



*ГБОУ лицей-интернат  
Центр одаренных детей*

# Программа элективного курса по алгебре «Геометрические места точек» для 9 класса в рамках предпрофильной подготовки



**математики**

**Каткова Галина Геннадьевна- учитель**

**Образование – высшее, педагогический стаж-29лет,  
Квалификационная категория -высшая**



## Пояснительная записка



**Ведущее место математического образования** определяется:

- практической значимостью математики,
- ее возможностями в развитии и формировании мышления человека,
- развитием творческих способностей.

**Актуальным остается вопрос дифференциации обучения математике**

- позволяющий обеспечить базовую подготовку,
- удовлетворить потребности каждого, кто проявляет интерес и способности к предмету,
- ориентировать на выбор профессии, связанной с математикой.

**Данный курс направлен:**

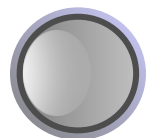
- на расширение знаний,
- повышение уровня математической подготовки через решение большого класса задач.

**Модуль и его свойства**

таят в себе большую содержательность, глубину, умелое обыгрывание которых позволяет рационально и остроумно решать спектр задач, побуждает учащихся к самостоятельности и творчеству .

**Курс предназначен** для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений, реализующих предпрофильную подготовку.

# Цели курса



**Помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в таких вопросах, как :**



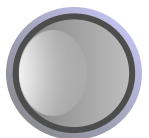
**построение графиков функций, удовлетворяющих заданному условию**



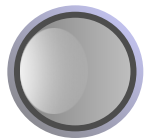
**преобразование выражений, содержащих модуль**



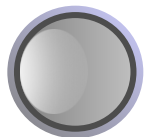
**решение уравнений, неравенств и систем графическим методом**



**Развивать математические способности учащихся**

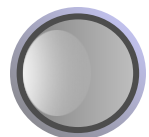


**Продолжить формирование умений логически мыслить и отыскивать математические закономерности**

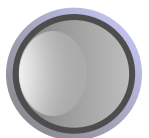


**Помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы**

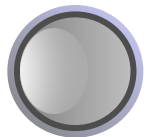
# Задачи курса



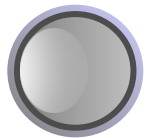
Научить учащихся навыкам построения графиков с модулем и проведению преобразований с помощью изученных методов



Научить строить геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют условию  $F(x)=0$ ,  $F(x)\leq 0$ ,  $F(x)\geq 0$



Вовлечь учащихся в проектировочную деятельность



Помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы

# Тематическое планирование

№	Наименование тем курса	Всего часов	Лекция	Практика	Семинар
1	ГМТ. Определение, общие понятия	1	0,5	0,5	
2	Геометрические преобразования графиков функций, содержащих модуль.	2	1	1	
3	Построение ГМТ, заданных уравнениями	2	1	1	
4	Построение ГМТ, заданных системами неравенств.	2		1	1
5	Задачи на нахождение площадей фигур.	1		1	
6	Модуль в заданиях единого государственного экзамена	1			1
7	Заключительное занятие: представление своих работ учащимися.	2			2

## В результате изучения курса учащиеся

### *Должны знать:*

- -правило раскрытия модуля,
- -план построения графиков основных видов функций.

### *Должны уметь:*

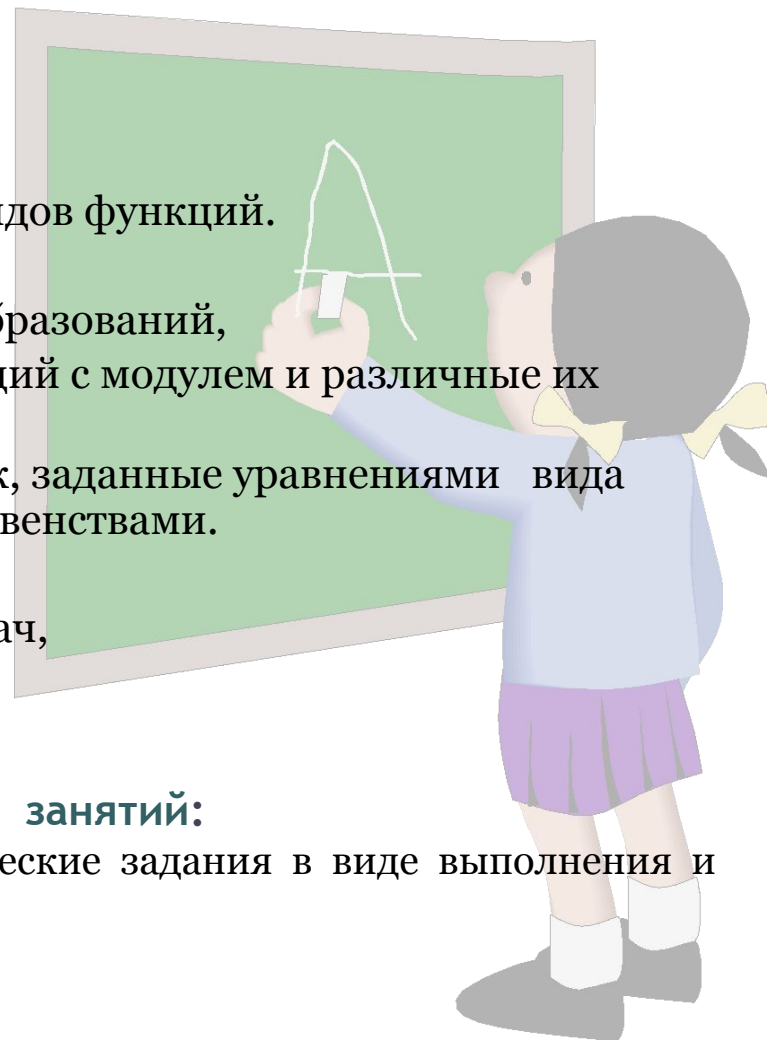
- -применять метод геометрических преобразований,
- -строить графики основных видов функций с модулем и различные их комбинации,
- -изображать геометрические места точек, заданные уравнениями вида  $|x| + |y| = n$ ,  $|x+a| = c$ ,  $|y-b| = c$  и неравенствами.
- ***Оценивать свои результаты:***
- проверка самостоятельно решенных задач,
- защита проектов.

### **Основные формы организации учебных занятий:**

лекция , практическая работа, семинар, творческие задания в виде выполнения и защиты проектов.

### **Методы обучения:**

проблемный, метод проектов.



## Содержание курса .

### Тема 1. Геометрические места точек. Определение. Общие понятия.

#### ГМТ, заданные неравенствами(1 ч)

**Цели:** Постановка задач курса, проверка владения базовыми умениями. Научить изображать ГМТ, заданные неравенствами.

**Методы обучения:** лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений

**Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество, в которое входят все те и только те точки, которые обладают этим свойством.**

Все графики функций  $y = f(x)$ , которые изучались до сих пор можно рассматривать как ГМТ, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Таким образом построение геометрических мест точек, координаты которых удовлетворяют какому – либо соотношению, является задачей более общей, чем построение графиков функций.

*Графический способ – один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.*

Упражнение 1. Построить ГМТ, координаты которых удовлетворяют неравенствам :

а)  $x < 3$ ;                      б)  $y \geq -4$ ;                      в)  $x < -5$ ;                      г)  $0 < x < 1$ ;                      д)  $-2 < y < 3$ .

Упражнение 2. Построить ГМТ, координаты которых удовлетворяют соотношениям :

а)  $x + y > 0$ ; б)  $y - x > 1$ ; в)  $y \geq x^2$ ; г)  $y < x^2$ ; д)  $x^2 + y^2 < 1$ ; е)  $x^2 + y^2 \geq 1$ .



## Тема 2. Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля.

**Цели** :- напомнить методы построения графиков функций , содержащих знак модуля;  
-способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;  
-закрепить полученные знания.

**Методы обучения** : лекция, объяснение, выполнение тренировочных заданий.

Когда в стандартные функции , которые задают прямые, гиперболы, параболы , включают знак модуля, их графики становятся необычными. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения графиков элементарными функциями , а также твердо знать и понимать определение модуля.

**Построение графиков функций вида** :  $y = |f(x)|$ ,  $y = f(|x|)$ ,  $|y| = f(x)$ ,  
 $y = |x + a| + |x + b| + |x + c| + \dots$ ,  
частично содержащих знак модуля.



Открытый урок

### Тема 3. Построение ГМТ , заданных уравнениями.

**Цель:** продолжить решение задач по изучаемой теме, рассмотреть построение ГМТ, заданных уравнениями с двумя неизвестными.

**Задание.** Решить графически:

1.  $|x-y| = 3$

2.  $|x| - |y| = 3$

3.  $|x| = |y|$

4.  $y = |x| / x$

5.  $x = |y-1| + 3$

6.  $|x+1| = 2$

7.  $|y-2| = 1$

8.  $|x-y+1| + |x-y| = 1$

9.  $|y-1| + y-1 = |x-2| + x-2$

10.  $|x-y| + |x+y|$

11.  $(x + |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 0$

12.  $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 9$

13.  $x^2 + y^2 = 2|x+y| + 2$

14.  $x^2 + y^2 = 1 - 2|xy|$

15.  $x = |x^3 + xy^2|$

16.  $(x-1)^2 = (x-2) / |x-2|$

17.  $(x+y-1) / (x^2-y^2-1) = 1$

18.  $x^2 + y^2 = 2|x| + |y|$



## Тема 4. Построение ГМТ, заданных неравенствами и системами неравенств.

**Цель:** научить изображать на плоскости фигуры, задаваемые неравенствами с модулем; использовать рассматриваемый материал для развития интереса к предмету, для более глубокого освоения базовых умений.

**Задание.** Изобразить ГМТ, заданные неравенствами и системами неравенств.

- |                                                             |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1) $ x+y  \leq 1$                                           | 12) $x+y < 3$                                                         |
| 2) $ x+2  > 1$                                              | 13) $x^2+y^2-2x-2y \geq 7$                                            |
| 3) $ x+3  < 1$                                              |                                                                       |
| 4) $ x-2  \geq 2$                                           | 14) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+g > 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$ |
| 5) $ x  +  y  \leq 3$                                       |                                                                       |
| 6) $ x  -  y  > 3$                                          |                                                                       |
| 7) $ x  +  y  > 3$                                          |                                                                       |
| 8) $y \leq  x $                                             | 15) $\begin{cases}  x  + 2 y  \leq 4 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$   |
| 9) $x >  y $                                                |                                                                       |
| 10) $x^2+y^2-2x-2y < 7$                                     |                                                                       |
| 11) $\begin{cases} y >  x  \\ x^2+y^2 \leq 9/4 \end{cases}$ | 16) $x \geq  x^3+xy^2 $                                               |
|                                                             | 17) $x^2+y^2 \leq 2x+2y \leq 4y$                                      |
|                                                             | 18) $x-y-1/\sqrt{x^2+y^2-1} < 1$                                      |
|                                                             | 19) $x^2+y^2 \leq 2 x  - 2 y $                                        |

## Тема 5. Задачи на нахождение площадей.

**Цель:** расширить представление учащихся о взаимосвязи между алгебраическими соотношениями и их геометрическими образами на координатной плоскости.

**Задание:** Найти площадь фигуры, заданной следующим условием:

1.  $|x^2+y^2-2| \leq 2x+2y$

2.  $4 \leq x^2+y^2 \leq 2|x|+2|y|$

3.  $|x|+|y|+|x-y| \leq 2$

4.  $x^2 + y^2 \leq 2x+2y \leq 4y$

5.  $(x-y-1)/(x^2 -y^2-1) < 1$

6.  $x^2+y^2 \leq 2|x|-2|y|$

7.  $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y-11 \leq 0 \\ x^2+y^2-2x+2y+1 \geq 0 \end{cases}$

11.  $(y-1)^2 < (x+2)/(|x+2|)$

8.  $x^2+y^2 \leq 4$

$|x|+|y| > 2$

9.  $x^2+y^2 \geq 144$

$3|x|+4|y| \geq 60$

10.  $x^2 + y^2 \leq 3$

$3y \leq 3|x|$

12.  $|y-1|-x > 8$

$(x+y-1)/(x^2 +y^2-1) > 1$

$(-y) < x < 1$

### ОТВЕТЫ

1.  $2\pi+4$

5.  $(\pi/2)+1$

9.  $600-144\pi$

2.  $8$

6.  $2\pi-4$

10.  $5\pi/2$

3.  $3$

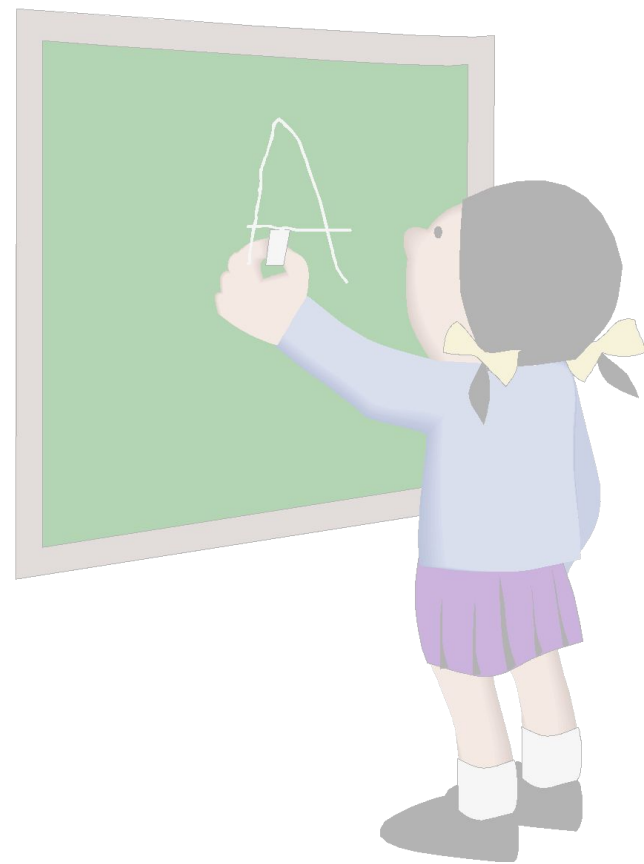
7.  $3,5\pi$

11.  $5$

4.  $\pi$

8.  $2\pi-4$

12.  $1-\pi/8$



# Тема 6. Модуль в заданиях ЕГЭ.

**Цели:** познакомить учащихся с решением некоторых типов заданий, содержащих модуль; предоставить учащимся шанс оценить свои возможности.

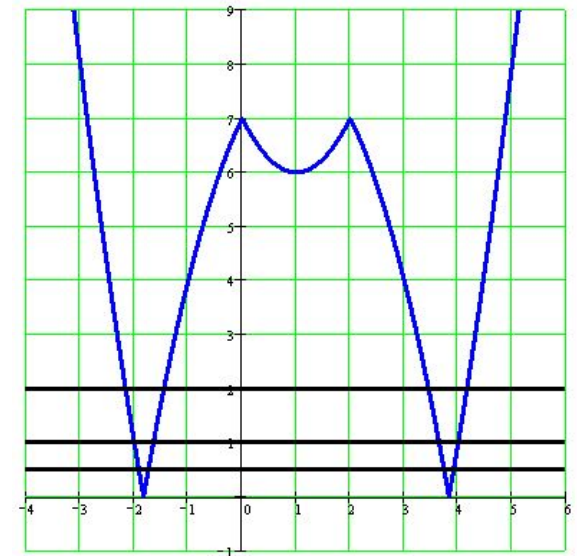
**Задание 1.** При каких значениях параметра  $a$  число корней уравнения  $||x^2-2x|-7|=a$  в четыре раза больше  $a$ ?

**Решение.** Построим график функции  $y = ||x^2-2x|-7|$ . Проводим горизонтали  $y = a$  при различных  $a$ , получаем информацию о числе пересечений этой горизонтали с графиком.

Значение $a$	$a < 0$	$0$	$0 < a < 6$	$6$	$6 < a < 7$	$7$	$a > 7$
Число корней	0	2	4	5	6	4	2

$0 < a < 6$  и при этом  $4a=4$ .

Ответ:  $a=1$ .



## Задание 2.

При каких значениях  $x$  функция  $y = |2x + 3| + 3|x - 1| - |x + 2|$  имеет наименьшее значение?

## Задание 3.

При каких значениях  $x$  функция  $y = |x + 1| + |x - 1| - 2|x - 2|$  достигает максимума?

## Задание 4.

При каком значении  $a$  уравнение  $|x^2 - |x| - 6| = a$  имеет более двух корней?

## Задание 5.

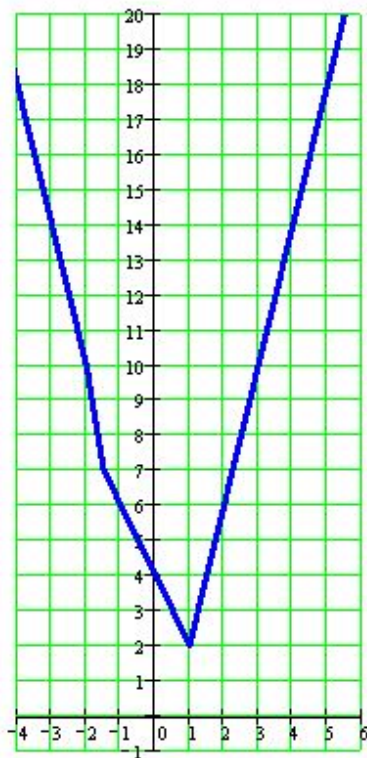
При каком значении  $x$  функция

$$y = x^2 + 2x - \sqrt{4x^2 + 16x + 16}$$

достигает минимума?

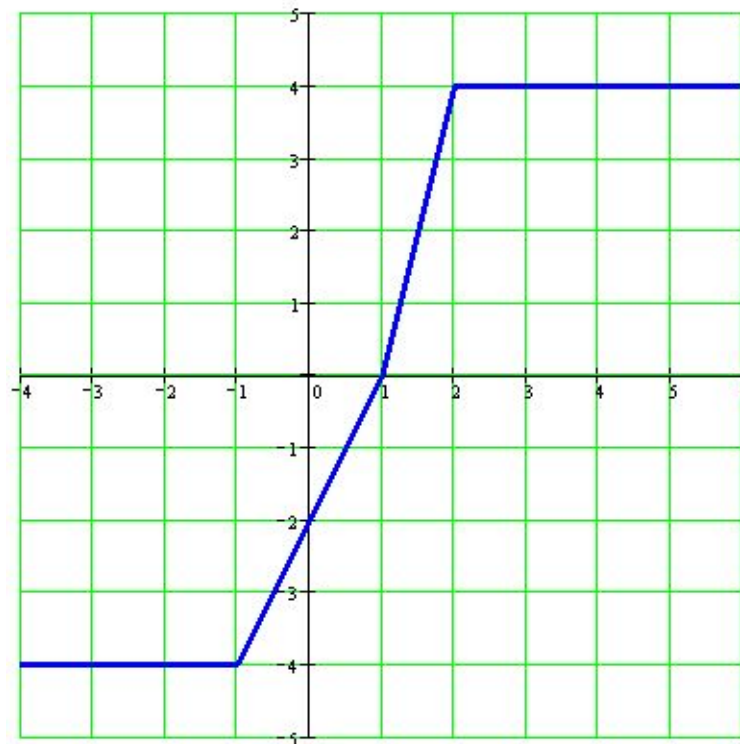
# Решение

$$y = |2x + 3| + 3|x - 1| - |x + 2|$$



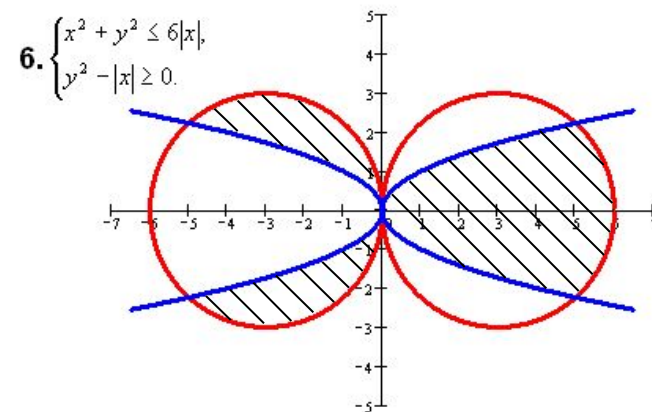
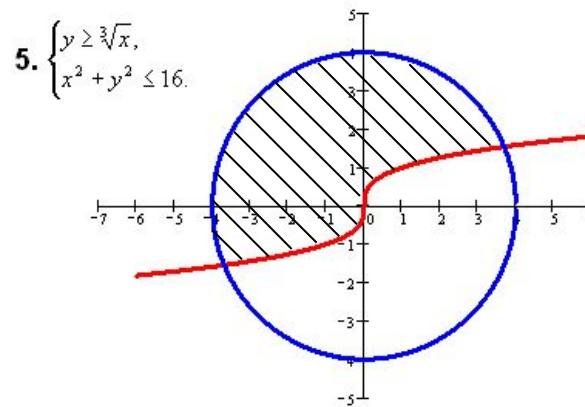
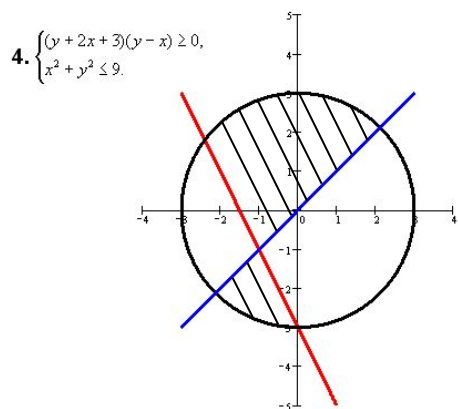
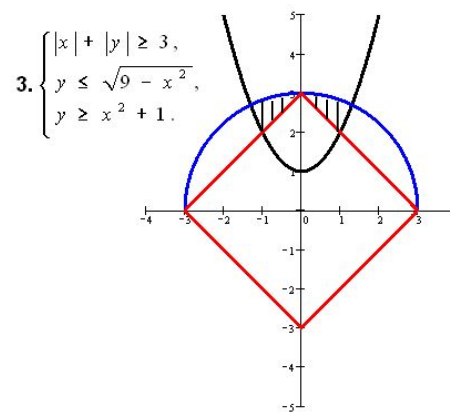
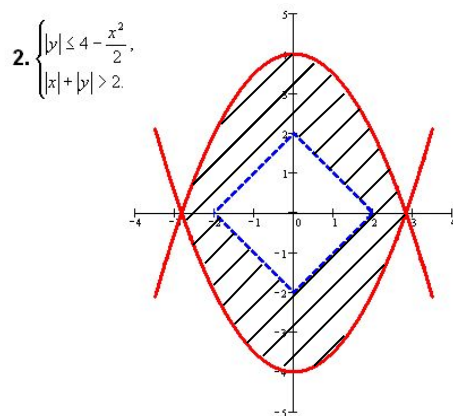
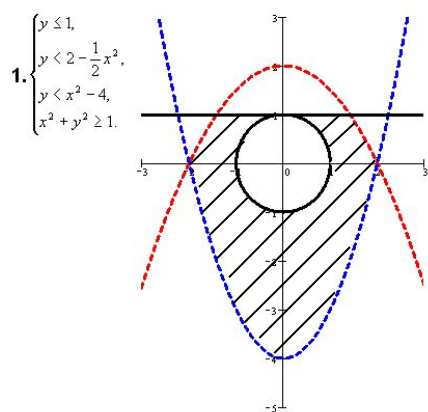
Ответ: при  $x=1$ .

$$y = |x + 1| + |x - 1| - 2|x - 2|$$



Ответ: при  $x \geq 2$

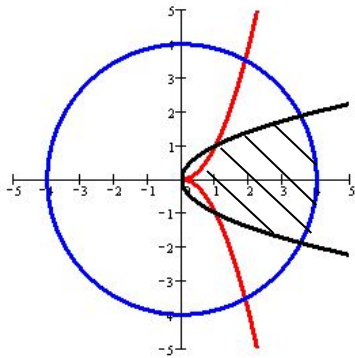
# Представление своих работ учащимися.



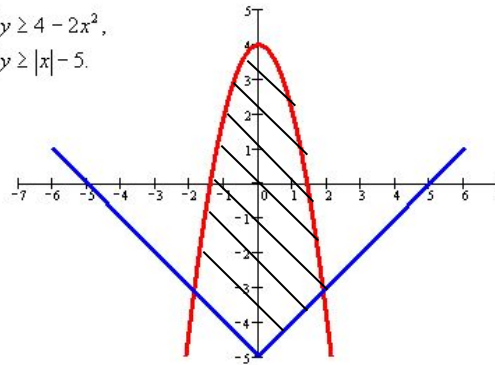


# Задачи, составленные учащимися .

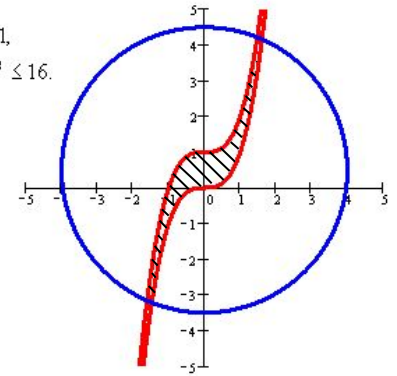
$$7. \begin{cases} |y| \leq x|x|, \\ x^2 + y^2 \leq 16, \\ y^2 \leq x. \end{cases}$$



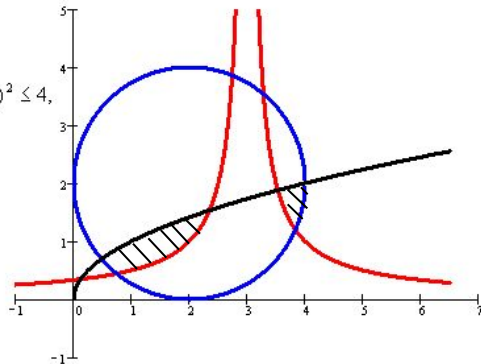
$$8. \begin{cases} y \geq 4 - 2x^2, \\ y \geq |x| - 5. \end{cases}$$



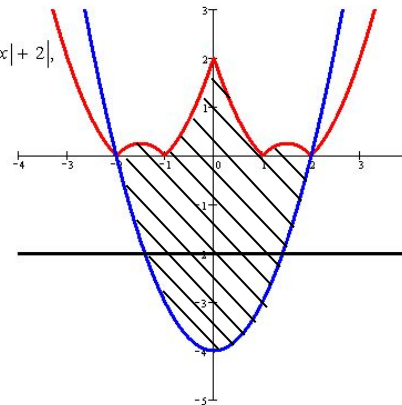
$$9. \begin{cases} x^3 \leq y \leq x^3 + 1, \\ x^2 + (y - 0.5)^2 \leq 16. \end{cases}$$



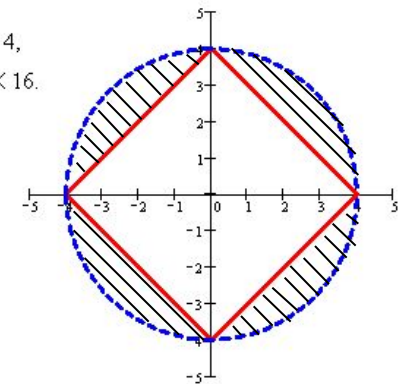
$$10. \begin{cases} y \geq \frac{1}{x-3}, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ y \leq \sqrt{x}. \end{cases}$$



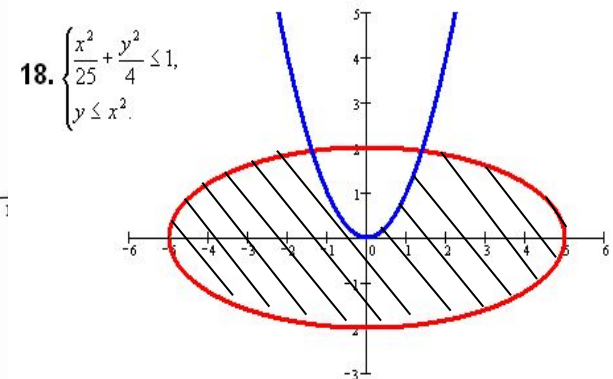
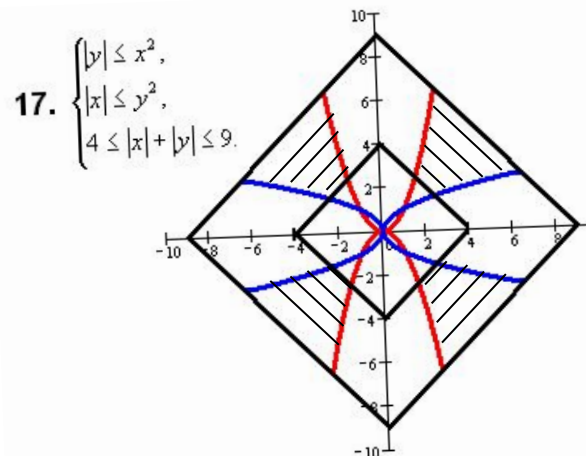
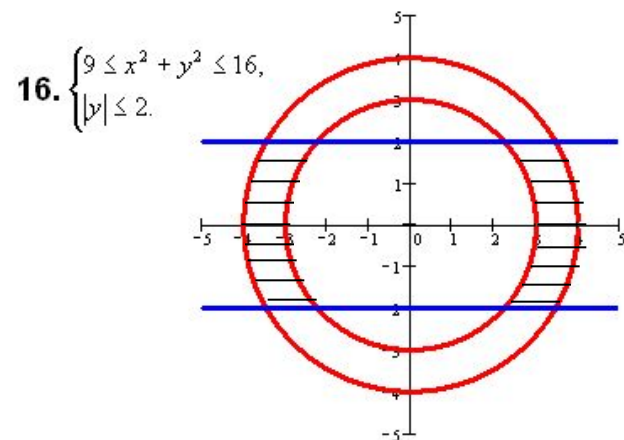
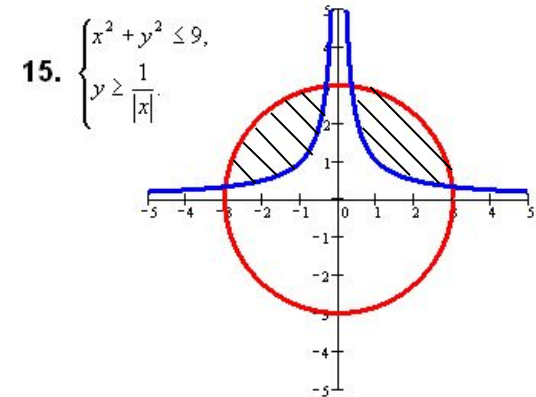
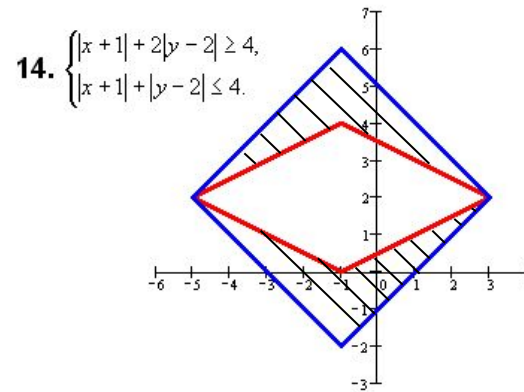
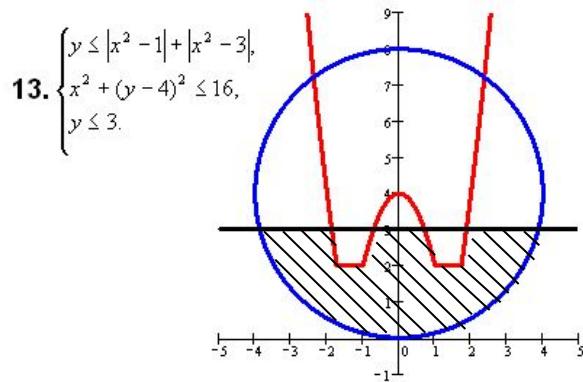
$$11. \begin{cases} y \leq |x^2 - 3|x| + 2|, \\ y \geq x^2 - 4, \\ y \geq -2. \end{cases}$$



$$12. \begin{cases} |x| + |y| \geq 4, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$



# Задачи, составленные учащимися.

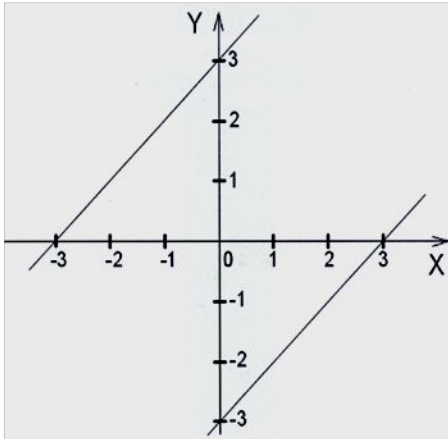


## Используемая литература

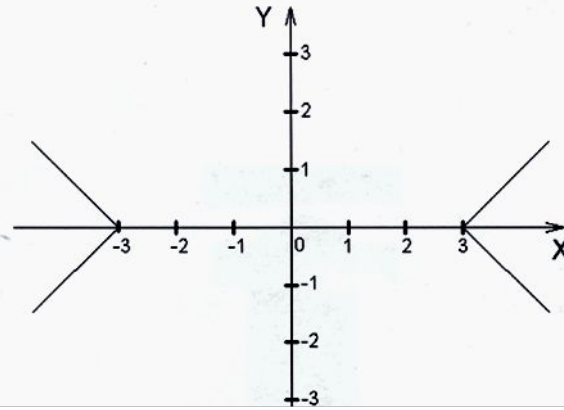
- 1) Дороднов А. М., Острецов И. Н. и др. «Графики функций. Учебное пособие для поступающих в ВУЗы», 1972 г.
- 2) Журнал «Математика в школе» №5, 1999 г.
- 3) Студенецкая В. Н., Сагателова Л. С. «Математика 8-9 класс», Учитель ,2007 . Выпуск 1.
- 4) Горохова Л. И. и др. «Уроки математики с применением интегрированных технологий», 2009 г., «Глобус»
- 5) Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября», №5, 1999 г.
- 6) А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский «Алгебраический тренажер», 1998 г., «Гимназия».
- 7) М. И. Козина « Математика 8-9 класс», «Учитель» , 2007 г. Выпуск 2.
- 8) Интернет-ресурсы

Конец

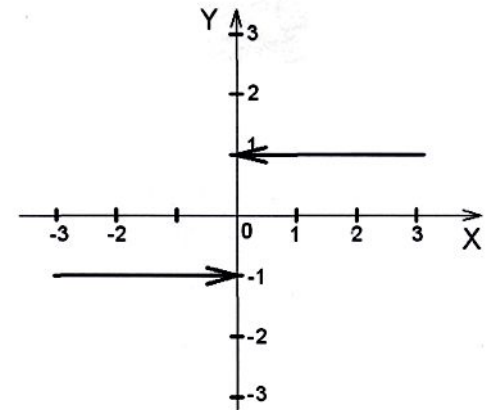
$$|x-y|=3$$



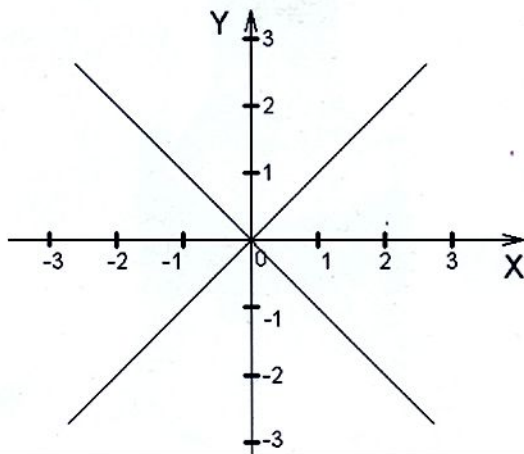
$$|x|-|y|=3$$



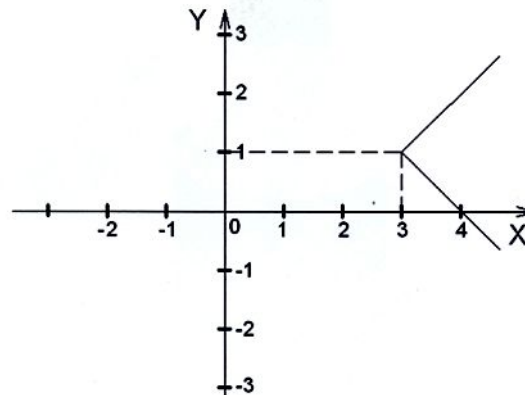
$$y = |x|/x$$



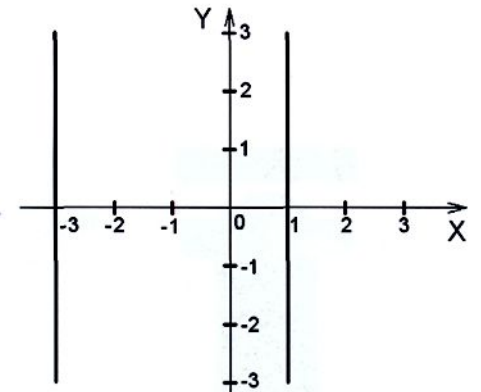
$$|x|=|y|$$



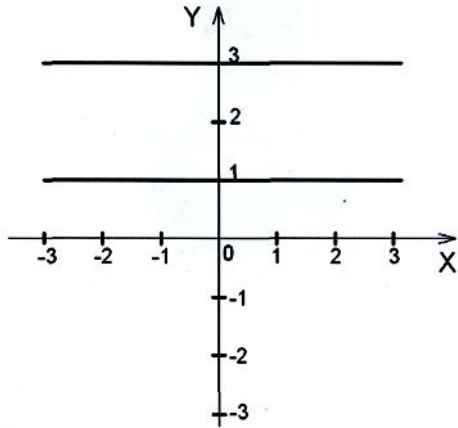
$$x = |y-1|+3$$



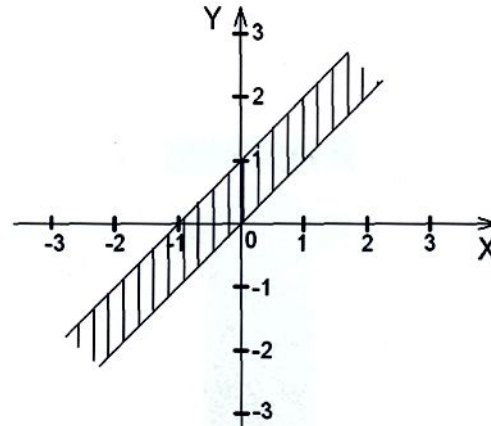
$$|x+1|=2$$



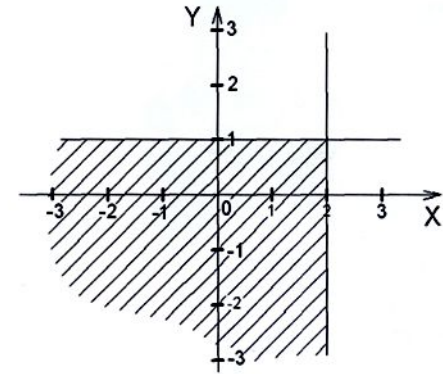
$$|y-2|=2$$



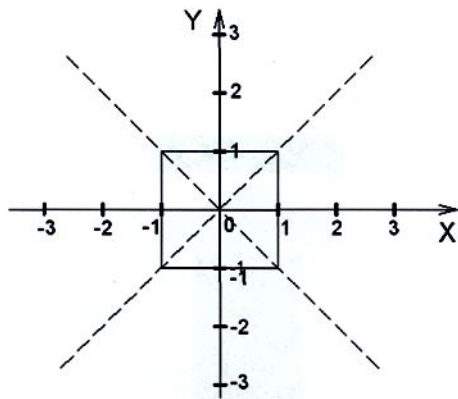
$$|x-y+1|+|x-y|=1$$



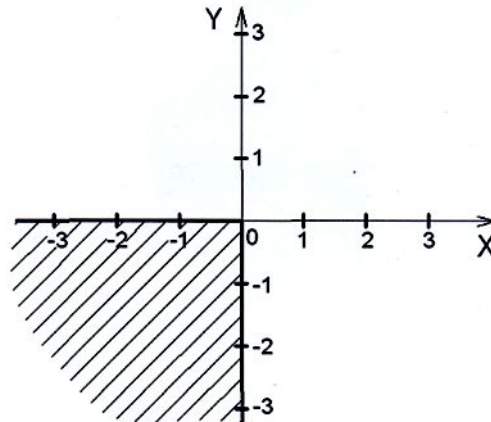
$$|y-1|+y-1 = |x-2|+x-2$$



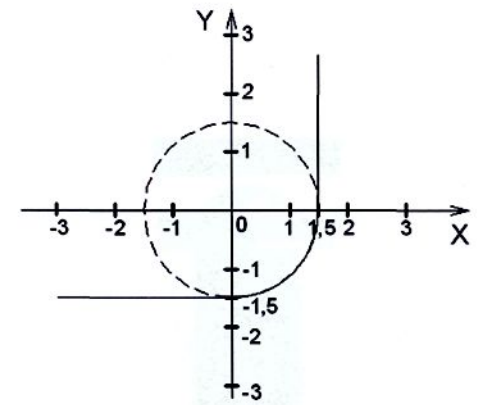
$$|x-y| + |x+y| = 2$$



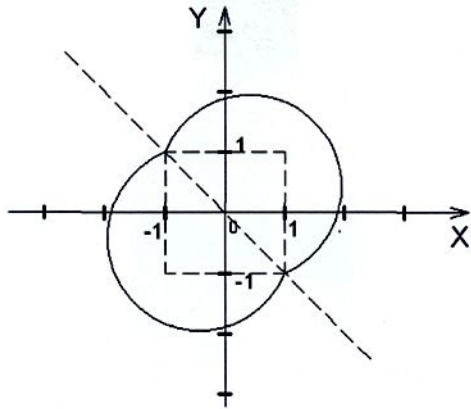
$$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 0$$



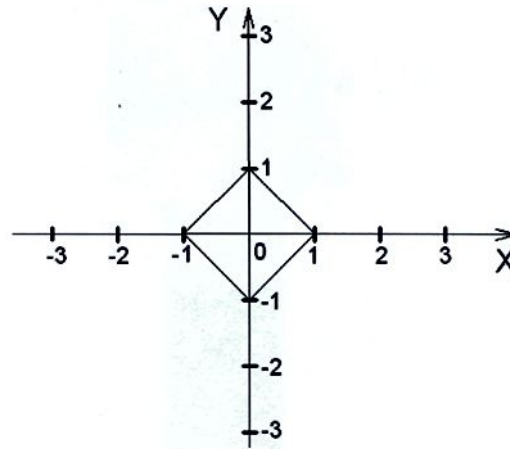
$$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 9$$



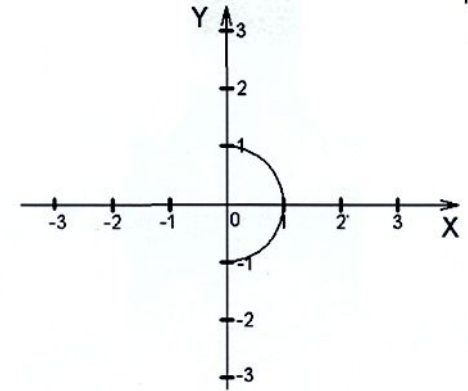
$$x^2 + y^2 = 2|x+y| + 2$$



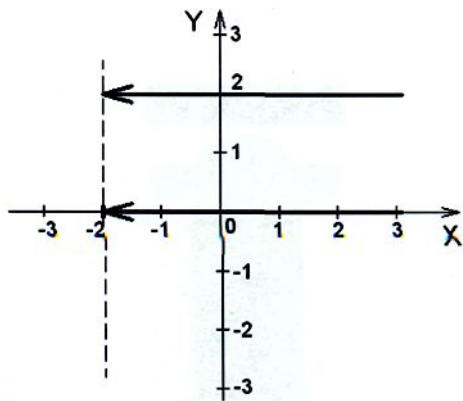
$$x^2 + y^2 = 1 - 2|xy|$$



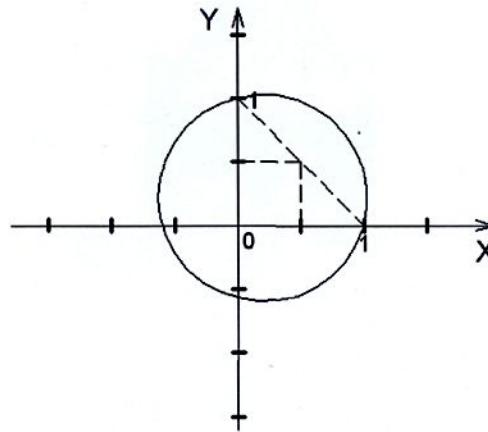
$$x = |x^3 + xy^2|$$



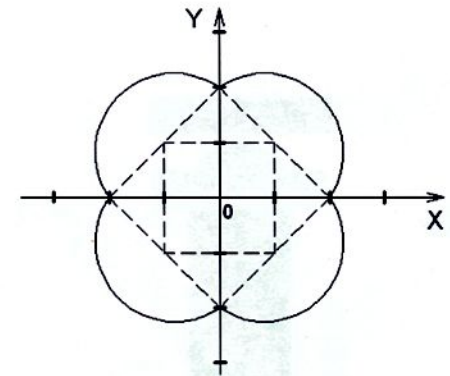
$$(y-1)^2 = (x+2) / |x+2|$$



$$(x+y-1) / (x^2+y^2-1) = 1$$



$$x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|$$



## Тема 2

**Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля (урок повторения и обобщения)**  
**Оборудование: интерактивная доска.**



## Цель занятия:

- напомнить методы построения графиков функций, содержащих знак модуля;
- способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;
- закрепить полученные знания.



# Определение

Не зная определения модуля, невозможно построить даже самого простого графика, содержащего абсолютную величину.

Итак, напомним определение функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0; \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Построение графиков функций с модулем – частный случай построения графиков сложных функций.

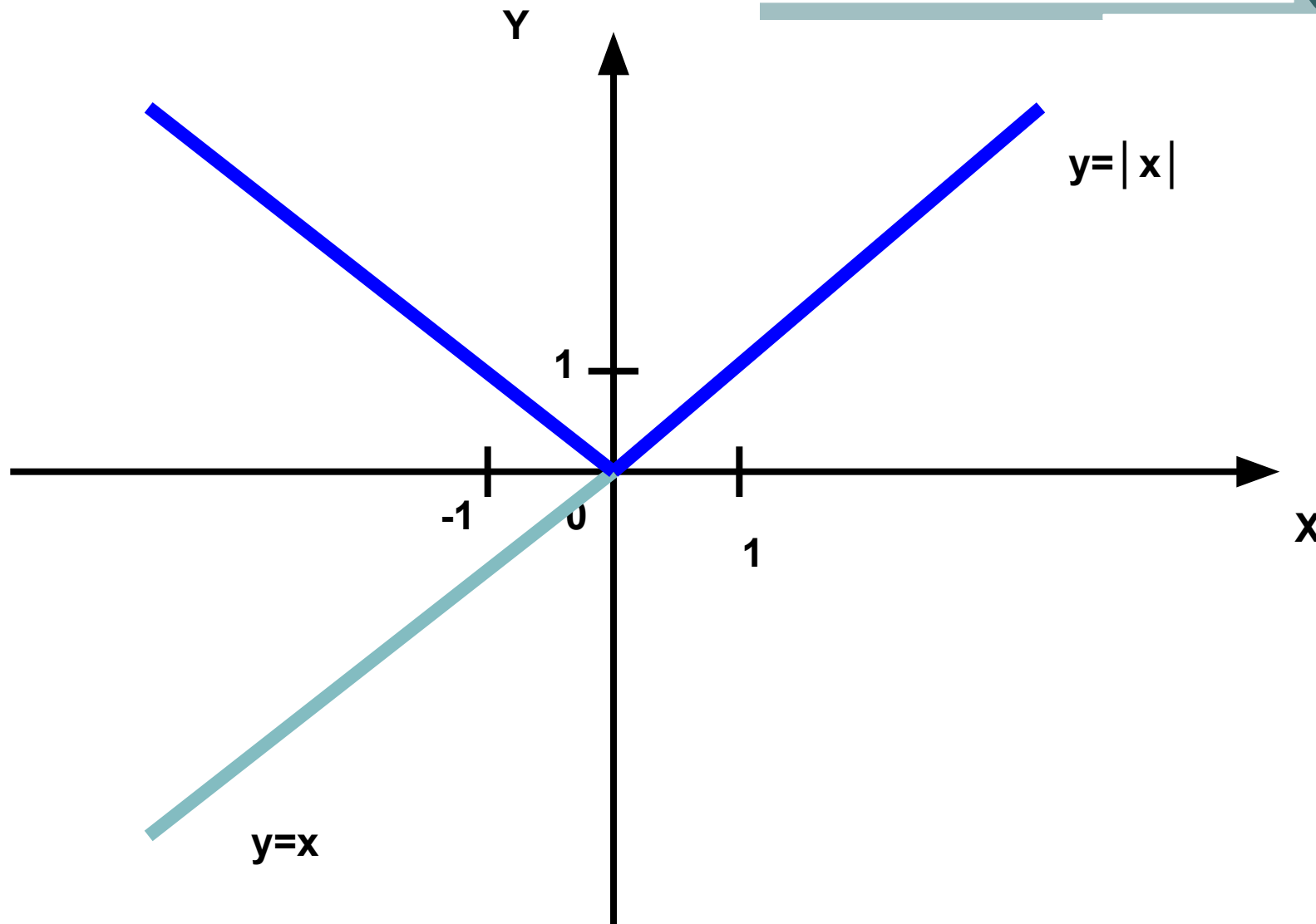


Иллюстрация графика функции  $y = |x|$

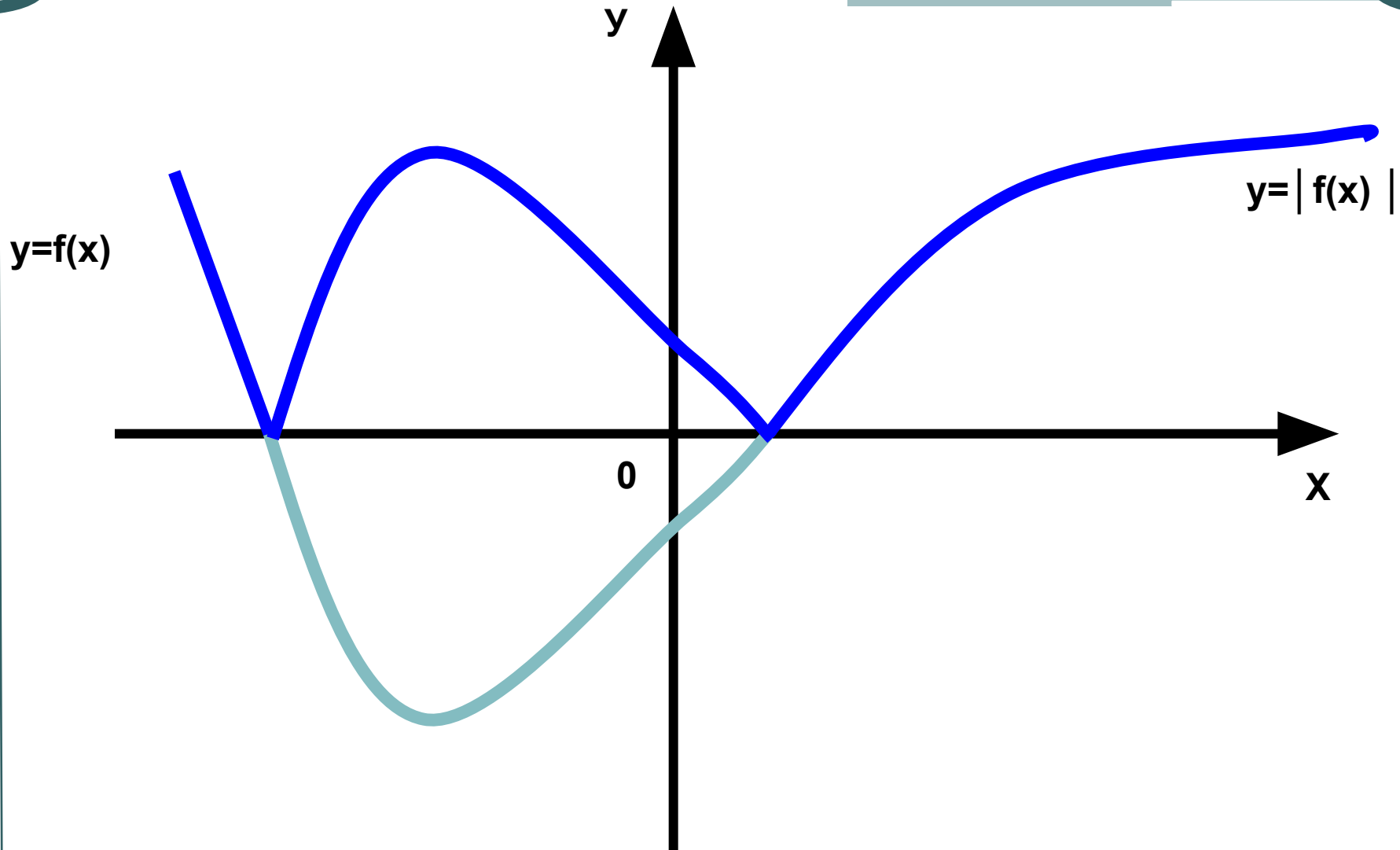


**Чтобы из графика функции  $y = f(x)$   
получить график функции  $y = |f(x)|$ ,**

**нужно:**

- 1) построить график функции  $y = f(x)$ ;
- 2) части графика функции  $y = f(x)$ , лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить от неё.

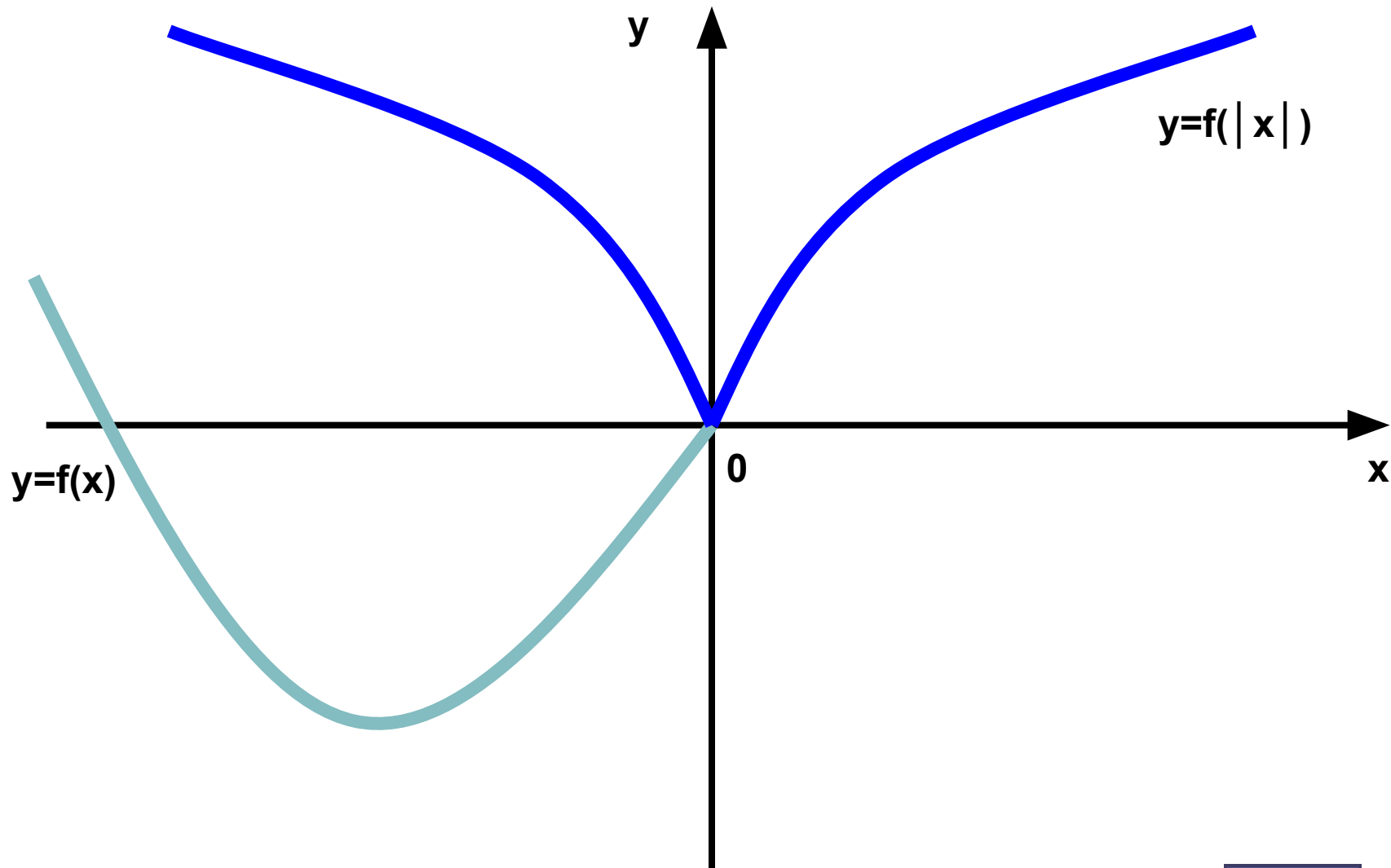




Для того, чтобы построить график функции  $y = f(|x|)$ , нужно:

- 1) построить график функции  $y = f(x)$ ;
- 2) часть графика функции  $y = f(x)$ , соответствующую положительной полуоси абсцисс, отразить от оси ординат.



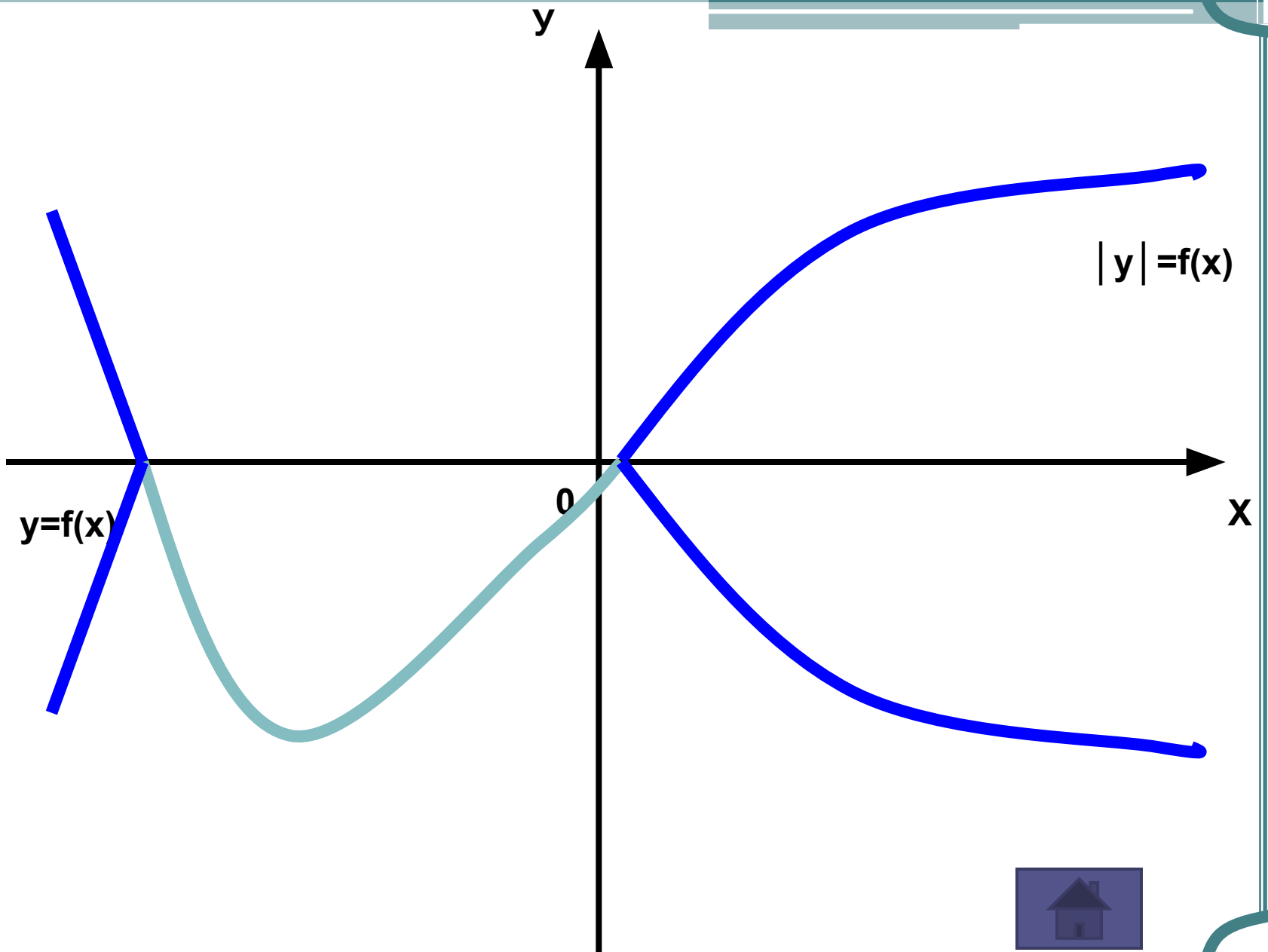


Функция  $|y| = f(x)$  является **двузначной**, т.к. по определению абсолютной величины  $y = \pm f(x)$ , где  $f(x) \geq 0$ , поэтому график симметричен относительно оси ОХ.

### Чтобы построить график этой функции, нужно:

- 1) найти  $D(y)$  из условия  $f(x) \geq 0$ ;
- 2) на  $D(y)$  построить график функции  $y = f(x)$ ;
- 3) отобразить его зеркально от оси абсцисс.







## Графики функций

$$y = |x+a| + |x+b| + \dots + |x+n|$$

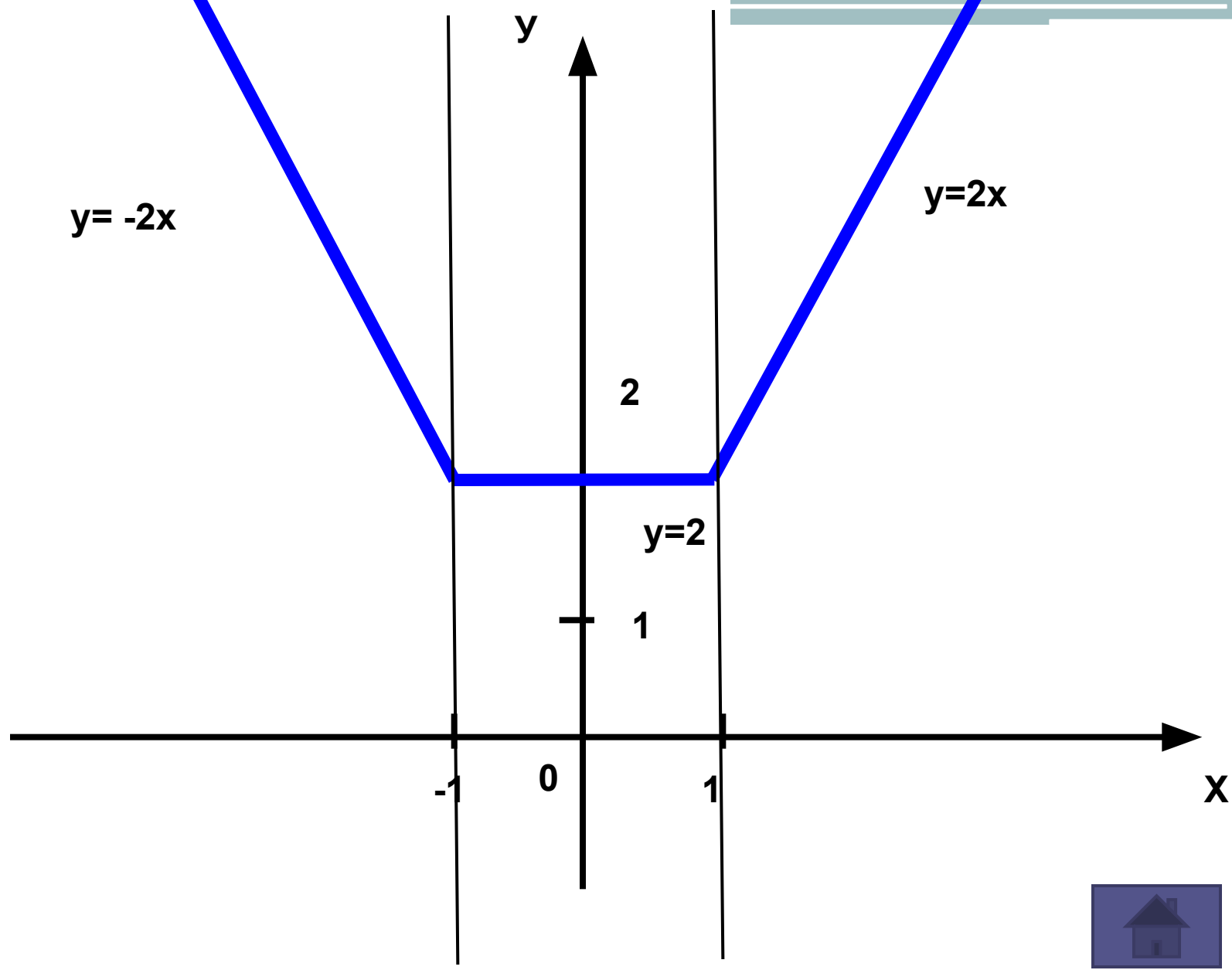
Характерной особенностью графиков функций, содержащих выражения со знаком модуля, является наличие изломов в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком модуля, изменяет знак.



Пример функции  $y = |x+1| + |x-1|$ .

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{при } x \leq -1; \\ 2, & \text{при } -1 < x < 1; \\ 2x, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$





Итак, графики с модулями кажутся очень сложными и непонятными. Разобравшись с графиками основных видов функций, аналитическая запись которых содержит знак абсолютной величины, можно узнать много нового и полезного. Работа с ними увлекательна и интересна.

## Примеры на построение

1.  $|y| = 2$

Строим  $y=2$  и отражаем его относительно оси абсцисс-геометрическим местом точек являются две параллельные прямые

3.  $y = |x^2 - 3x + 2|$

Строим параболу и нижнюю ее часть отображаем относительно оси абсцисс.

2.  $|y| = x^2 - 3x + 2$

На интервале  $(1; 2)$  функция отрицательна, следовательно уравнение не имеет смысла. Искомое ГМТ состоит из кусков параболы на полуинтервалах  $x \leq 1$  и  $x \geq 2$  и их зеркальное отображение относительно оси ОХ.

4.  $y = x^2 - 3|x| + 2$

Строим  $y = x^2 - 3x + 2$  при  $x \geq 0$  и симметрично отображаем его относительно оси ординат

5.  $y = |x| + x$

Раскрыв знак модуля, функцию можно записать в

виде:  $y = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

6.  $y = |x|(x-2)$

После раскрытия модуля функция примет вид:

$y = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

## Самостоятельная работа

Постройте графики функций:

$$y = |x^2 - 3x + 2|$$

$$y = |x^2 - 3|x| + 2|$$

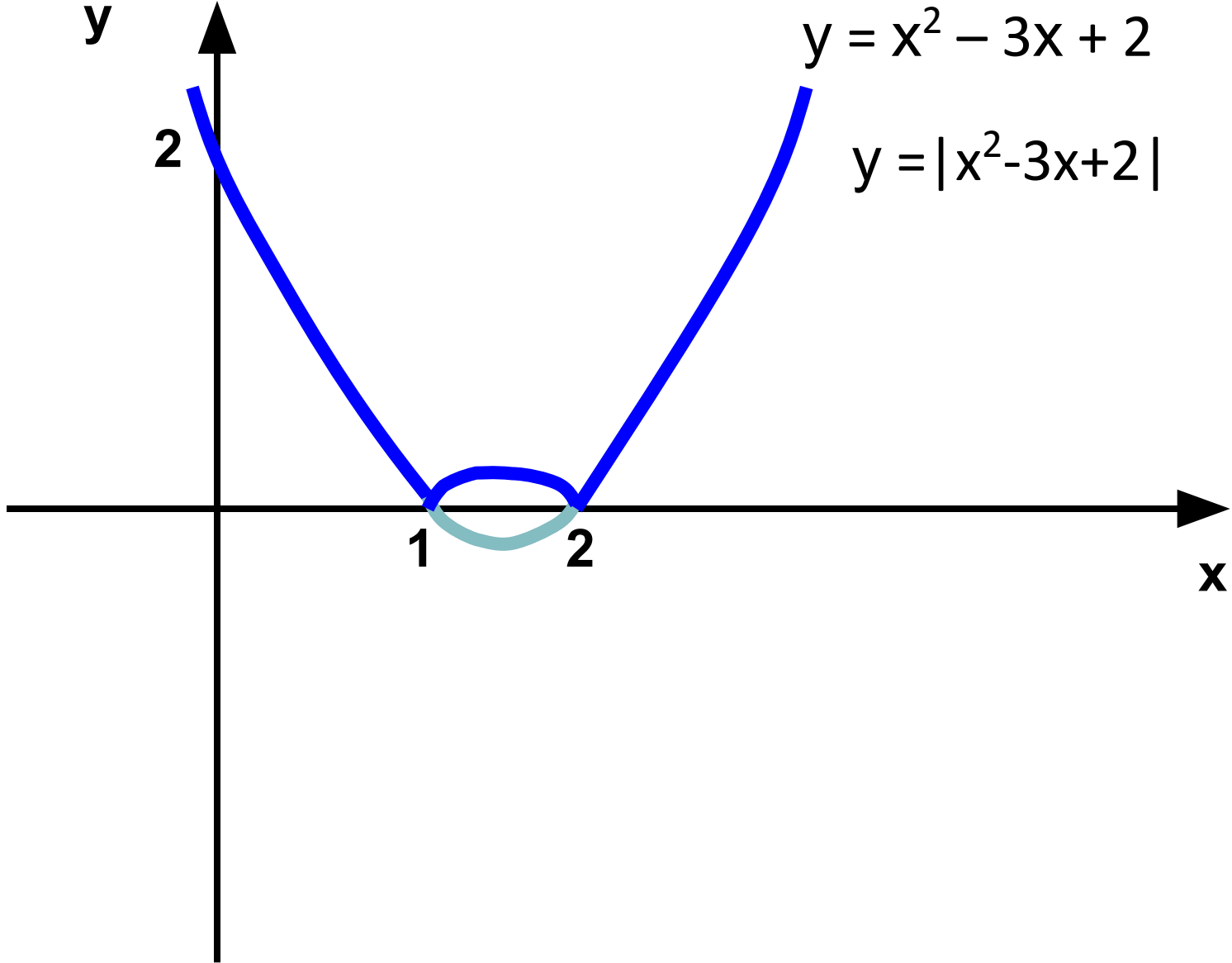
$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$|y| = x^2 - 3x + 2$$

с помощью преобразования функции

$$y = x^2 - 3x + 2$$

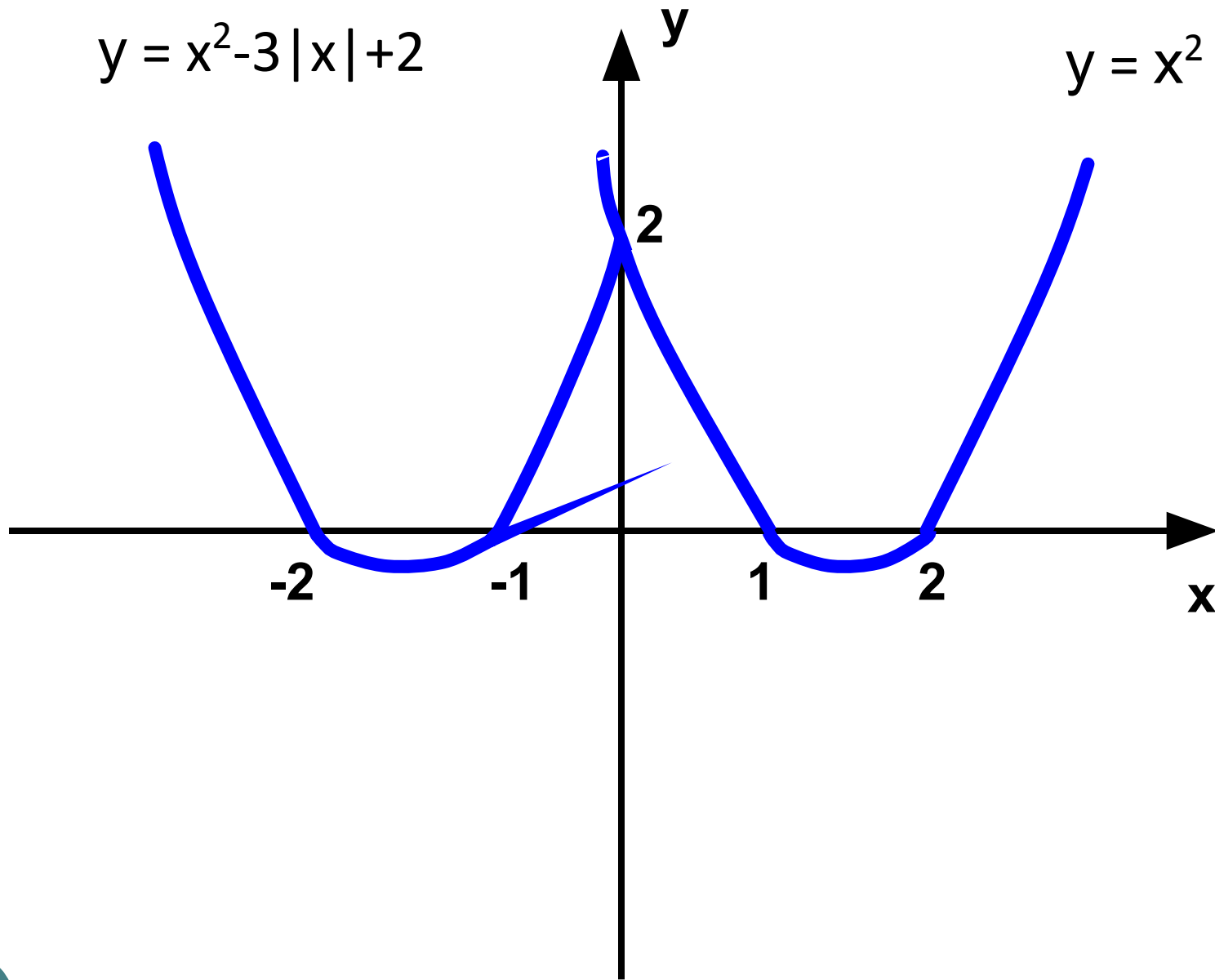
Проверим правильность  
выполнения работы.





$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

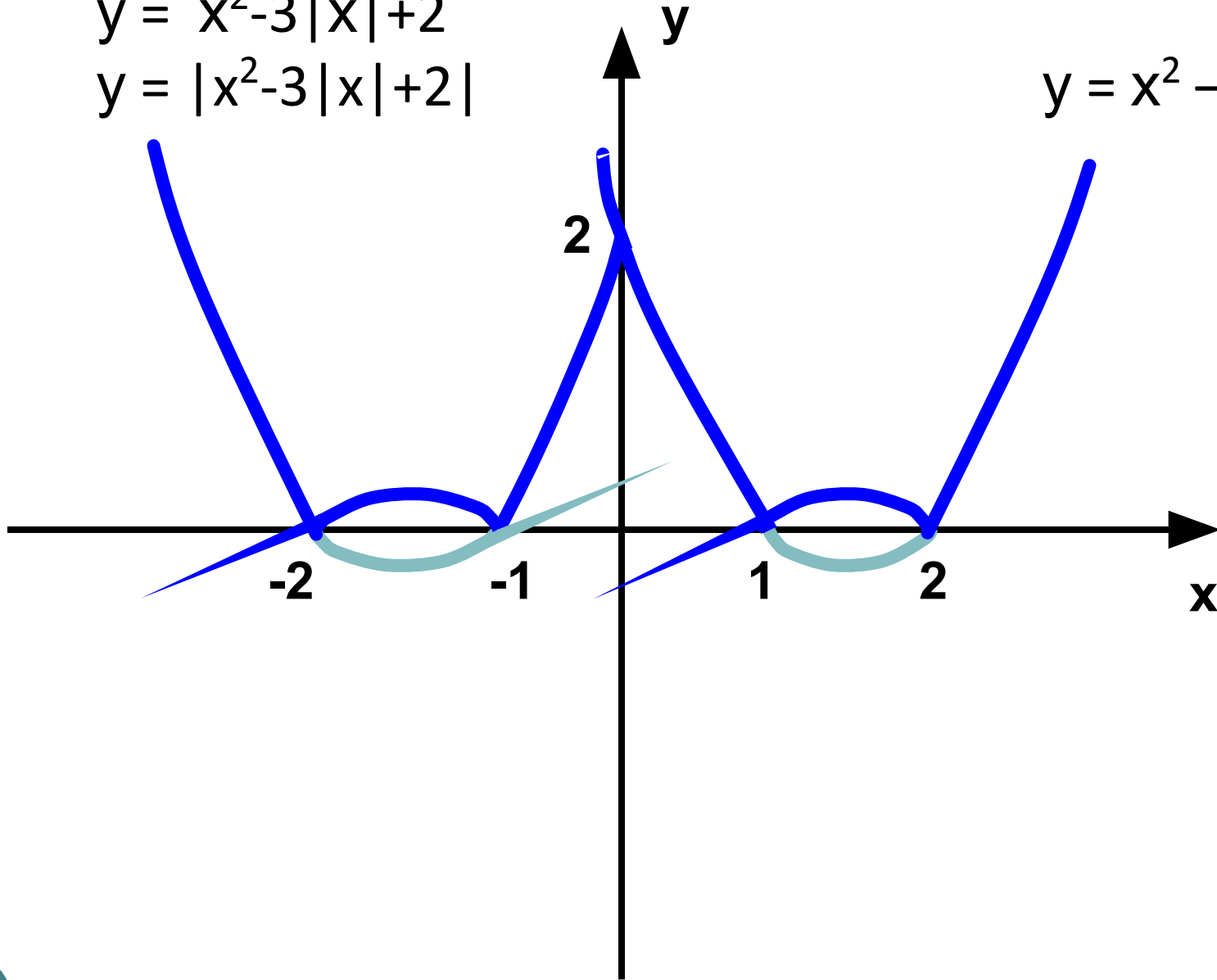
$$y = x^2 - 3x + 2$$

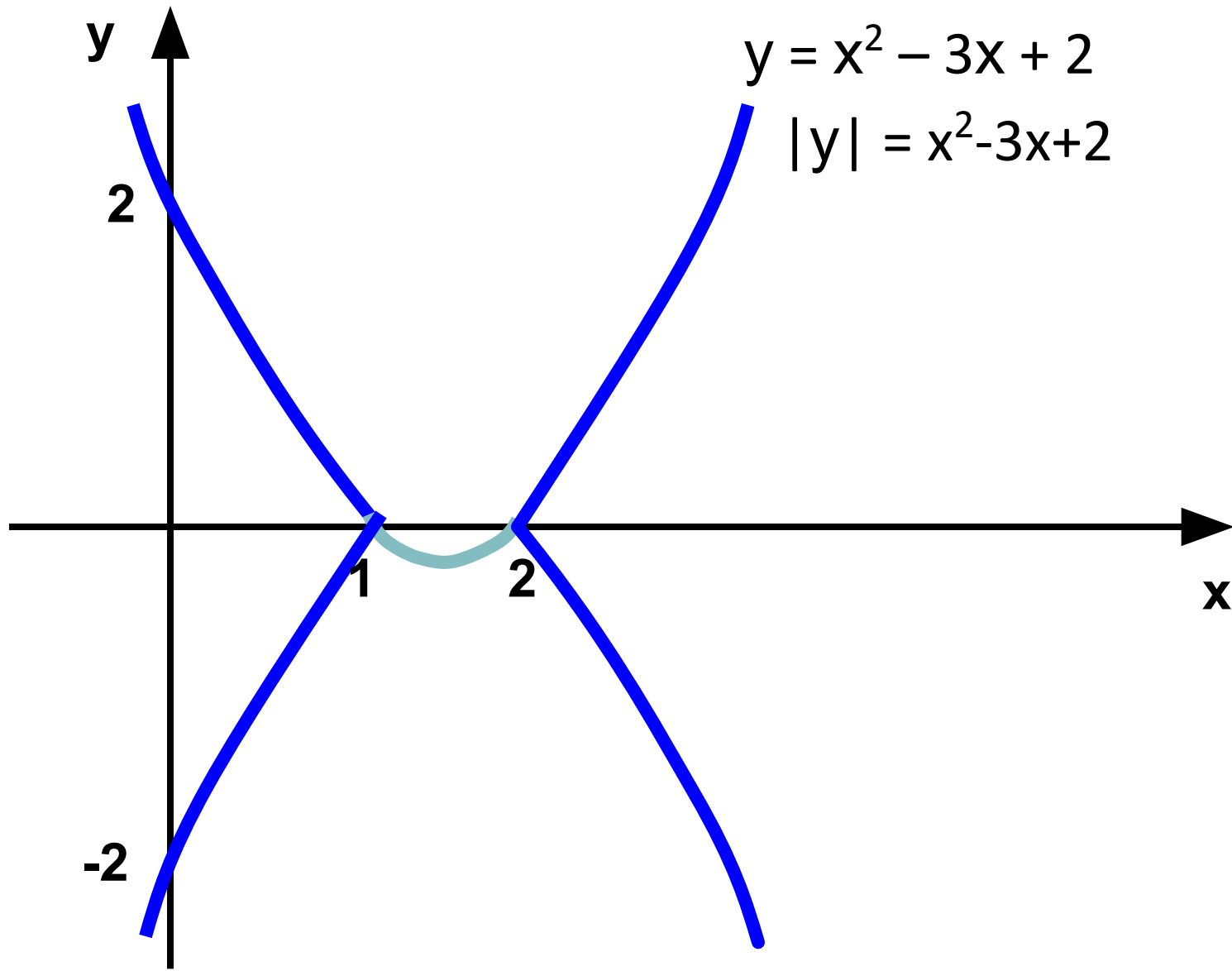


$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$y = |x^2 - 3|x| + 2|$$

$$y = x^2 - 3x + 2$$





$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$|y| = x^2 - 3x + 2$$

Дидактический материал для учащихся.

Упражнения. Построить ГМТ, заданные условием

$$1) y = x^2 - |x| - 6$$

$$2) y = |x^2 - x - 6|$$

$$3) y = |x^2 - |x| - 6|$$

$$4) y = |x-1| + |x-3|$$

$$5) y = |x| - |x-1|$$

$$6) y = 3x + 1 - |x-1| + 2|x|$$

$$7) |y| = x^2 - 5x + 6$$

$$8) |y| = |x^2 - x - 6|$$

$$9) y = |x-2| \cdot x - x^2$$

$$10) y = |x+2| + 2|x-1| - x$$

$$11) y = |x-1| + |x+1| + x$$

$$12) y = |x+1| / (x+1)$$

$$13) y = x |y| \quad 14) |y| = |x^2 - 3x + 2|$$

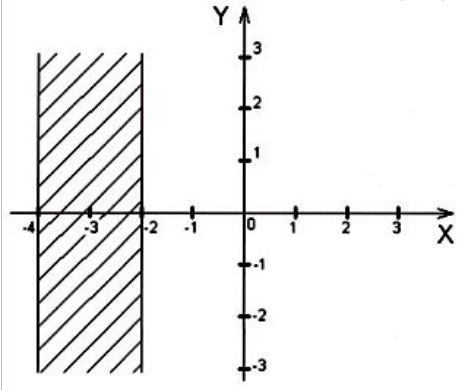
# Домашнее задание

Завершите начатую работу по проекту и сделайте к нему мини-презентацию.

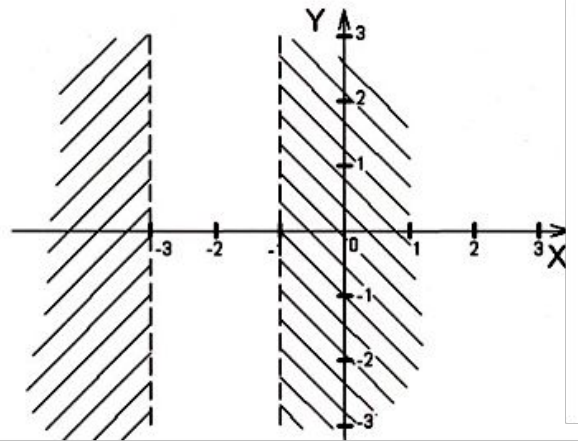
**ВСЕМ СПАСИБО!**



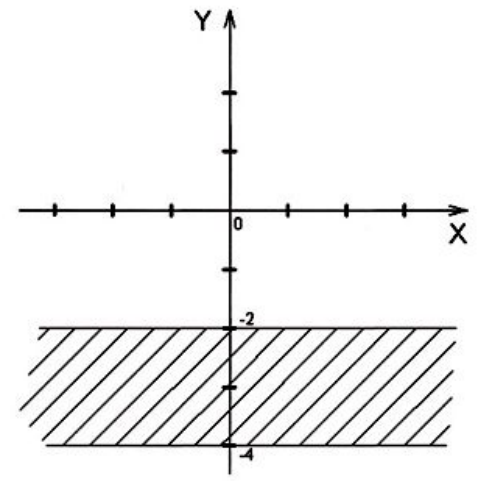
1.  $|x+3| \leq 1$



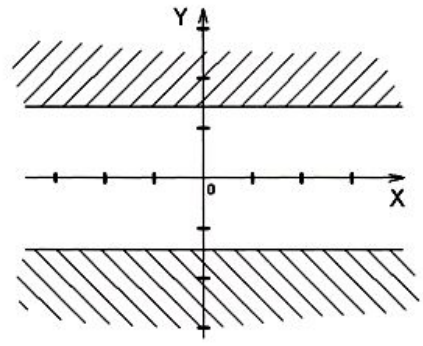
2.  $|x+2| > 1$



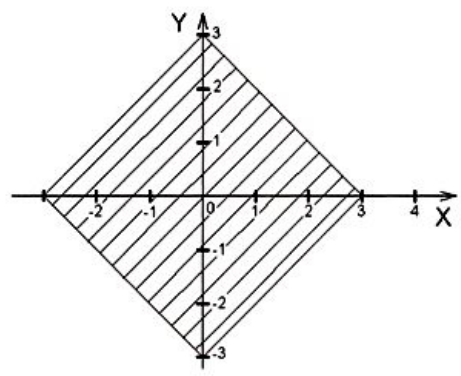
3.  $|y+3| < 1$



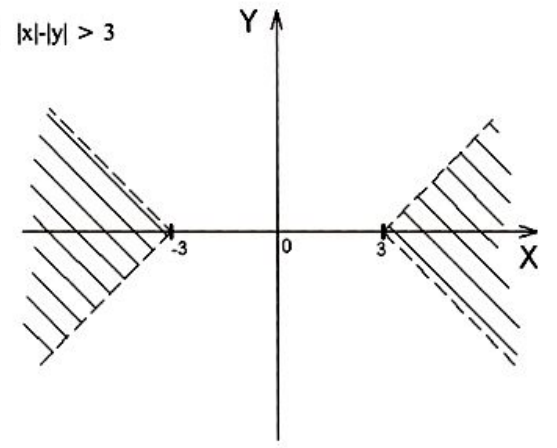
4.  $|y-2| \geq 2$



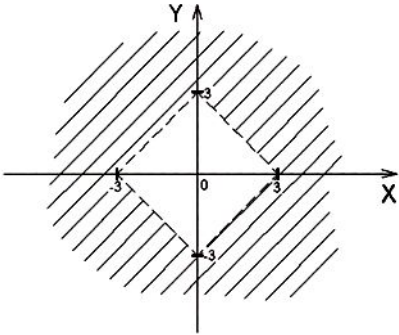
5.  $|x+y| \leq 3$



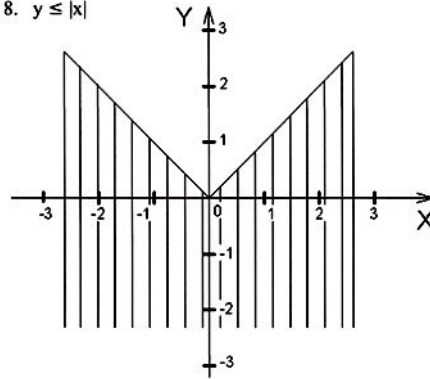
6.  $|x-y| > 3$



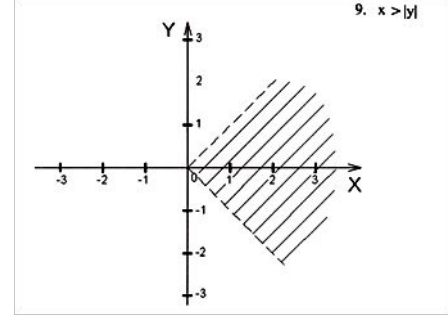
7.  $|x|+|y| > 3$



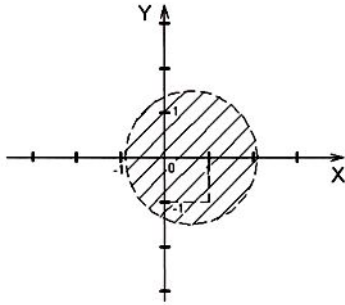
8.  $y \leq |x|$



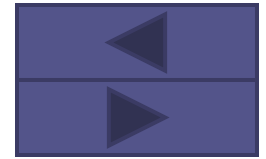
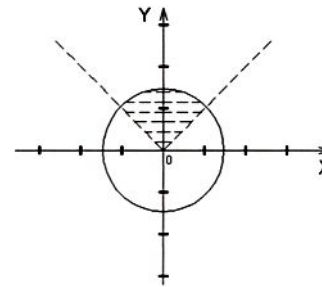
9.  $x > |y|$



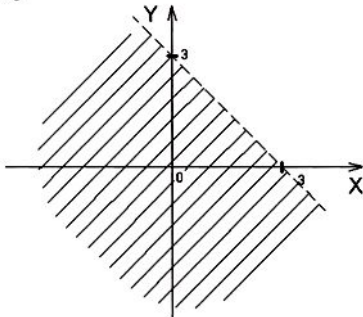
10.  $x^2+y^2-2x-2y < 7$



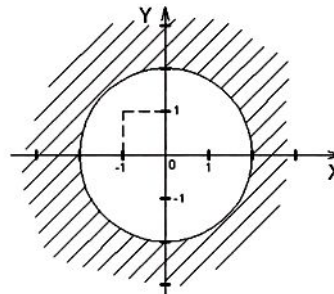
11.  $\begin{cases} y > |x| \\ x^2 + y^2 \leq 0 \end{cases}$



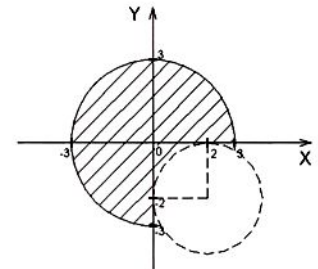
12.  $x+y < 3$

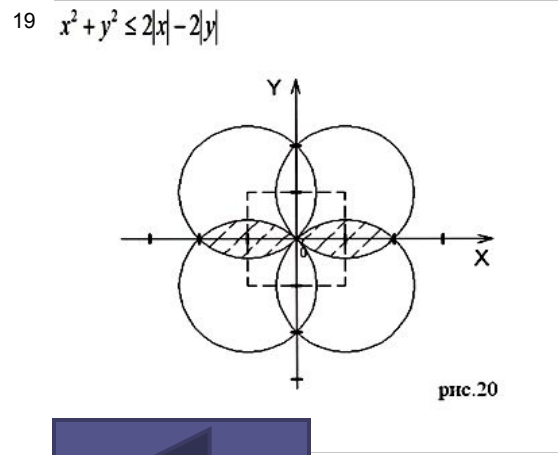
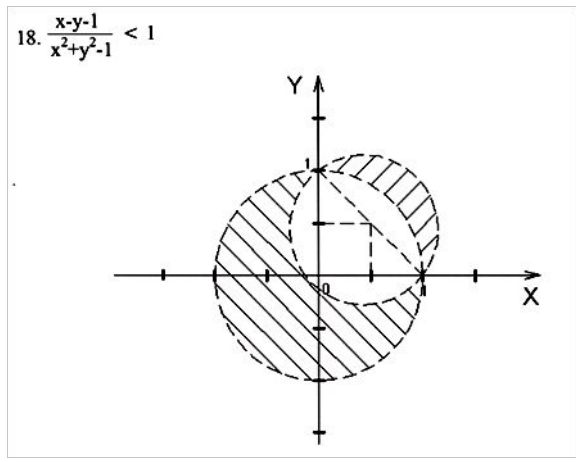
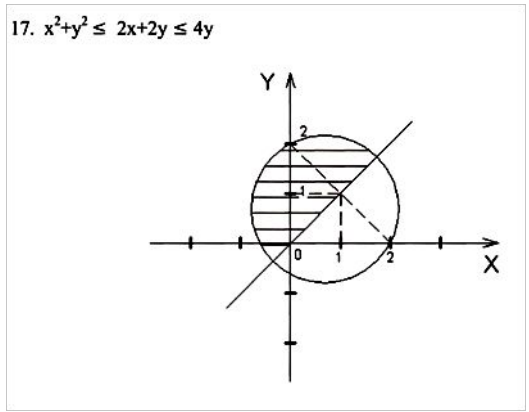
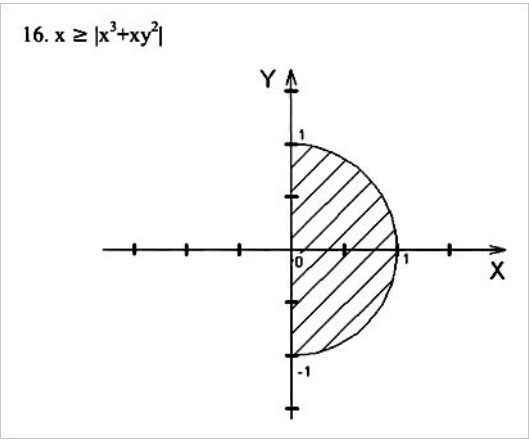
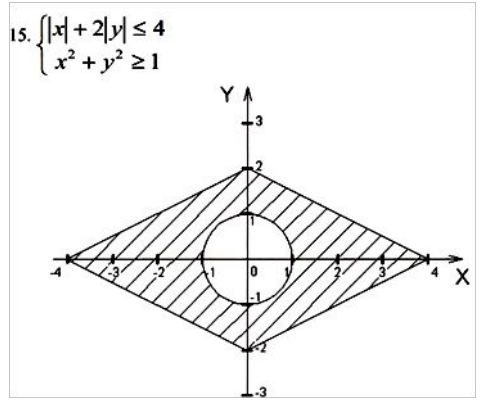


13.  $x^2+y^2-2x-2y \geq 7$



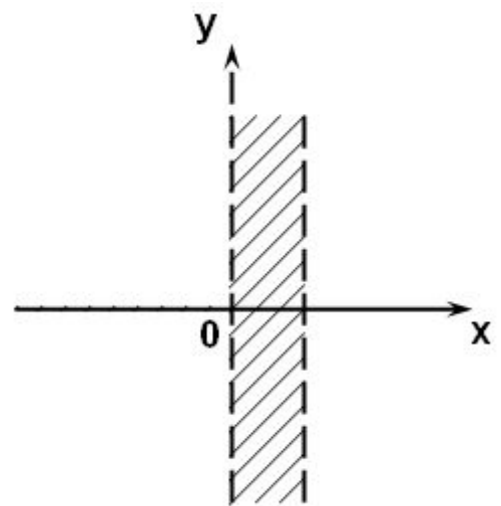
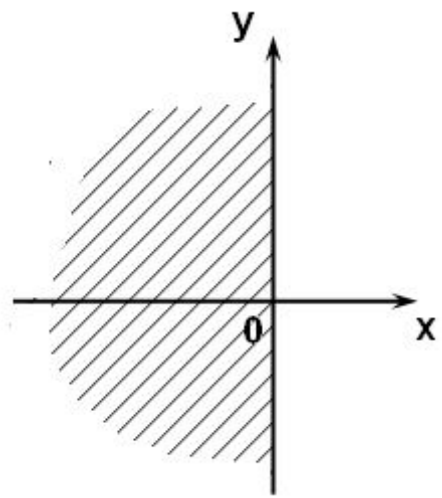
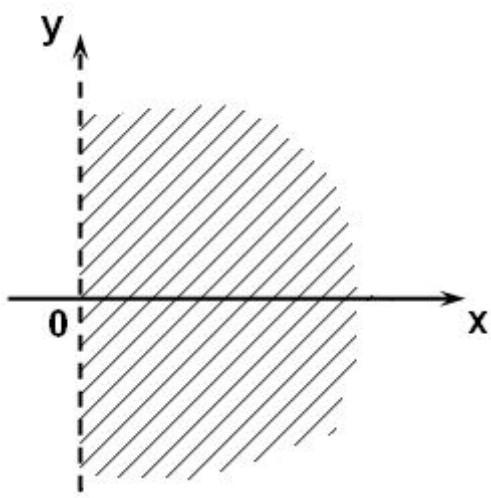
14.  $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9 > 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$



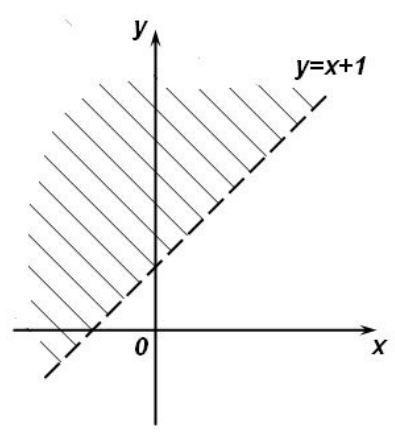
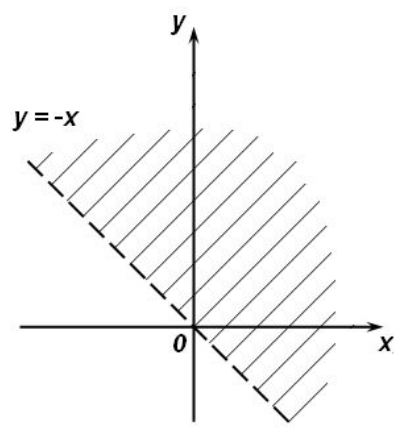
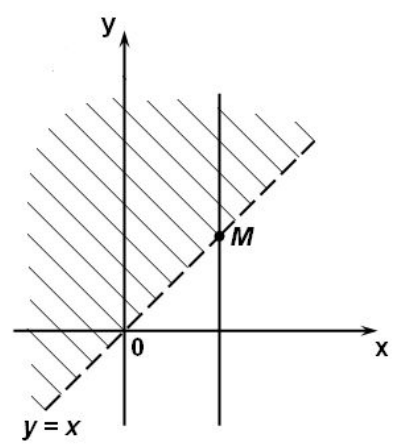




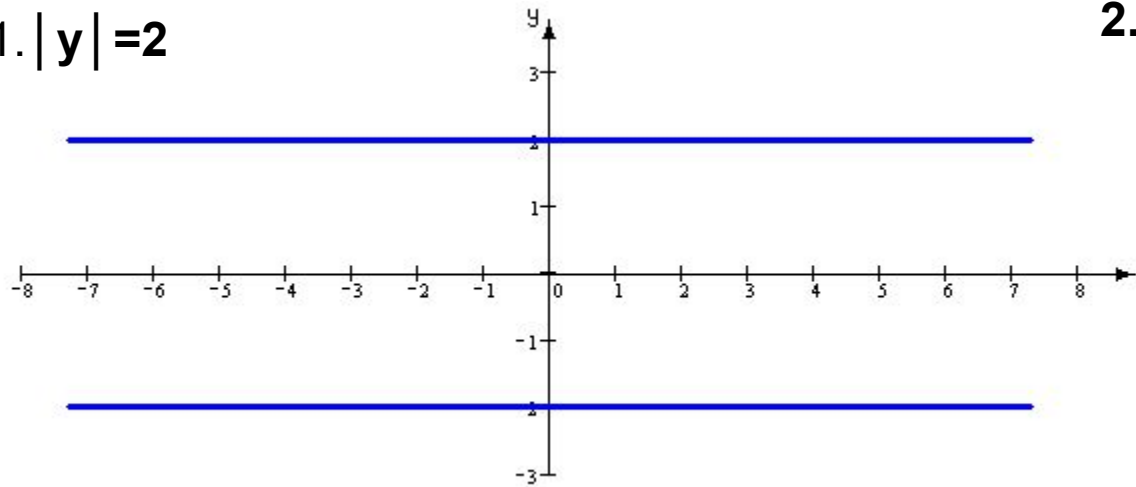
# Упражнение 1



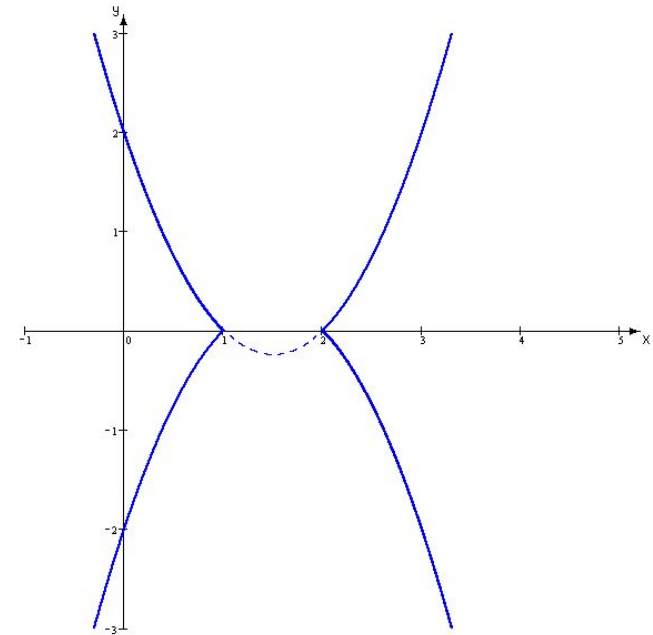
# Упражнение 2



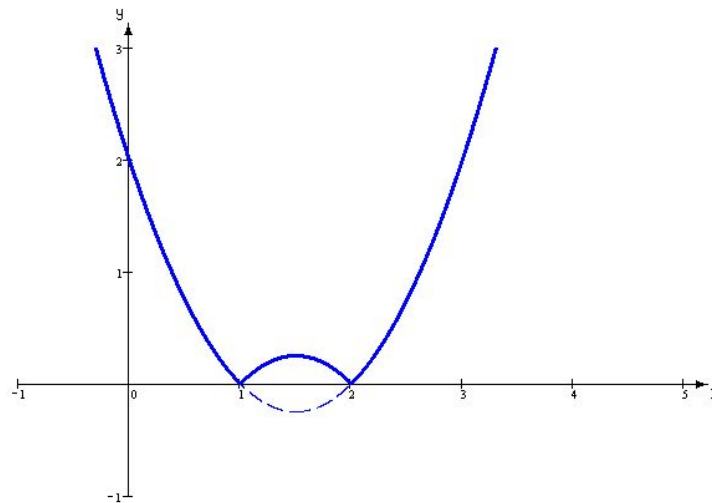
1.  $|y|=2$



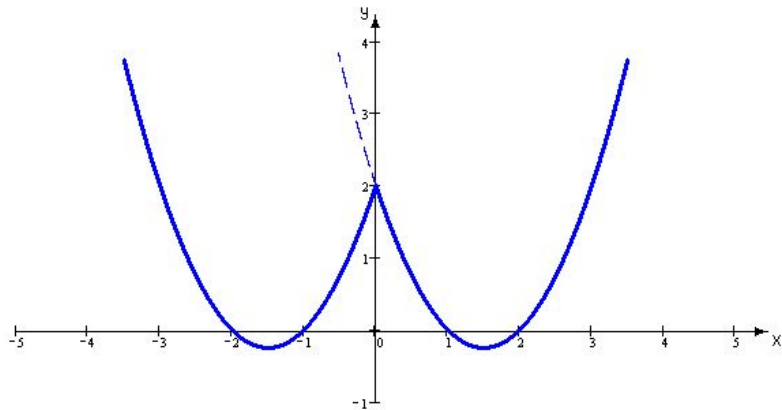
2.  $|y|=x^2-3x+2$



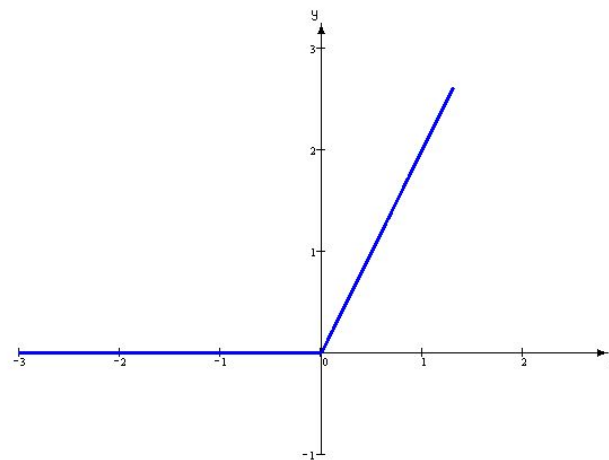
3.  $y = |x^2-3x+2|$



4.  $y = x^2 - 3|x| + 2$



5.  $y = |x| + x$



6.  $y = |x|(x-2)$

