

# Применение интеграла по фигуре от скалярной функции в механике

# Вычисление массы материальной фигуры.

- - стержень, совпадающий с отрезком интегрирования, тогда

$$M = \int_a^b \rho(x) dx$$

- - дуга линии  $(L)$ , тогда

$$M = \int_{(L)} \rho(P) dl;$$

- - плоская область  $(D)$ , тогда

$$M \stackrel{(*)}{=} \iint_{(D)} \rho(P) ds;$$

- - поверхность  $(Q)$ , тогда

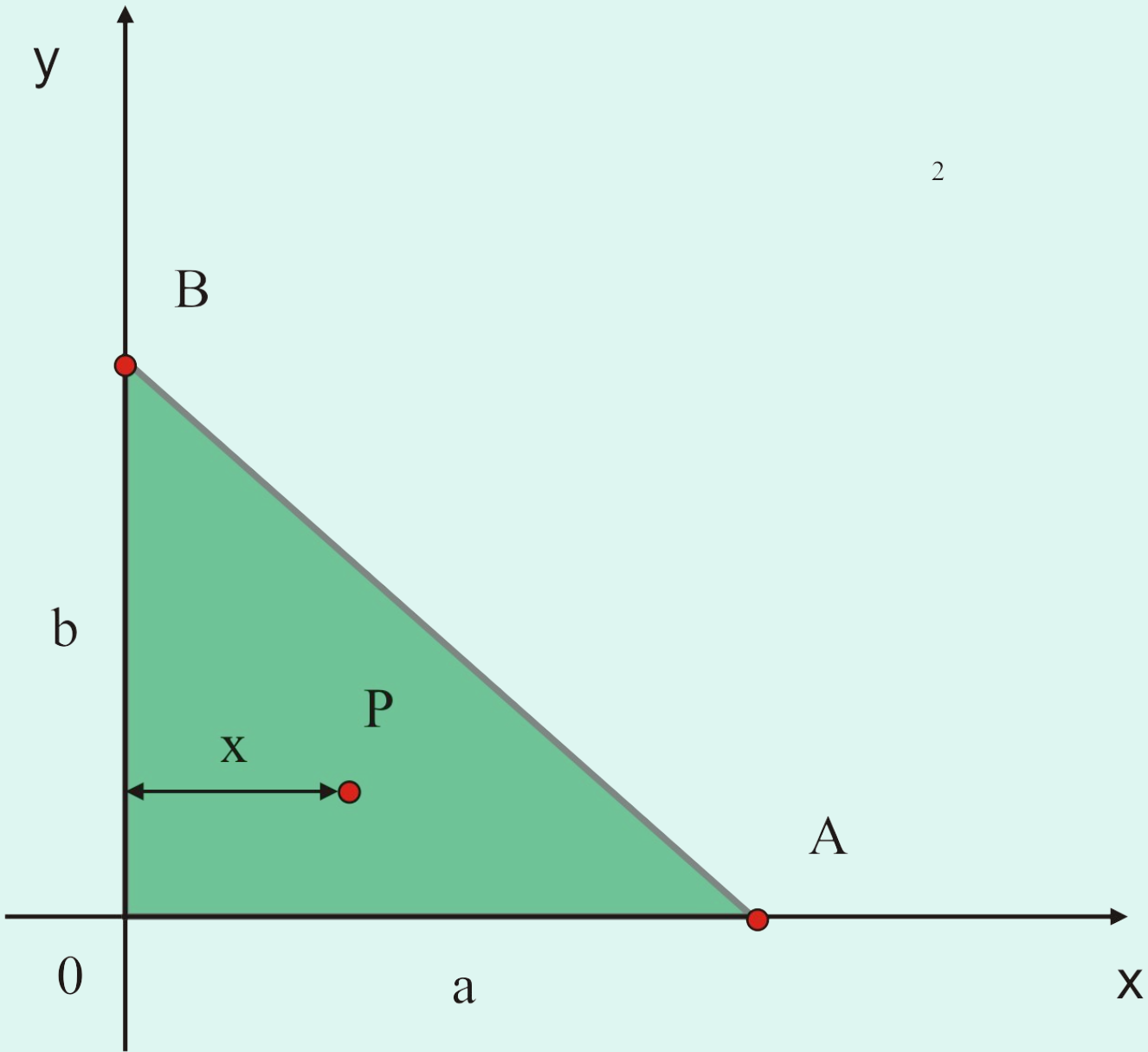
$$M = \iint_{(Q)} \rho(P) dq;$$

- - пространственная область (тело)  $(V)$ , тогда

$$M = \iiint_{(V)} \rho(P) dv$$

# Пример

Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами  $OA=a$ ,  $OB=b$ , если плотность в любой точке  $P$  равна расстоянию от точки  $P$  до катета  $OB$ .



Решаем задачу с применением формулы (\*), при этом  $\rho(P) = \rho(x, y) = x$ .

Уравнение прямой АВ в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}(a - x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} M &= \iint_{(D)} \rho(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} x dy = \int_0^a x(y) \Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx = \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a x(a-x) dx = \frac{b}{a} \left( a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2 b}{6}; \end{aligned}$$

# Вычисление статических моментов.

Определение 1 *Статическим моментом* материальной точки относительно прямой (точки, плоскости) называется произведение ее массы на расстояние от точки до прямой (точки, плоскости).

- **Определение 2** *Статическими моментами плоской системы  $n$*

*материальных точек относительно осей декартовой прямоугольной системы координат называются выражения:*

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i,$$

*где  $m_i$  - сосредоточенные в точках массы;  $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$  - абсциссы и ординаты соответствующих точек.*



# Определение 3

*Статическими моментами  $M_x$  и  $M_y$  плоской фигуры относительно осей декартовой прямоугольной системы координат называются выражения:*

$$M_x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \rho(P_i) \Delta\mu_i = \int_{(\Phi)} y \rho(P) d\mu,$$

$$M_y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \rho(P_i) \Delta\mu_i = \int_{(\Phi)} x \rho(P) d\mu.$$

*при условии, что указанные пределы существуют и не зависят от способа построения интегральной суммы*

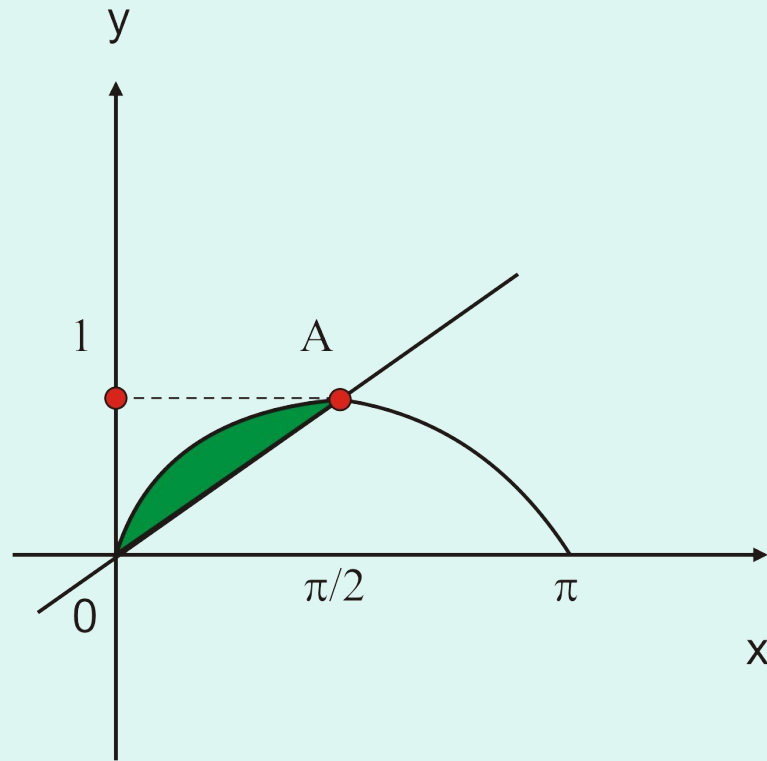
# Пример

Найти статический момент относительно оси  $Ox$  однородной фигуры, ограниченной синусоидой  $y = \sin x$ , и прямой  $OA$ , проходящей через начало координат и точку  $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$  синусоиды.

Для определения воспользуемся формулой

$$M_x = \iint_{(D)} y\rho(x, y) dx dy,$$

уравнение прямой  $OA$  имеет вид  $y = \frac{2x}{\pi}$



$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_{(D)} y\rho(x, y) dx dy = \rho \int_0^{\pi/2} dx \int_{2x/\pi}^{\sin x} y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^{\pi/2} \left( \sin^2 x - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{4}{\pi^2} x^2 \right) dx = \frac{1}{8} \rho \left( \pi - \frac{2}{3} \pi \right) = \frac{\pi}{24} \rho
 \end{aligned}$$

# Координаты центра масс материальной фигуры

- Для плоской фигуры  $Mx_c = M_y, My_c = M_x$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}$$

- для пространственной фигуры

$$Mx_c = M_{yz}, My_c = M_{xz}, Mz_c = M_{yx}$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad z_c = \frac{M_{yx}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} z\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}$$

# Пример

Найти центр масс однородного  
цилиндрического тела, ограниченного  
поверхностями

$$z = x^2 + y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 1$$



Вследствие симметрии  $x_c = y_c = 0$ ,

$$z_c = \frac{\iiint_{(V)} z dv}{\iiint_{(V)} dv}$$

Вычислим тройные интегралы в цилиндрической системе координат.

$$z = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow z = r^2 + 1, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

Для области  $(V)$  имеем  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r^2 + 1$

$$\iiint_{(V)} z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{r^2+1} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(r^2 + 1)^2 dr = \frac{7}{6} \pi;$$

$$\iiint_{(V)} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{r^2+1} dz = \frac{3}{2} \pi; \quad z_c = \frac{7}{9}, \quad C\left(0, 0, \frac{7}{9}\right)$$

# Моменты инерции

**Определение** Моментом инерции  $I_0$  материальной точки массой  $m$  относительно начала координат (относительно оси  $Ox$  -  $I_x$ , относительно плоскости  $Oxy$  -  $I_{xy}$ ) называется произведение массы точки на квадрат расстояния до начала координат (соответственно оси  $Ox$ , плоскости  $Oxy$ )

$$I_0 = md^2, \quad I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_{xy} = mz^2$$



момент инерции плоской пластины (D)  
относительно координатных осей  
прямоугольной декартовой системы  
координат вычисляются по формулам

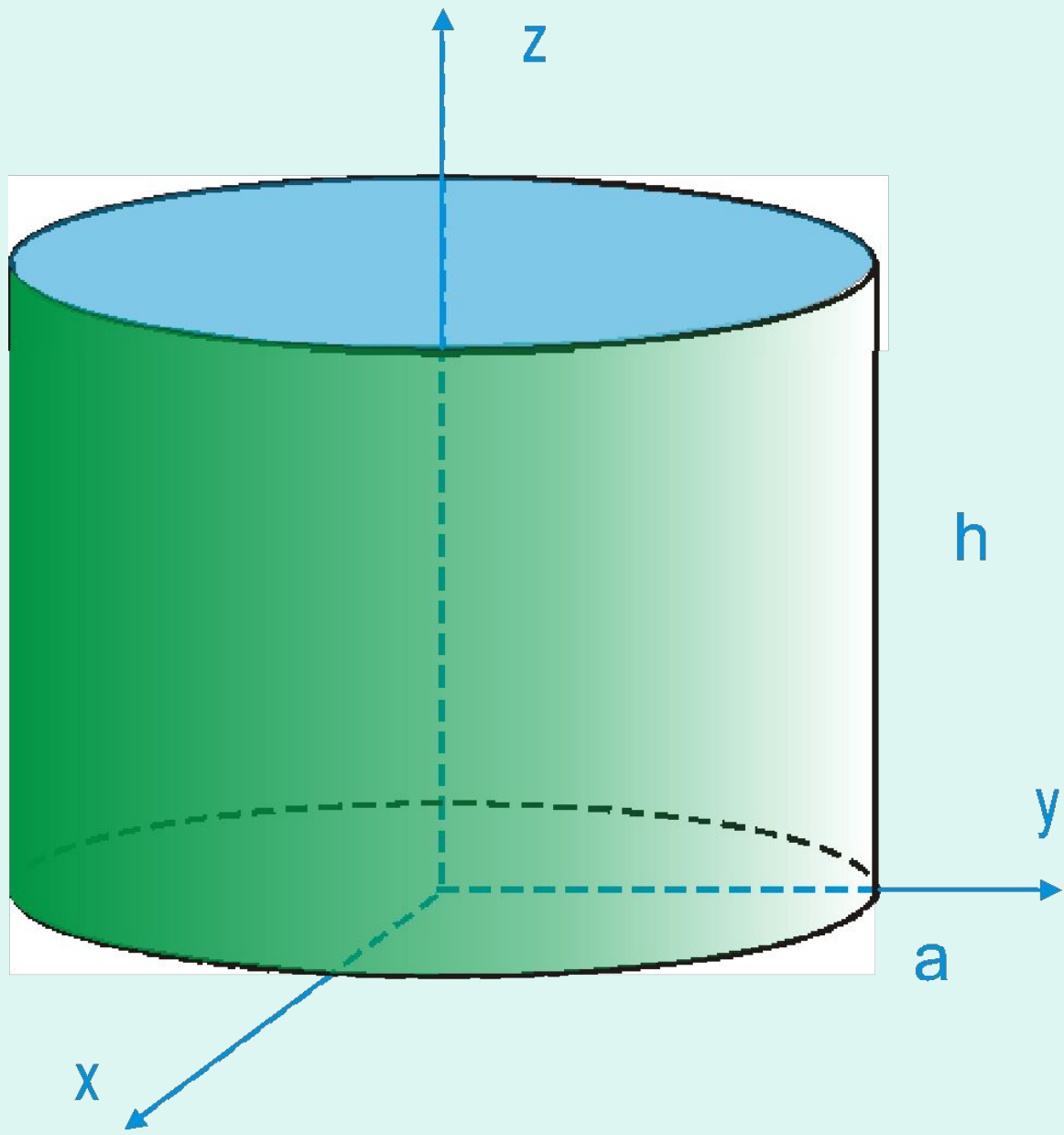
$$I_x = \int_{(\Phi)} y^2 \rho(P) d\mu = \iint_{(D)} y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_{(D)} x^2 \rho(x, y) dx dy$$

## Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей

$$I_{xy} = \int_{(\Phi)} z^2 \rho(P) d\mu = \iiint_{(V)} z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

# Пример

Найти момент инерции кругового цилиндра ,  
высота которого  $h$  и радиуса  $a$   
относительно оси,  
служащей диаметром основания  
цилиндра .



Вычисления проведем в цилиндрических координатах, при этом уравнение цилиндра примет вид  $r = a$

Пределы интегрирования

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \left( r^2 h \sin^2 \varphi + \frac{h^3}{3} \right) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^4}{4} h \sin^2 \varphi + \frac{h^3}{3} \frac{a^2}{2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{ha^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi + \frac{h^3 a^2}{3} \pi = \pi ha^2 \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$