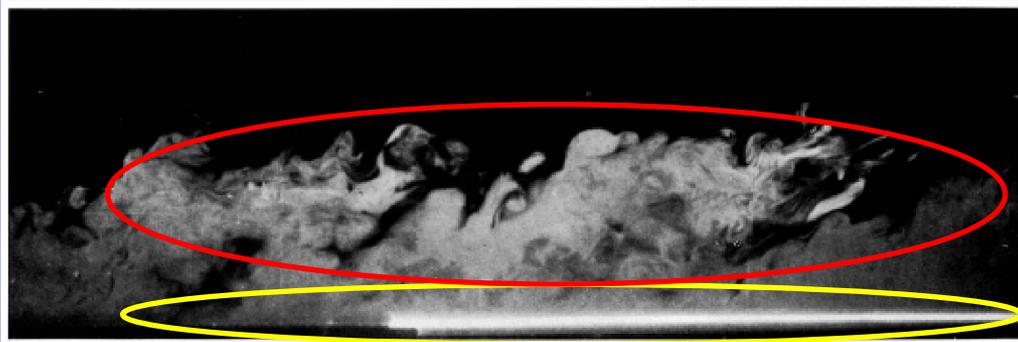
Следствие: 1 слагаемое: **вязкое трение** имеет значительную величину вблизи стенки и убывает с увеличением расстояния

2 слагаемое: **турбулентное трение** мало у стенки, но возрастает при удалении от пластины

Основы теории турбулентного переноса

Влияние турбулентности на пристеночные течения

Область вблизи стенки, в которой вязкое трение преобладает, называется **ламинарным подслоем** и для него справедлив закон распределения скоростей аналогичный ламинарному движению



$$\mu \frac{\partial U_x}{\partial y} + \bar{\tau}_{xy} = \tau_{wall}$$

Рассмотрим область, где **вязкое трение мало**

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{wall}$$

Последняя формула непрактична, т.к. ничего не известно о связи пульсаций скорости с осредненным движением

По аналогии между вязким трением и турбулентным и по анализу размерностей

$$\bar{\tau}_{xy} = f\left(\frac{dU_x}{dy}\right) \Rightarrow \bar{\tau}_{xy} = \kappa^2 \rho^a \left(\frac{dU_x}{dy}\right)^b y^c \Rightarrow \bar{\tau}_{xy} = \kappa^2 \rho \left(\frac{dU_x}{dy}\right)^2 y^2 = \tau_{wall}$$

$$U_x = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}} \ln y + C_3$$

Логарифмический закон скоростей при турбулентном движении у стенки (**формула Прандтля**)

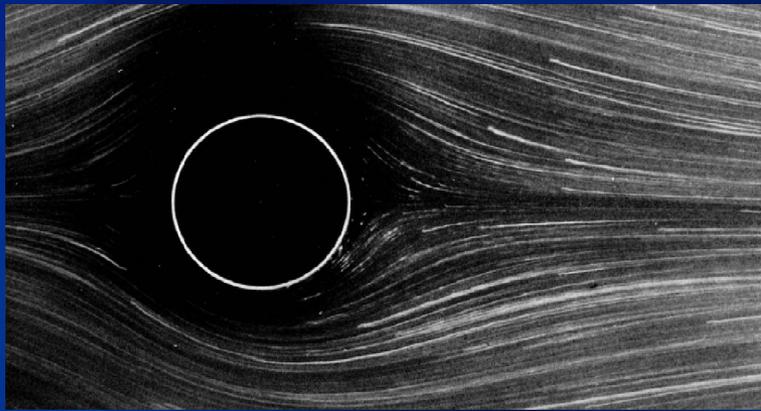
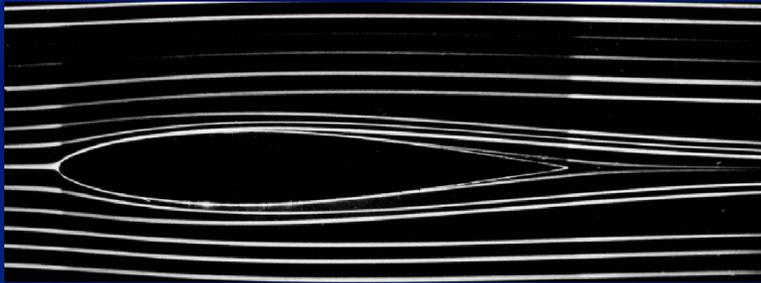
$$U_x = A \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}} \ln \frac{\rho y}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}} + B$$

Закон Кармана с учетом ламинарного подслоя (для трубы $A=5.75$, $B=5.5$)

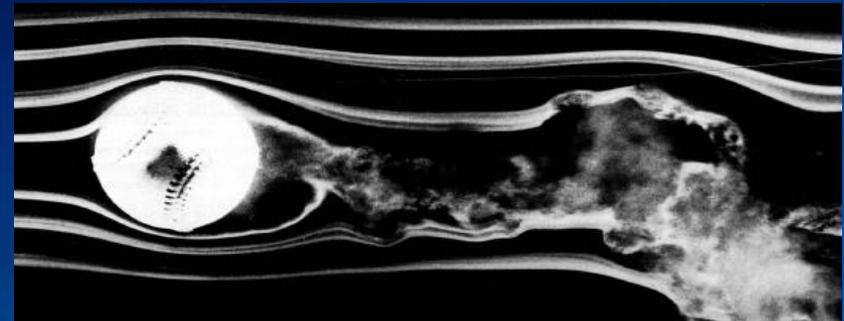
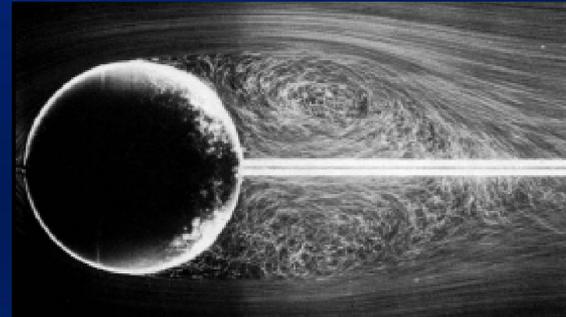


Обтекание тел потоком жидкости или газа.

Ламинарное обтекание



Турбулентное обтекание



Реальные жидкости или газы при обтекании тела из-за **наличия вязкости** проявляют свойство прилипания к поверхности тела (**скорость на поверхности $U = 0$**). При удалении от тела скорость увеличивается и на некотором расстоянии становится близкой к **скорости набегающего потока U_{∞}** (можно считать средой идеальной)

Основы теории турбулентного переноса

МЕТОД РЕЙНОЛЬДСА (RANS)

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

$$\tau_{ij} = -\bar{p} + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j}$$

Новые слагаемые – дополнительные напряжения поверхностных сил, возникающих из-за наличия турбулентности (**турбулентные напряжения, составляющие тензор**). Они причина дополнительной вязкости в потоке и являются неизвестными параметрами!!!!.

Для замкнутости уравнений Рейнольдса необходимо ввести дополнительные шесть уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений, но мы СНОВА получим систему незамкнутых уравнений содержащих величины типа:

$$\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} \dots \overline{\rho u'_i u'_j u'_k p'}$$

и т.д. **!!!ПРОБЛЕМА ТУРБУЛЕНТНОСТИ!!!**

Основы теории турбулентного переноса

МЕТОД РЕЙНОЛЬДСА (RANS)

ЗАМЫКАНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ: по аналогии с законом вязкого трения вводится понятие турбулентной вязкости μ_t и записывается связь турбулентных напряжений с осредненными параметрами потока

$$\bar{\tau}_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k$$

$\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$ **формула Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости**

C_μ - константа модели ($C_\mu \approx 0.09$ по результатам опытов в струях, для течений около стенки)

k – кинетическая энергия турбулентности,

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

ε - диссипация кинетической энергии

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

Основы теории турбулентного переноса

Проблема нахождения турбулентной вязкости μ_t \rightarrow к проблеме определения кинетической энергии и ее диссипации

Перечень основных моделей:

Алгебраические модели (модель пути смешения Прандтля для одномерного течения)

$$\mu_t = \rho l_{mix} \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

Модели с 1 уравнением (модель Колмогорова для кинетической энергии, модель Спаларта-Альмареса для эффективной вязкости)

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{D\rho} \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

Модели с двумя уравнениями (к-ε модель, к-ω модель и т.д.)

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$



Модели для Рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

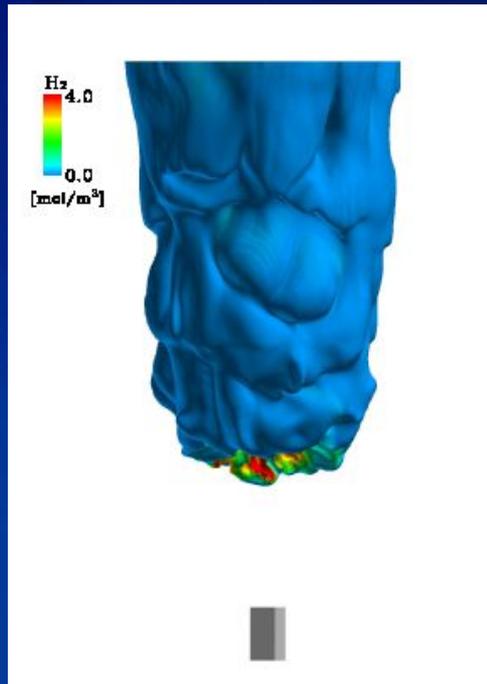
Основы теории турбулентного переноса

Разрешение потока:

$$10^{-6} \text{ m} < \eta_k < 10^{-4} \text{ m}$$

Для 1 см³ модельной области

$$10^6 < N < 10^{12}$$



Re_λ

Memory

Speed

Year

70	50 Gbytes	50 Gflops	1993
300	50 Tbytes	50 Tflops	2002
1500	50 Pbytes	50 Pflops	2015

Литература

1. Лойцянский Л. Г. **Механика жидкости и газа.** М.: Наука, 1970. 904 с.
2. Монин А. С., Яглом А. М. **Статистическая гидромеханика.** М.: Наука, 1967.
3. Повх И. Л. **Техническая гидромеханика.** Л.: Машиностроение, 1969. 524 с.
4. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. **Гидродинамика.** М.: Наука, 1988. 736 с.
5. Кутателадзе С.С. **Анализ подобия и физические модели.** Новосибирск: Наука, 1986.
6. Шлихтинг Г. **Теория пограничного слоя.** М.: Наука, 1974.